MAT426 CURVAS ALGEBRAICAS
AYUDANTÍA 10
MÉTODOS ANALÍTICOS EN GEOMETRÍA

GUSTAVO ANKELEN ESPINOSA

1. Preliminares

A continuación, presentaremos resultados importantes del formulario de Cohomología del curso, para luego discutir algunas aplicaciones de estos teoremas que nos darán una idea de resultados analíticos con consecuencias en Geometría Algebraica y/o Compleja (o bien diferencial, aquí nos referimos a lo que en inglés llaman *Manifold*).

1.1. Teorema de Descomposición de Hodge.

Teorema 1. *Para $k = \mathbb{C}$. Sea X una variedad algebraica proyectiva, suave e irreducible. Entonces,*

$$H^i(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(X)$$

Donde, $H^{p,q}(X) := H^q(X, \Omega_X^p)$ es la q-ésima cohomología del haz de p-formas en el fibrado cotangente y donde para la conjugación compleja se tiene la igualdad

$$H^{p,q}(X) = \overline{H^{q,p}(X)}$$

Además, los números de Hodge $h^{p,q}(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega_X^p)$ satisfacen

$$h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X) \qquad y \qquad b_i(X) = \sum_{p+q=i} h^{p,q}(X)$$

□

1.1.1. ***Una aplicación.***

1) El genero de una curva C definido en la **ayudantía 8** $g_{\text{top}}(C)$ coincide con el genero $g(C) = h^0(C, \Omega_C)$.

1.2. Teorema de Anulación de Kodaira.

Teorema 2. *Suponiendo de $car(k) = 0$ (por ejemplo $k = \mathbb{C}$). Sea X una variedad algebraica proyectiva, suave e irreducible y sea $L \in Pic(X)$ fibrado en recta amplio. Entonces,*

$$H^i(X, \omega_X \otimes L) = 0$$

para cada $i > 0$.

Equivalentemente, por dualidad de Serre, obtenemos $H^i(X, L^\vee) = 0$ para todo $i < n$.

1.2.1. ***Una aplicación.***

1) Si Y es una hipersuperficie irreducible en X variedad proyectiva suave e irreducible, tal que $\mathcal{O}_X(Y)$ es amplio, entonces Y es conexa.
2) Si X es **de Fano** entonces $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ para todo $i > 0$.

Date: 24 de noviembre de 2020.

1.3. Teorema de sección hiperplana de Lefschetz.

Teorema 3. *Bajo las hipótesis del teorema de descomposición de Hodge, si $Y \subseteq X$ es una hipersuperficie tal que $\mathcal{O}_X(Y)$ es amplio. Entonces, la restricción*

$$H^i(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^i(Y, \mathbb{Z})$$

es un isomorfismo cuando $i \leq \dim(X) - 2$ y es inyectiva para $i = \dim(X) - 1$. Además, si $\dim(X) \geq 4$ entonces la restricción $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y)$ es un isomorfismo.

Si suponemos además que Y es suave e irreducible, entonces, la restricción

$$H^q(X, \Omega_X^p) \longrightarrow H^q(Y, \Omega_Y^p)$$

Es un isomorfismo para $p + q \leq \dim(X) - 2$ y es inyectiva para $p + q = \dim(X) - 1$.

$\square$

1.3.1. ***Una aplicación.***

1) Sea X una hipersuperficie de grado d en $\mathbb{P}^n$. Si X es una variedad abeliana, entonces $d = 3$ y $n = 2$.

2) Si X es una variedad **de Fano** e Y una hipersuperficie suave e irreducible de X tal que Y es linealmente equivalente a $-K_X$ (es decir, una "hipersuperficie anticanónica"), entonces Y es una variedad estrictamente **de Calabi-Yau**, esto es, K_Y es trivial y además

$$H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0\,, \quad \forall\ 0 < i < \dim(Y)$$

2. Problemas Propuestos

1. Sea X un espacio topológico y $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ sucesión exacta de haces de grupos abelianos en X. Entonces la sucesión

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X, \mathcal{H})$$

es exacta, pero el morfismo $\Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{H})$ no es necesariamente sobreyectiva, es decir, Γ es un functor exacto por izquierda.
Para lo anterior, probaremos que para una curva elíptica $C \subseteq \mathbb{P}^2$, la sucesión

$$0 \to \mathcal{O}_C(-3) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^2}\big|_C \to \Omega^1_C \to 0$$

Es un ejemplo de lo dicho anteriormente.
2. Calcular la dimensión de los grupos de cohomología $H^i(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n})$ del haz cotangente $\Omega_{\mathbb{P}^n}$ de $\mathbb{P}^n$.

Email address: gustavo.arcaya@sansano.usm.cl