Ayudantía 11 MAT426

Felipe Labra

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

1. Propuesto

Recuerdo: Sea $\mathscr{F}$ un haz en un espacio topológico X. Considere $U = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X, denotamos por $C^p(U, \mathscr{F})$ al grupo abeliano de p-cocadenas de Cech de $\mathscr{F}$ respecto a U, que se define como:

$$C^p(U, \mathscr{F}) := \prod_{i_0<...,<i_p} \mathscr{F}(U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_p}), \quad p \in \mathbb{N}$$

Una p-cocadena de $s \in C^p(U, \mathscr{F})$ es una colección $s = \{s_{i_0,...,i_p}\}_{i_0<...<i_p}$ de secciones de $\mathscr{F}$, donde tomamos una sección por cada posible intersección ordenada de $p+1$ abiertos del cubrimiento U.

Por otro lado, para cada $p \in \mathbb{N}$ definimos el operador de coborde $d^p : C^p(U, \mathscr{F}) \to C^{p+1}(U, \mathscr{F})$ mediante

$$(d^p s)_{i_0,...,i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0,...,i_{k-1},i_{k+1},...,i_{p+1}}\Big|_{U_{i_0}\cap ... \cap U_{i_{p+1}}}$$

Con esto en mente, tenemos las herramientas necesarias para desarrollar el ejercicio.

a. Verifique que $d^{p+1} \circ d^p = 0$, para cualquier $p \in \mathbb{N}$

2. Discusión: Polinomios de Hilbert

Idea: Sean X, Y dos curvas planas con ideales principales donde cada uno es generado por un polinomio f y g, respectivamente. Si estos no tienen componentes irreducibles en común, se tiene de inmediato que la intersección entre las curvas planas es finita. ¿es posible contar los puntos que habitan aquella intersección?

Para ello, necesitamos conocer la dimensión del espacio vectorial formado por los polinomios homogéneos que se anulan en X.

Definición: (Funciones de Hilbert)

1. Sea $I \trianglelefteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideal homogéneo. Entonces $K[x_0, ..., x_n]/I$ es un K-álgebra graduada finitamente generada, de modo que podemos definir la función

$$h_I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad d \to \dim_K(K[x_0, ..., x_n]_d/I_d)$$

   Que codifica la dimensión de las partes graduadas del cuociente. Esta es la función de Hilbert de I.

2. Para una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ definimos $h_X := h_{I(X)}$ de modo que

$$h_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad d \to \dim_K S(X)_d$$

   Donde $S(X) = K[x_0, ..., x_n]/I(X)$ es el anillo de coordenadas homogéneas de X. En este caso llamamos a h_X la función de Hilbert de X.

Observación: Para efectos de cálculos, note que $\dim_K(S(X))_d = \dim_K(K[x_0, ..., x_n])_d - \dim_K(I(X)_d)$

Ejemplos:

1. Sea $X = \{\text{pt}\} \subset \mathbb{P}^n$ un punto. Suponga que pt $= (1 : 0 : \cdots : 0)$, de modo que su ideal es $I(a) = (x_1, ..., x_n)$ y note que $S(X) = K[x_0, ..., x_n]/I(a) \cong K[x_0]$. Finalmente se tiene

$$h_X(d) = 1 \quad \forall\ d \in \mathbb{N}$$

2. Sea $X = \{p_1, p_2\} \subset \mathbb{P}^1$ con p_1, p_2 puntos distintos en $\mathbb{P}^1$. Luego haciendo un cambio de coordenadas, tenemos $I(X) = (x_0 x_1)$, por lo que la expresión de la base para $S(X)_d$ está dada por $\{x_0^d, x_1^d\}$ para $d \geq 0$. Finalmente jugando con las dimensiones obtenemos:

$$h_X(d) = \begin{cases} 1, & \text{si } d = 0 \\ 2, & \text{si } d > 0 \end{cases}$$

3. Sea $X = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{P}^2$ puntos distintos, encuentre $h_X(1)$. Si los puntos son colineales, el ideal viene dado por la recta que los une, de modo que su dimensión es 1. Por otro lado si los puntos no son colineales, no podemos encontrar un polinomio lineal que pase por los 3 puntos, de modo que este ideal es de dimensión 0. Esto es:

$$h_X(1) = \begin{cases} 2, & \text{si son colineales} \\ 3, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A partir de estos cálculos, podemos deducir que la cantidad de puntos intersectados codificados en h_I está contenido en $h_I(d)$ para d tomando valores grandes. Más aún, podemos hacer la siguiente observación.

Observación: Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ un conjunto de d puntos. Para $m \geq d-1$, la función de Hilbert asociada toma la forma $h_X(m) = d$.

El resultado final apunta a que una función de Hilbert es eventualmente polinomial, y en particular, debemos poner especial atención en su grado y el coeficiente principal de aquel polinomio.

Definición: (Polinomios de Hilbert). Sea $I \trianglelefteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideal homogéneo. Entonces existe un único polinomio $\chi_I \in \mathbb{Q}[d]$ tal que $\chi_I(d) = h_I(d)$ para casi todo $d \in \mathbb{N}$, de modo que:

1. El grado de χ_I es $m := \dim V(I)$
2. Si $V(I) \neq \emptyset$, el coeficiente principal de χ_I es $\frac{1}{m!}$ con m un entero positivo.

El polinomio χ_I se llama polinomio de Hilbert de I. En particular, para una variedad proyectiva $X \subset \mathbb{P}^n$ definimos $\chi_X := \chi_{I(X)}$

Definición: (Grado). Sea $I \trianglelefteq K[x_0, ..., x_n]$ un ideal homogéneo tal que $V(I) \neq \emptyset$, y sea $m = \dim V(I)$. Entonces el coeficiente principal de un polinomio de Hilbert es $m!$ veces el coeficiente principal de χ_I, el cual es positivo por el punto 2. de la defínción anterior, y se llama el grado de I, denotado como $\deg I$. En particular, para una variedad proyectiva X, su grado se define como $\deg X := \deg I(X)$.