Pedro Montero

GEOMETRÍA ALGEBRAICA

Pedro MONTERO

GEOMETRÍA ALGEBRAICA

Pedro Montero

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

El presente texto tiene como principal objetivo complementar el curso de *Curvas Algebraicas* en la Universidad Técnica Federico Santa María.

El objetivo de este curso es que las y los estudiantes se introduzcan a la geometría algebraica. El principal objeto de estudio de la geometría algebraica son las variedades algebraicas, las cuales son objetos geométricos que están definidos (localmente) por sistemas de ecuaciones polinomiales. Un ejemplo notable es la ecuación

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Si suponemos que las soluciónes (x, y, z) son *enteras* entonces se sabe que dicha ecuación no posee soluciones no-triviales (Euler, 1760). Por otra parte, si suponemos que las soluciones son *complejas* entonces se sabe que el objeto geométrico que describe las soluciones de la ecuación es una curva elíptica (objeto muy importante en geometría, teoría de números, criptografía, etc).

Dado que en general existen demasiadas ecuaciones polinomiales a considerar, generalmente se imponen restricciones para estudiar dichas variedades algebraicas. Ejemplos de dichas restricciones pueden ser la cantidad de variables, la cantidad de polinomios, el grado de los polinomios, etc. Finalmente, otro tipo de restricciones interesantes son aquellas que involucran la *geometría* de la variedad algebraica definida por dichas ecuaciones polinomiales, como por ejemplo que el objeto sea suave (o que no tenga singularidades demasiado malas), que tenga una dimensión determinada, que posea ciertas formas diferenciales, etc.

Estas primeras restricciones sobre los polinomios son el objeto de interés de la *geometría algebraica clásica*, mientras que el segundo punto de vista ha sido el predominante desde la reformulación de la geometría algebraica en los años 60 por la escuela de Grothendieck, y es por lo cual es que nos referimos a él como *geometría algebraica moderna*.

En otras palabras, y más precisamente, el objetivo de este curso es introducir las nociones básicas de la geometría algebraica moderna. En particular, se estudiarán algunos de los invariantes geométricos más importantes tales como los divisores, grupos de cohomología y el haz dualizante. Adicionalmente, se estudiarán algunos ejemplos remarcables provenientes de la geometría algebraica clásica tales como las hipersuperficies en espacios proyectivos, las variedades grassmannianas y los blow-up de variedades a lo largo de sub-variedades, entre otros. Finalmente, aplicaremos los resultados y métodos estudiados para analizar el caso de **curvas algebraicas** (i.e., variedades algebraicas de dimensión 1).

El Capítulo 1 busca introducir el lenguaje de Categorías y Haces, que serán las nociones fundamentales para todo lo que sigue a lo largo del texto. El Capítulo 2 es una de las partes centrales del curso, y tiene por objetivo estudiar las variedades algebraicas, así como sus propiedades geométricas y morfismos entre ellas. El Capítulo 3 busca introducir la teoría de fibrados vectoriales en geometría algebraica y la noción de divisores, que es la herramienta principal para la clasificación de variedades. Finalmente, los Capítulos 4 y 5 están dedicados a la cohomología de haces coherentes y aplicaciones de esto último al estudio de curvas algebraicas.

Finalmente, quisiera agradecer a mis profesores, amigos y colegas que han influenciado de manera directa e indirecta la escritura y la intución geométrica que traté de plasmar en estas notas. No puedo dejar de mencionar los nombres de Víctor GONZÁLEZ-AGUILERA, Rubén HIDALGO, Maximiliano LEYTON-ÁLVAREZ, Álvaro LIENDO y Giancarlo URZÚA, de quienes continuo aprendiendo hasta el día de hoy.

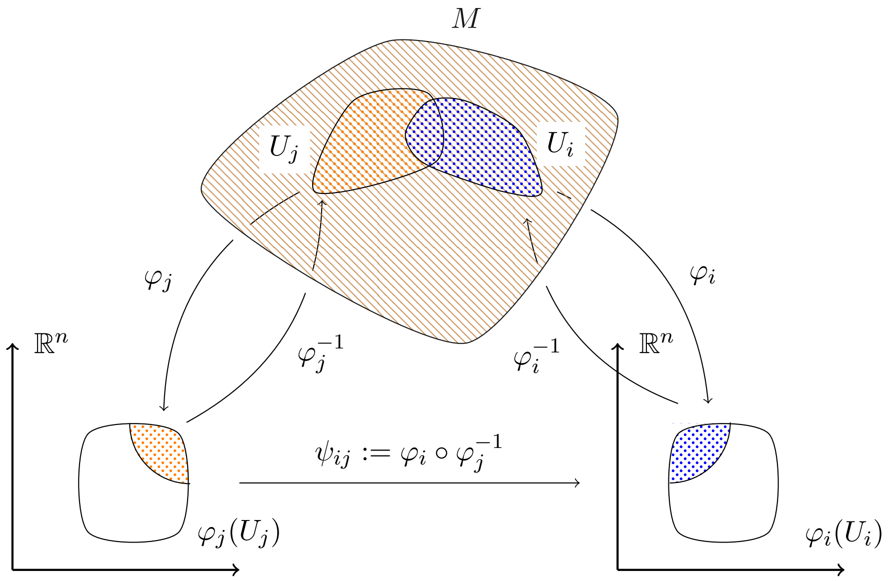
Agradezco de antemano por cualquier tipo de comentario, sugerencia o corrección, para lo cual pueden comunicarse directamente conmigo al correo electrónico `pedro.montero@usm.cl`.

Pedro MONTERO
Departamento de Matemática
Universidad Técnica Federico Santa María
Valparaíso, 2021

CAPÍTULO 1

TEORÍA DE CATEGORÍAS Y HACES

En geometría diferencial, una variedad diferenciable M está dada por *cartas locales* definidas por homeomorfismos $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i := \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$, las cuales se "pegan" en las posibles intersecciones $U_i \cap U_j$ mediante *cambios de carta* dados por funciones $\psi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ que son de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$.



Además, una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ es una función tal que para toda carta local $U_i \subseteq M$ la restricción $f_i := f|_{U_i} : U_i \to \mathbb{R}$ verifica que

$$F_i := f_i \circ \varphi_i^{-1} : V_i \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto F_i(x_1, \ldots, x_n)$$

es una función de clase $\mathscr{C}^\infty$ (en el sentido usual). Por ejemplo, si para todo punto $p \in U_i$ escribimos

$$\varphi_i(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \in \mathbb{R}^n,$$

entonces para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ la *función coordenada* $x_j : U_i \longrightarrow \mathbb{R},\ p \mapsto x_j(p)$ es una función diferenciable. En particular, si conocemos **todas** las posibles funciones diferenciables en una variedad M, entonces podemos conocer dicha variedad al determinar las funciones coordenada en cada carta.

Más formalmente, hay dos formas equivalentes de definir una variedad diferenciable M:

(1) A partir de un **atlas**: definimos M como un espacio topológico junto con un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ (i.e. $M = \bigcup_{i\in I} U_i$) tal que para todo $i \in I$ existe un homeomorfismo

$$\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i \subseteq \mathbb{R}^n,$$

donde V_i es un abierto de $\mathbb{R}^n$, y donde para todo par de índices $i, j \in I$ tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ existen difeomorfismos

$$\begin{tikzcd} \underbrace{\varphi_j(U_i \cap U_j)}_{\subseteq V_j \subseteq \mathbb{R}^n} \arrow[r, "\sim", "\varphi_j^{-1}"'] \arrow[rr, bend right, "\psi_{ij}"'] & U_i \cap U_j & \underbrace{\varphi_i(U_i \cap U_j)}_{\subseteq V_i \subseteq \mathbb{R}^n} \arrow[l, "\sim"', "\varphi_i^{-1}"] \end{tikzcd}$$

con inversa dada por $\psi_{ij}^{-1} = \psi_{ji}$.

(2) A partir de un **haz** de funciones diferenciables: definimos M como un espacio topológico junto con un *haz* $\mathscr{F} := \mathscr{C}_M^\infty$ tal que para todo abierto $U \subseteq M$ dicho haz asocia una $\mathbb{R}$-álgebra de "*funciones regulares*"

$$\mathscr{C}_M^\infty(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}\},$$

y tal que para todo punto $p \in M$ existe una vecindad abierto $U_p \subseteq M$ de p y un abierto $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que

$$\mathscr{C}_M^\infty(U_p) \cong \mathscr{C}^\infty(V_p) \overset{\mathsf{def}}{=} \{F : V_p \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función diferenciable}\}$$

son isomorfas como $\mathbb{R}$-álgebras.

La ventaja del segundo punto de vista, menos tradicional que el primero, es que se adapta perfectamente a otras situaciones. Notablemente, podremos reemplazar $\mathbb{R}$ por otros cuerpos. Para formalizar este punto de vista, necesitaremos introducir el lenguaje de categorías y haces.

1.1. Categorías y functores

La siguiente definición nos acompañará por el resto del curso.

Definición 1.1.1. — Una **categoría** $\mathscr{C}$ consiste en:

(1) Una colección de **objetos**, denotada $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.
(2) Para todo par de objetos A, B en $\mathscr{C}$, un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ (o símplemente $\mathrm{Hom}(A, B)$ si $\mathscr{C}$ es clara en el contexto) cuyos elementos $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ son llamados **morfismos**, y que cumplen:
   (a) Podemos componerlos, i.e., existe una función
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C)\\ (f, g) &\longmapsto g \circ f\end{aligned}$$
   (b) La composición es asociativa, i.e., $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.
   (c) Para todo objeto A, existe un (único) morfismo $\mathrm{Id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ tal que $\mathrm{Id}_A \circ f = f$ y $g \circ \mathrm{Id}_A = g$ para todos f, g.

Notación 1.1.2. — A pesar de que los $\mathrm{Hom}(A, B)$ son conjuntos arbitrarios (¡y sus elementos no son necesariamente funciones!), es común denotar $\varphi : A \to B$ cuando $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Además, en ocasiones se utiliza como (abuso de) notación "$A \in \mathscr{C}$" o "$A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$" para referirse a que A es un objeto de la categoría $\mathscr{C}$.

Terminología 1.1.3. — Un **isomorfismo** entre dos objetos A, B en $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es un morfismo $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ tal que existe un (único) morfismo $g \in \mathrm{Hom}(B, A)$ que cumple
$$f \circ g = \mathrm{Id}_B \ \text{ y } \ g \circ f = \mathrm{Id}_A\,.$$
En tal caso, diremos que A y B son **isomorfos**, y escribiremos $A \cong B$. En particular, un **automorfismo** de A es un isomorfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, A)$.

Ejemplo 1.1.4. — A continuación listamos algunas de las categorías más comunes, cuya notación puede variar en la literatura:

(1) **Conj**, la categoría de conjuntos.
(2) **Anillos**, la categoría de anillos.
(3) **An**, la categoría de anillos conmutativos con unidad.
(4) **Grp**, la categoría de grupos.
(5) **Ab**, la categoría de grupos abelianos.
(6) $\mathbf{Vec}_k$, la categoría de k-espacios vectoriales.
(7) A-**Mod**, la categoría de A-módulos.
(8) **Top**, la categoría de espacios topológicos.

(9) **Man**$^\infty$, la categoría de variedades diferenciables (de clase $\mathscr{C}^\infty$).

Cada una con sus morfismos respectivos (que dejamos como ejercicio describir).

¡Atención! — La categoría A-**Mod** tiene la propiedad adicional que cada $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ es un grupo abeliano. Más adelante, diremos que A-**Mod** es una *categoría abeliana*. Notar además que si $A = k$ entonces k-**Mod** $=$ **Vec**$_k$, y si $A = \mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z}$-**Mod** $=$ **Ab**.

Veamos a continuación algunos ejemplos más exóticos, que aparecen en la naturaleza.

Ejemplo 1.1.5. — Sea $\mathscr{C}$ una categoría.

(1) Si $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es un objeto. La **categoría fibrada**, definida por Grothendieck en 1959 y denotada $\mathscr{C}_A$, está dada por:
   (a) Objetos: Pares (B,φ), donde $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}(B,A)$.
   (b) Morfismos: Diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & C \arrow[dl, "\psi"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

   i.e., $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_A}((B,\varphi),(C,\psi)) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C) \text{ tal que } \varphi = \psi \circ f\}$.
   En particular, la composición $g \circ f$ está dada por

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[rrrr, bend left] & & C \arrow[dl, "\psi"] \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\psi"'] & & D \arrow[dl, "\theta"] \\ & A & & A & \end{tikzcd}$$

   donde $\varphi = \theta \circ (g \circ f)$ puesto que $\theta \circ g = \psi$ y $\varphi = \psi \circ f$.

(2) La **categoría opuesta** $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, está dada por:
   (a) Objetos: $\mathrm{Obj}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, i.e., posee los mismos objetos que la categoría original.
   (b) Morfismos: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,A)$, i.e., se "dan vuelta" todas las flechas de los morfismos de $\mathscr{C}$.

El siguiente ejemplo será muy importante al momento de discutir de haces.

Ejemplo importante 1.1.6. — Sea X un espacio topológico. Definimos la categoría $\mathbf{Top}(X)$ como la categoría cuyos objetos son los abiertos de X, y cuyos morfismos son:

$$\mathrm{Hom}(U,V) = \begin{cases} \{\iota : U \hookrightarrow V\} & \text{si } U \subseteq V \\ \emptyset & \text{si } U \not\subseteq V \end{cases}$$

i.e., es un conjunto cuyo único elemento es la función inclusión si $U \subseteq V$, o bien el conjunto vacío en caso contrario.

Ejercicio 1.1.7. — Describir geométricamente la composición de morfismos en la categoría $\mathbf{Top}(X)$.

Tal como consideramos morfismos entre objetos, podemos considerar "*functores*" entre categorías.

Definición 1.1.8. — Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Un **functor covariante** $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ consiste en una aplicación que:

(1) Asigna a cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ un objeto $F(A) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$.
(2) Asigna a cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{C}$ un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathscr{D}$, i.e., existe una función $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),F(B))$ para todos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, y además son compatibles con la composición y la identidad:
   (a) Para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, se cumple $F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}$.
   (b) Para cada $f : A \to B$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ y cada $g : B \to C$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)$ se tiene que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

En particular, los functores preservan isomorfismos: si $A \cong B$ en $\mathscr{C}$, entonces $F(A) \cong F(B)$ en $\mathscr{D}$.

Observación 1.1.9. — Para definir un **functor contravariante** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ se requiere la misma información, excepto que en (2) intercambiamos la dirección de las flechas:

> Si $f : A \to B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$, entonces $F(f) : F(B) \to F(A)$ es el morfismo asociado en $\mathscr{D}$. Además, $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ en este caso.

Notar que un functor contravariante $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es lo mismo que un functor *covariante* $F^{\mathrm{op}} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$ desde la categoría opuesta $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

Veamos algunos de los ejemplos típicos que aparecen en cursos de álgebra.

Ejemplo 1.1.10. —

(1) Los **functores de olvido** sirven para "olvidar" estructuras adicionales. Por ejemplo, el functor de olvido $\mathbf{An} \to \mathbf{Conj}$ asocia al anillo $(A, +, \cdot)$ el conjunto A subyacente, y asocia al morfismo de anillos $f : A \to B$ la función f entre los conjuntos subyacentes. Otros ejemplos del mismo estilo son $\mathbf{Vec}_k \to \mathbf{Conj}$, A-$\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, $\mathbf{Man}^\infty \to \mathbf{Top}$, etc.

(2) Sea $A \in \mathbf{An}$ un anillo abeliano con unidad, y sea B una A-álgebra. Entonces

$$F : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow B\text{-}\mathbf{Mod},\ M \longmapsto M \otimes_A B$$

es un functor covariante, llamado el functor de **extensión de escalares**.

(3) Sea A un anillo abeliano con unidad, y sea P un A-módulo. Entonces el functor

(a) $F : A$-$\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(M, P)$ es contravariante y se denota $\mathrm{Hom}_A(\cdot, P)$, el morfismo $F(f) \overset{\mathsf{def}}{=} f^*$ es llamado el **pullback** de f. Así, si M, N son A-módulos y $f : M \to N$ morfismo de A-módulos, entonces

$$f^* : \mathrm{Hom}_A(N, P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, P),\ \varphi \mapsto f^*(\varphi) \overset{\mathsf{def}}{=} \varphi \circ f.$$

es el pullback de f.

(b) $F : A$-$\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$, $M \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, M)$ es covariante y se denota $\mathrm{Hom}_A(P, \cdot\,)$, el morfismo $F(f) \overset{\mathsf{def}}{=} f_*$ es llamado el **pushforward** de f. Así, si M, N son A-módulos y $f : M \to N$ morfismo de A-módulos, entonces

$$f_* : \mathrm{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(P, N),\ \varphi \mapsto f_*(\varphi) \overset{\mathsf{def}}{=} f \circ \varphi.$$

es el pushforward de f.

(4) Sea A un objeto de $\mathscr{C}$. Definimos el **functor de puntos** (o **functor de Yoneda**) $h^A : \mathscr{C} \to \mathbf{Conj}$ mediante

$$h^A(B) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A) \text{ para todo } B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}),$$

y para un morfismo $f : B \to C$ en $\mathscr{C}$, definimos

$$h^A(f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A),\ \{g : C \to A\} \longmapsto \{g \circ f : B \to A\}$$

el morfismo asociado en $\mathbf{Conj}$.

(5) Sea $\mathscr{C}$ una categoría. El **functor identidad** $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ está definido mediante $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}(A) = A$ (resp. $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}(f) = f$) para todo objeto A (resp. todo morfismo f) en $\mathscr{C}$.

1.2. Transformaciones naturales y functores adjuntos

Para poder definir cuándo dos categoría son "isomorfas", se requiere la noción de *transformación natural*.

Definición 1.2.1. — Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos functores covariantes. Una **transformación natural** $\varphi : F \to G$ entre los functores F y G consiste en una colección de aplicaciones $\varphi_A : F(A) \to G(A)$, una para cada objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, y que son compatibles con los morfismos entre ellos:

Para todo $f : A \to B$ morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & F(B) \arrow[d, "\varphi_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativo (i.e. $\varphi_B \circ F(f) = G(f) \circ \varphi_A$).

En particular, si cada $\varphi_A : F(A) \xrightarrow{\sim} G(A)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$ entonces decimos que $\varphi : F \xrightarrow{\sim} G$ es un **isomorfismo natural** entre F y G.

Observación 1.2.2 **(composición de functores)**

Notar que si $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ son tres categorías, y si $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ son functores covariantes, entonces podemos definir el functor

$$G \circ F : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$$

mediante $(G \circ F)(A) := G(F(A))$ para todo objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$, y para $f : A_1 \to A_2$ morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_1, A_2)$ se define

$$(G \circ F)(f) := G(F(f)) : G(F(A_1)) \to G(F(A_2)).$$

Tal como se mencionó previamente, las transformaciones naturales permites formalizar la intuición detrás de la frase "las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son esencialmente las mismas".

Definición 1.2.3. — Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Decimos que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son **equivalentes** si existen functores covariantes $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tales que $F \circ G$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ y $G \circ F$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ (i.e., existen $G \circ F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ y $F \circ G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ isomorfismos naturales). En este caso, decimos que F y G definen una **equivalencia de categorías**.

Ejemplo 1.2.4. — Sea k un cuerpo y consideremos las categorías $\mathscr{V}_k$ y $\mathbf{Vec}_k^{\mathrm{fin}}$ dadas por:

(1) La categoría $\mathscr{V}_k$ cuyos objetos son los k-espacios vectoriales $\{k^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y cuyos morfismos son $\mathrm{Hom}(k^n, k^m) := M_{m\times n}(k)$ matrices (respecto a las bases canónicas).

(2) La categoría $\mathbf{Vec}_k^{\mathrm{fin}}$ cuyos objetos son k-espacios vectoriales de dimensión finita, y cuyos morfismos son $\mathrm{Hom}(V, W) := \{f : V \to W \text{ lineal}\}$.

Luego, hay un functor $F : \mathscr{V}_k \to \mathbf{Vec}_k^{\mathrm{fin}}$ que asocia $F(k^n) = k^n$ y para toda matriz $A \in M_{m\times n}$ asociamos $F(A) = f_A$, donde $f_A : k^n \to k^m$, $v \mapsto Av$ es la aplicación lineal asociada a A.

Por otro lado, si consideramos el functor "elegir una base"

$$G : \mathbf{Vec}_k^{\mathrm{fin}} \to \mathscr{V}_k$$

que envía V en $(V, \mathscr{B}_V) \cong k^{\dim_k(V)}$ y $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ en $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_V,\mathscr{B}_W}(f)$ (y donde para $V = k^n$ escogemos la base canónica $\mathscr{B}_{k^n} = (e_1, \ldots, e_n)$), entonces tenemos que

$$F \circ G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathbf{Vec}_k^{\mathrm{fin}}} \quad \text{y} \quad G \circ F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}_{\mathscr{V}_k} .$$

Luego, F (y G) define una equivalencia entre las categorías $\mathscr{V}_k$ y $\mathbf{Vec}_k^{\mathrm{fin}}$.

Observación 1.2.5. — Más adelante, veremos que hay una equivalencia entre las categorías de "variedades algebraicas afines sobre k" y de "k-álgebras (abelianas) finitamente generadas y reducidas (i.e. sin nilpotentes no-nulos)". Esto generaliza al contexto algebraico la equivalencia entre las dos formas posibles de definir una variedad diferenciable presentada al comienzo del Capítulo.

Recuerdo 1.2.6. — Recordemos que si $u : H \to H$ es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H, entonces el Teorema de representación de Riesz implica que existe un único $u^* : H \to H$ lineal acotado tal que

$$\langle u(f), g\rangle = \langle f, u^*(g)\rangle$$

para todos $f, g \in H$. Además, decimos que u^* es el **adjunto** de u.

Esta noción de Análisis Funcional se generaliza naturalmente al contexto de categorías.

Definición 1.2.7. — Sean $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos functores covariantes. Decimos que (F, G) es un par de **functores adjuntos** si para todos $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ y $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ hay una *biyección natural*

$$\tau_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, G(B)).$$

Aquí, *biyección natural* significa que si $f : A_2 \to A_1$ y $g : B_1 \to B_2$ son morfismos en $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, respectivamente, entonces:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A_1), B_1) \arrow[r, "\sim", "\tau_{A_1 B_1}"'] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_1, G(B_1)) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A_2), B_2) \arrow[r, "\sim", "\tau_{A_2 B_2}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_2, G(B_2)) \end{tikzcd}$$

es conmutativo[(1)]. En este caso, decimos que F es el **adjunto izquierdo** de G, y que G es el **adjunto derecho** de F. Escribimos $F \dashv G$ en este caso.

Ejemplo importante 1.2.8. — Sea A un anillo abeliano con unidad, y sean M, N, P tres A-módulos. Recordemos que

$$\mathrm{Bil}_A(M \times N, P) \overset{\mathsf{def}}{=} \{B : M \times N \to P \text{ aplicación } A\text{-bilineal}\}.$$

Por un lado, la *propiedad universal* del producto tensorial $\otimes_A$ nos dice que

$$\mathrm{Bil}_A(M \times N, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$$

como A-módulos. Por otro lado, fijando la primera variable de la aplicación bilineal $B : M \times N \to P$ obtenemos una aplicación A-lineal $\widehat{B} : M \to \mathrm{Hom}_A(N, P)$, $m \mapsto B(m, \cdot\,)$ y por ende un isomorfismo

$$\mathrm{Bil}_A(M \times N, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$$

de A-módulos. Luego, para todos M, N, P obtenemos un isomorfismo

$$(\star) \qquad \mathrm{Hom}_A(\underbrace{M \otimes_A N}_{:=F(M)}, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \underbrace{\mathrm{Hom}_A(N, P)}_{:=G(P)})$$

Con un poco de paciencia y dedicación, se verifica que el isomorfismo $(\star)$ es *functorial*, y así los functores

$$\begin{aligned} F : A\text{-}\mathbf{Mod} &\longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod} \\ M &\longmapsto M \otimes_A N \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} G : A\text{-}\mathbf{Mod} &\longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod} \\ P &\longmapsto \mathrm{Hom}_A(N, P) \end{aligned}$$

son adjuntos para todo N *fijo*, i.e., $F = (\,\cdot\,) \otimes_A N$ y $G = \mathrm{Hom}_A(N, \,\cdot\,)$ son functores adjuntos. Este ejemplo nos acompañará el resto de nuestras vidas.

---

(1) Aquí, la flecha vertical izquierda se obtiene mediante $F(f) : F(A_2) \to F(A_1)$ al considerar un morfismo $h : F(A_1) \to B_1$ y asociarle $g \circ h \circ F(f) : F(A_2) \to B_2$. La flecha vertical derecha es similar.

¡Atención! — Un caso particular importante del Ejemplo anterior es el caso cuando $A = k$ es un cuerpo, y donde U, V, W son k-espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces(2), $\mathrm{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes_k W$. Luego,

$$\mathrm{Hom}_k(U \otimes_k V, W) \cong \mathrm{Hom}_k(U, V^* \otimes_k W).$$

⚠ Dado que en geometría la notación $(\cdot)^*$ se utiliza usualmente para denotar al **pullback**, es que el espacio dual de un k-espacio vectorial será denotado $V^\vee$ (en lugar de V^*). En particular, el isomorfismo anterior se reescribe como:

$$\mathrm{Hom}_k(U \otimes_k V, W) \cong \mathrm{Hom}_k(U, V^\vee \otimes_k W).$$

1.3. Prehaces y haces

Existen varias propiedades de las funciones que son de caracter *local*. Por ejemplo, si $U \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto no-vacío y $g : U \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in U$, es natural preguntarse:

¿Existe $f : U \to \mathbb{C}$ función holomorfa tal que $g = e^f$?

En general, la respuesta *depende* del abierto U. Por ejemplo,

(a) Si $U = \mathbb{C}$ la respuesta es **sí**: basta considerar la función holomorfa
$$f(z) := \int_1^z \frac{g'(s)}{g(s)}\, \mathrm{d}s.$$

(b) Si $U = \mathbb{C}^*$ la respuesta es **no**: basta considerar $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^*}$ y notar que la existencia de f implicaría que podríamos encontrar un logaritmo complejo definido en $\mathbb{C}^*$ (lo cual es imposible(3)).

Por otro lado, *localmente* la respuesta es simpre afirmativa: basta tomar cualquier logaritmo en un pequeño disco $D(z_0, \varepsilon) \subseteq U$ y considerar $f := \log(g)$ en $D(z_0, \varepsilon)$.

La noción de haz, introducida por Jean Leray en 1945, fue creada para tomar en cuenta estas propiedades locales, y obtener a partir de ellas enunciados globales.

(2) Explícitamente, el isomorfismo $V^* \otimes_k W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(V, W)$ envía el tensor simple $\varphi \otimes w$ en la aplicación lineal $v \mapsto \varphi(v)w$. Se tiene que dicha aplicación anterior siempre es inyectiva, y al estar definida entre dos espacios vectoriales de dimensión finita y de la misma dimensión, deducimos que es un isomorfismo.

(3) Tendríamos una anti-derivada holomorfa para la función $h(z) = \frac{1}{z}$ en $\mathbb{C}^*$ y esto implicaría que $\int_\gamma h(s)\, \mathrm{d}s = 0$, donde γ es cualquier círculo entorno al origen del plano complejo. Por otra parte, un cálculo estándar de análisis complejo nos señala que $\int_\gamma h(s)\, \mathrm{d}s = 2\pi i$.

Durante toda esta sección, (X, τ) será un espacio topológico[4] (no-vacio) que denotaremos símplemente por X.

Recuerdo 1.3.1. — Un sub-conjunto de abiertos $\mathscr{B} \subseteq \tau$ es una **base** si:

(1) Los elementos de $\mathscr{B}$ cubren X, i.e., $X = \bigcup\limits_{U \in \mathscr{B}} U$.

(2) Para cada intersección no-vacía $U \cap V$ con $U, V \in \mathscr{B}$, se tiene que:

$$\text{Para todo } x \in U \cap V, \text{ existe } W \in \mathscr{B} \text{ tal que } x \in W \subseteq U \cap V.$$

Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$ (o más generalmente, cualquier espacio métrico) con la topología euclideana, entonces $\mathscr{B} = \{\text{bolas abiertas}\}$ es una base.

Recíprocamente, si X es un conjunto no-vacío entonces podemos definir una topología en X declarando una base $\mathscr{B}$. Explícitamente, si $\mathscr{B}$ es una familia de sub-conjuntos de X tales que:

(A1) Para todo $x \in X$, existe $U \in \mathscr{B}$ tal que $x \in U$.

(A2) Para toda intersección no-vacía $U \cap V \neq \emptyset$, con $U, V \in \mathscr{B}$ se tiene que:

$$\text{Para todo } x \in U \cap V, \text{ existe } W \in \mathscr{B} \text{ tal que } x \in W \subseteq U \cap V.$$

Entonces, definimos la topología *generada* por $\mathscr{B}$ como la topología de X cuyos abiertos están dados por todas las posibles uniones (arbitrarias) de elementos de $\mathscr{B}$. Por ejemplo, si X es un conjunto no-vacío y

$$\mathscr{B} := \{\text{complementos de conjuntos finitos}\},$$

entonces $\mathscr{B}$ satisface los axiomas (A1) y (A2) anteriores, y por ende define una topología en X. En particular, si X es un conjunto *infinito* entonces la topología definida por $\mathscr{B}$ **no** es Hausdorff[5].

Pasemos ahora a dar las primeras definiciones que nos llevarán a desarrollar el concepto de *haz* (también conocido como *gavilla* en algunos países hispanohablantes, como *sheaf* en inglés, y como *faisceau* en francés). Debido al nombre original en francés, es que usualmente se utiliza la letra $\mathscr{F}$.

Definición 1.3.2. — Un **prehaz** $\mathscr{F}$ en un espacio topológico X consiste en:

(1) Para todo abierto $U \subseteq X$, un conjunto $\mathscr{F}(U)$.

---

[4] i.e., $\tau = \{U_i\}_{i \in I}$ es una familia de sub-conjuntos de X verificando que (1) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$; (2) Para cada $J \subseteq I$ la *unión arbitraria* $\bigcup_{j \in J} U_j \in \tau$; (3) Para $U, V \in \tau$ la *intersección finita* $U \cap V \in \tau$.

[5] Recordemos que (X, τ) es un **espacio topológico de Hausdorff** si para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos $x \in U$ e $y \in V$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

(2) Para cada inclusión de abiertos $U \hookrightarrow V$, una *aplicación de restricción*

$$\begin{aligned} r_{V,U} : \mathscr{F}(V) &\longrightarrow \mathscr{F}(U) \\ s &\longmapsto r_{V,U}(s) \overset{\text{def}}{=} s|_U \end{aligned}$$

verificando que

(a) Si $U \hookrightarrow V \hookrightarrow W$ son inclusiones de tres abiertos en X, entonces las restricciones

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(W) \arrow[r, "r_{W,V}"'] \arrow[rr, bend left, "r_{W,U}"] & \mathscr{F}(V) \arrow[r, "r_{V,U}"'] & \mathscr{F}(U) \end{tikzcd}$$

conmutan, i.e., $r_{W,U} = r_{V,U} \circ r_{W,V}$.

(b) Para todo abierto $U \subseteq X$, se tiene que $r_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(U)}$.

Terminología 1.3.3. — Los elementos $s \in \mathscr{F}(U)$ son llamados **secciones** de $\mathscr{F}$ sobre U. Es muy importante señalar que, por motivos que discutiremos más adelante, en la práctica se utilizan *tres* notaciones para denotar el conjunto de todas las secciones de $\mathscr{F}$ sobre U:

$$\mathscr{F}(U) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(U, \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^0(U, \mathscr{F}).$$

Además, por convención, cuando hablemos de "secciones de $\mathscr{F}$" nos referiremos implícitamente al caso $U = X$, i.e., elementos de $\Gamma(X, \mathscr{F})$. Los elementos de $\Gamma(X, \mathscr{F})$ son llamados **secciones globales** de $\mathscr{F}$.

Ejercicio 1.3.4. — Recordemos (ver Ejemplo 1.1.6) que $\mathbf{Top}(X)$ es la categoría cuyos objetos son los abiertos de X y cuyos morfismos son inclusiones. Probar que un prehaz es equivalente a un functor contravariante

$$\mathscr{F} : \mathbf{Top}(X) \to \mathbf{Conj}.$$

Observación 1.3.5. — La reinterpretación del concepto de prehaz presentada en el Ejercicio 1.3.4 es útil e interesante desde un punto de vista matemático, puesto que puede generalizarse al reemplazar la categoría $\mathbf{Top}(X)$ por otras categorías $\mathscr{C}$ más generales. Esto último es la idea crucial detrás del concepto de *topología de Grothendieck*, algo que se escapa de los objetivos de este curso.

Veamos algunos ejemplos concretos de prehaces.

Ejemplo 1.3.6. —

(1) Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y $\mathscr{F} = \mathscr{C}^\infty$ el prehaz de funciones diferenciables, donde

$$\mathscr{C}^\infty(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función diferenciable}\}$$

es una $\mathbb{R}$-álgebra. Aquí, la restricción $\mathscr{C}^\infty(V) \to \mathscr{C}^\infty(U)$, $f \mapsto f|_U$ es la restricción usual de funciones.

(2) Sea S un conjunto fijo. El **prehaz constante** $\mathscr{F} := S$ está dado por $S(U) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}(U) := S$ para todo abierto $U \subseteq X$, y donde las restricciones están dadas por Id_S.

(3) Sea S un conjunto fijo. Para todo abierto $U \subseteq X$, decimos que una función $f : U \to S$ es *localmente constante* si para cada punto $x \in U$ existe una vecindad abierta V_x tal que $x \in V_x \subseteq U$ y tal que $f|_{V_x}$ es una función constante[6]. El **prehaz de funciones localmente constantes** $\mathscr{F} := \underline{S}$ está dado por

$$\underline{S}(U) := \{f : U \to S \text{ función localmente constante}\},$$

donde las restricciones son las restricciones usuales de funciones.

(4) Sea S un conjunto fijo y $\{*\}$ un singleton (i.e., conjunto de un elemento) fijo, y sea $x_0 \in X$ un punto. El **prehaz rascacielo** asociado, denotado $\iota_{x_0}(S)$ o bien $\iota_{x_0,*}(S)$, está definido por

$$(\iota_{x_0}(S))(U) := \begin{cases} \{*\} & \text{si } x_0 \notin U \\ S & \text{si } x_0 \in U \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio al lector el describir explícitamente las aplicaciones de restricción.

Indicación: Notar que existe una única función $S \to \{*\}$. En jerga de categorías, decimos que $\{*\}$ es un objeto terminal *de la categoría* **Conj**.

¡Atención! — La mayoría del tiempo consideraremos prehaces $\mathscr{F}$ tales que $\mathscr{F}(U)$ posee una estructura adicional, y los morfismos de restricción preservan dicha estructura. Por ejemplo, un **prehaz de grupos** es un prehaz $\mathscr{F}$ tal que $\mathscr{F}(U)$ es un grupo para todo abierto $U \subseteq X$, las restricciones

$$r_{V,U} : \mathscr{F}(V) \longrightarrow \mathscr{F}(U)$$

son morfismos de grupos, y donde *adicionalmente* se impone que $\mathscr{F}(\emptyset) = \{0\}$ sea el grupo trivial. De manera completamente análoga, podemos definir la

[6] e.g. En $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la función $\mathrm{sgn}(x) := \frac{x}{|x|}$ es localmente constante, pero no constante.

noción de prehaz en grupos abelianos, en k-espacios vectoriales, en k-álgebras, etc. En términos categóricos, consideramos functores contravariantes

$$\mathscr{F} : \mathbf{Top}(X) \longrightarrow \mathscr{C},$$

donde $\mathscr{C}$ es una categoría cuyos objetos son conjuntos que poseen estructuras algebraicas adicionales.

Definición 1.3.7. — Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos prehaces en X con valores en la misma categoría $\mathscr{C}$[7]. Un **morfismo de prehaces** $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ consiste en:

(1) Para todo abierto $U \subseteq X$, un morfismo $\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ en $\mathscr{C}$.
(2) Para cada inclusión de abiertos $U \hookrightarrow V$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] \arrow[d, "r_{V,U}"'] & \mathscr{G}(V) \arrow[d, "r_{V,U}"'] \\ \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] & \mathscr{G}(U) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, i.e., $\varphi_V(s)|_U = \varphi_U(s|_U)$ para toda $s \in \mathscr{F}(V)$.

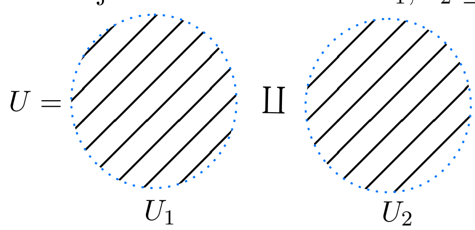
Ejercicio 1.3.8. — Probar que un morfismo de prehaces es equivalente a una transformación natural $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ entre los functores contravariantes $\mathscr{F} : \mathbf{Top}(X) \to \mathscr{C}$ y $\mathscr{G} : \mathbf{Top}(X) \to \mathscr{C}$.

Ejemplo 1.3.9. — Sea G un grupo abeliano, y sea G (resp. $\underline{G}$) el prehaz de funciones constantes (resp. localmente constantes) en X con valores en G. Entonces, hay un morfismo de prehaces

$$\varphi : G \longrightarrow \underline{G},$$

donde para cada abierto $U \subseteq X$, el morfismo de grupos $\varphi_U : G(U) \longrightarrow \underline{G}(U)$ envía el elemento $g \in G(U) \stackrel{\text{def}}{=} G$ en la función (globalmente) constante $f : U \to G,\ x \mapsto f(x) = g$.

Notar que φ_U **no** es necesariamente un isomorfismo de grupos. Por ejemplo, si $U = U_1 \amalg U_2$ es unión disjunta de dos abiertos $U_1, U_2 \subseteq X$.



[7] e.g. $\mathscr{C} = \mathbf{Conj}$ o $\mathscr{C} = \mathbf{Ab}$, etc.

Luego, si G es un grupo no-trivial (i.e. $|G| \geq 2$) y $g_1 \neq g_2$ son elementos de G, entonces la función

$$f(x) = \begin{cases} g_1 & \text{si } x \in U_1 \\ g_2 & \text{si } x \in U_2 \end{cases}$$

es localmente constante en U, pero **no** es constante en U.

Ejercicio 1.3.10. — Con la misma notación del Ejemplo 1.3.9, probar que φ_U es un isomorfismo de grupos si $U \subseteq X$ es conexo.

Definición 1.3.11. — Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos prehaces de grupos abelianos en X, y sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de prehaces. Definimos los prehaces

(1) $\ker\varphi$ mediante

$$(\ker\varphi)(U) := \ker\left[\varphi_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)\right].$$

(2) $\operatorname{Im}\varphi$ mediante

$$(\operatorname{Im}\varphi)(U) := \operatorname{Im}\left[\varphi_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)\right].$$

para todo abierto $U \subseteq X$.

Más aún, si $\mathscr{E}$ es un prehaz de grupos abelianos, decimos que $\mathscr{E}$ es un **sub-prehaz** de $\mathscr{F}$, en cuyo caso escribimos $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}$, si para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que $\mathscr{E}(U) \subseteq \mathscr{F}(U)$ es un sub-grupo abeliano, y además el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}(V) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r_{V,U}"'] & \mathscr{F}(V) \arrow[d, "r_{V,U}"] \\ \mathscr{E}(U) \arrow[r, hook] & \mathscr{F}(U) \end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo par de abiertos $U \subseteq V$ de X.

Para todo sub-prehaz $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}$ definimos el **prehaz cociente** mediante

$$(\mathscr{F}/\mathscr{E})(U) := \mathscr{F}(U)/\mathscr{E}(U)$$

para todo abierto $U \subseteq X$. En particular, $\ker\varphi \subseteq \mathscr{F}$ e $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \mathscr{G}$ son sub-prehaces, y definimos el prehaz cokernel mediante

$$(\operatorname{coker}\varphi)(U) := \mathscr{G}(U)/(\operatorname{Im}\varphi)(U)$$

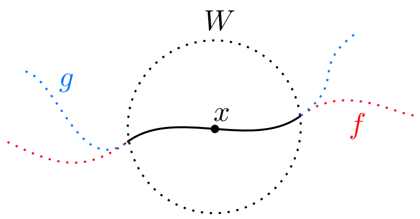
para todo abierto $U \subseteq X$.

Antes de definir el concepto de haz, recordemos la definición de *germen* de una función diferenciable en un punto.

Recuerdo 1.3.12. — Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y sea $\mathscr{F} = \mathscr{C}^\infty$ el prehaz de funciones diferenciables en X. Dado un punto $x \in X$, los **gérmenes** de funciones diferenciables en x son clases de equivalencia de pares de la forma

$$\{(f, U),\ \text{donde } x \in U \text{ abierto y } f \in \mathscr{C}^\infty(U)\},$$

donde $(f, U) \sim (g, V)$ si existe un abierto $W \subseteq U \cap V$ tal que $x \in W$ y $f|_W = g|_W$.



El conjunto de gérmenes de funciones diferenciables en $x \in X$ se llama el **tallo** de $\mathscr{C}^\infty$ en x, y se denota $\mathscr{C}^\infty_x$.

Ejercicio 1.3.13. — Verificar que $\mathscr{C}^\infty_x$ es un anillo y que

$$\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathscr{C}^\infty_x \text{ tal que } f(x) = 0\}$$

es un ideal de $\mathscr{C}^\infty_x$. Más aún, si consideramos el morfismo sobreyectivo de anillos

$$\mathrm{ev}_x : \mathscr{C}^\infty_x \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto f(x)$$

entonces $\mathfrak{m}_x = \ker(\mathrm{ev}_x)$ y luego $\mathfrak{m}_x$ es un ideal maximal. De hecho, es el *único* ideal maximal de $\mathscr{C}^\infty_x$ (pues todo germen en $\mathscr{C}^\infty_x \setminus \mathfrak{m}_x$ es invertible). En otras palabras, $\mathscr{C}^\infty_x$ es un *anillo local* (i.e., un anillo con un único ideal maximal).

Definición 1.3.14. — Sea $\mathscr{F}$ un prehaz en X. El **tallo**[8] de $\mathscr{F}$ en un punto $x \in X$ está dado por

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathscr{F}(U) \overset{\text{def}}{=} \left(\coprod_{\substack{U \subseteq X \text{ abierto} \\ \text{tal que } x \in U}} \mathscr{F}(U) \right) / \sim,$$

donde

> Para todas $s \in \mathscr{F}(U)$ y $t \in \mathscr{F}(V)$ se tiene que $(s, U) \sim (t, V)$ en $\mathscr{F}_x$ si existe $W \subseteq U \cap V$ abierto tal que $x \in W$ y tal que $s|_W = t|_W$ en $\mathscr{F}(W)$.

[8] En inglés, *stalk*.

Si U es una vecindad abierta del punto $x \in X$ y $s \in \mathscr{F}(U)$ es una sección de $\mathscr{F}$ sobre U, entonces denotamos por $s_x = [(s, U)]$ a la clase de s en el tallo $\mathscr{F}_x$ y la llamamos el **germen** de la sección s en el punto $x \in X$.

Finalmente, estamos listos para definir qué es un *haz*. Intuitivamente, es un prehaz donde exigimos que secciones locales s_i en abiertos U_i que cubren un abierto U dado, y que coinciden en las intersecciones $U_i \cap U_j$, puedan pegarse de manera única en una sección s sobre el abierto U.

Definición 1.3.15. — Sea $\mathscr{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Decimos que $\mathscr{F}$ es un **haz** si se cumplen las siguientes condiciones para todo abierto $U \subseteq X$:

(1) **Pegado.** Si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un cubrimiento abierto, y si $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ son secciones tales que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos $i, j \in I$. Entonces, existe una sección $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$.
(2) **Unicidad.** Si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un cubrimiento abierto, y si $s \in \mathscr{F}(U)$ es una sección sobre U tal que $s|_{U_i} = 0$ en $\mathscr{F}(U_i)$ para todo $i \in I$. Entonces, $s = 0$ en $\mathscr{F}(U)$.

Ejercicio 1.3.16. — Escribir la condición de Unicidad (2) en el caso donde $\mathscr{F}$ es un prehaz con valores en una categoría arbitraria $\mathscr{C}$.

Ejemplo 1.3.17. —

(1) El prehaz $\mathscr{C}^\infty$ de funciones diferenciables es un haz.
(2) Sean X e Y espacios topológicos. El prehaz $\mathscr{C}(X;Y)$ en X que asocia a cada abierto $U \subseteq X$ el conjunto
$$\mathscr{C}(X;Y)(U) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{f : U \to Y \text{ función continua}\}$$
es un haz[9].
(3) Sea G un grupo abeliano. El prehaz constante G **no** es necesariamente un haz. En efecto, si $U = U_1 \amalg U_2$ es unión disjunta de dos abiertos no-vacíos, G es un grupo no-trivial, y si $g_i \in G(U_i) \stackrel{\mathsf{def}}{=} G$ son elementos diferentes con $i = 1, 2$. Entonces, **no** existe $g \in G(U) \stackrel{\mathsf{def}}{=} G$ tal que $g|_{U_1} = g_1$ y $g|_{U_2} = g_2$.
Por otra parte, si *todo* abierto no-vacío de X es conexo entonces G es un haz. Más adelante, veremos que esto ocurre en una *variedad algebraica irreducible.*

[9] Esto es consecuencia del "*pasting lemma*" en topología.

(4) Sea G un grupo abeliano. El prehaz $\underline{G}$ de funciones localmente constantes en X con valores en G, es un haz.

Ejercicio 1.3.18. — Sea G un grupo abeliano y $x_0 \in X$ un punto. Demostrar que el prehaz rascacielo $\iota_{x_0}(G)$ dado por

$$(\iota_{x_0}(S))(U) := \begin{cases} \{0\} & \text{si } x_0 \notin U \\ G & \text{si } x_0 \in U \end{cases}$$

es un haz.

¡Atención! — Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ haces de grupos abelianos en X. Por definición, un **morfismo de haces** $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es símplemente un morfismo entre los prehaces subyacentes.

Observación 1.3.19. — Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos. Entonces, el prehaz $\ker \varphi$ es siempre un haz.

En efecto, veamos las condiciones de *pegado* y *unicidad* simultaneamente:

Sea $U \subseteq X$ un abierto y $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ un cubrimiento abierto. Consideremos secciones $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tales que $s_i \in (\ker \varphi)(U_i)$ para todo $i \in I$, i.e., $\varphi_{U_i}(s_i) = 0$ en $\mathscr{G}(U_i)$. Si tenemos que

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \text{ en } \mathscr{F}(U_i \cap U_j) \text{ para todos } i, j \in I,$$

entonces el hecho que $\mathscr{F}$ es un *haz* implica que existe una única sección $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$. Más aún, tenemos que

$$\varphi_U(s)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(s_i) = 0 \text{ en } \mathscr{G}(U_i) \text{ para todo } i \in I.$$

Dado que $\mathscr{G}$ es un *haz*, tenemos que $\varphi_U(s) = 0$ y luego $s \in (\ker \varphi)(U)$.

Ejercicio 1.3.20. — El objetivo de este ejercicio es probar que el prehaz $\operatorname{Im} \varphi$ **no** necesariamente es un haz. Para esto, sea $X = \mathbb{C}$ (o una variedad compleja) y sea $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{O}_X^\times$) el haz de funciones holomorfas (resp. el haz de funciones holomorfas que no se anulan) con estructura de grupo dada por la adición (resp. multiplicación). Consideremos el morfismo exponencial

$$\exp : \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X^\times$$

dado por $\exp_U : \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X^\times(U),\ f \mapsto e^{2\pi i f}$. Probar que $\ker(\exp) = \underline{\mathbb{Z}}$, pero que el prehaz $\operatorname{Im}(\exp)$ **no** es un haz (la condición de pegado falla) y que el prehaz $\operatorname{coker}(\exp)$ tampoco es un haz.

El ejercicio anterior nos pone en una posición incomoda, puesto que nos gustaría poder definir un *haz imagen.* Es natural entonces preguntar, ¿cómo construir un haz a partir de un prehaz?

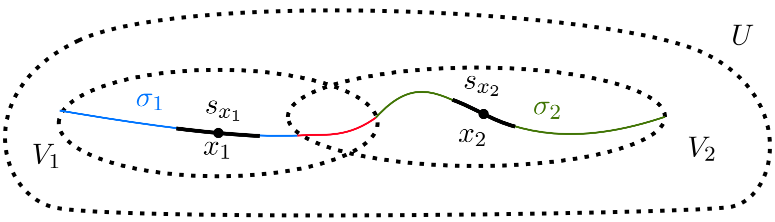
Definición 1.3.21. — Sea $\mathscr{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Definimos el prehaz $\mathscr{F}^+$ en X como el prehaz que asocia a cada abierto $U \subseteq X$ al grupo $\mathscr{F}^+(U)$ de "*gérmenes compatibles*" de $\mathscr{F}$ sobre U. Más formalmente,

$$\mathscr{F}^+(U) := \left\{ (s_x)_{x\in U} \in \prod_{x\in U} \mathscr{F}_x \text{ tal que } (\star) \right\},$$

donde la condición de compatibilidad $(\star)$ está dada por

> $(\star)$ Para todo $x \in U$, existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de x y una sección $\sigma \in \mathscr{F}(V)$ tal que los gérmenes $\sigma_y = s_y$ coinciden en $\mathscr{F}_y$ para todo $y \in V$.

En términos geométricos, tenemos que:



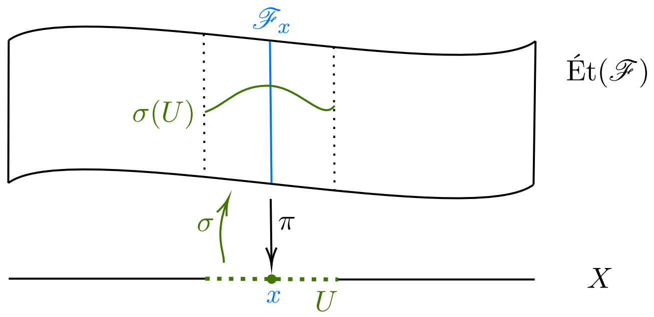
Más aún, para todo prehaz $\mathscr{F}$ hay un morfismo natural $j : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ que para todo abierto $U \subseteq X$ y toda sección $s \in \mathscr{F}(U)$ asocia $j_U(s) := (s_x)_{x\in U}$, el conjunto de gérmenes $s_x \in \mathscr{F}_x$ para todo $x \in U$.

Proposición 1.3.22. — *Sea $\mathscr{F}$ un prehaz de grupos abelianos en un espacio topológico X. Entonces, $\mathscr{F}^+$ es un haz en X.*

Demostración. — Definimos el *espacio étalé* de $\mathscr{F}$ como el conjunto

$$\text{Ét}(\mathscr{F}) := \coprod_{x\in X} \mathscr{F}_x,$$

que viene dotado de una proyección natural $\pi : \text{Ét}(\mathscr{F}) \to X$.



Una sección $s \in \mathscr{F}(U)$ define una función

$$\sigma : U \longrightarrow \text{Ét}(\mathscr{F}),\ x \longmapsto s_x \in \mathscr{F}_x$$

Además, los subconjuntos de Ét$(\mathscr{F})$ de la forma $\sigma(U)$ verifican los axiomas de una base de una topología, y por ende permiten ver a Ét$(\mathscr{F})$ como un espacio topológico.

Finalmente, notamos que el conjunto $\mathscr{F}^+(U)$ coincide exactamente con el conjunto de funciones $\sigma : U \to \text{Ét}(\mathscr{F})$ que son *continuas* respecto a la topología que acabamos de definir. En particular, $\mathscr{F}^+$ es un haz en X. $\square$

Lema 1.3.23. — *Sea $\mathscr{F}$ un* haz *de grupos abelianos en X. Entonces, para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que*

$$j_U : \mathscr{F}(U) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^+(U)$$

es un isomorfismo.

Demostración. — Para la inyectividad, consideramos una sección $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $j_U(s) \overset{\text{def}}{=} (s_x)_{x\in U} = 0$ en $\mathscr{F}^+(U)$. En particular, por definición del tallo $\mathscr{F}_x$, existe un cubrimiento abierto $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ tal que $s|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$. Dado que $\mathscr{F}$ es un haz, tenemos que esto implica que $s = 0$.

Para la sobreyectividad, consideramos $(s_x)_{x\in U} \in \mathscr{F}^+(U)$ gérmenes compatibles. La condición de compatibilidad $(\star)$ implica la existencia de un cubrimiento abierto $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ y de secciones $\sigma_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tales que $(\sigma_i)_x = s_x$ para todo $x \in U_i$. En particular, tenemos que $(\sigma_i)_x = (\sigma_j)_x$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Así, la inyectividad de j_U probada en el parrafo anterior implica que $\sigma_i|_{U_i\cap U_j} = \sigma_j|_{U_i\cap U_j}$ para todos $i, j \in I$. Dado que $\mathscr{F}$ es un haz, esto último implica que las secciones σ_i se pegan en una única sección $\sigma \in \mathscr{F}(U)$ que verifica $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ para todo $i \in I$. En particular, $\sigma_x = s_x$ para todo $x \in U$. $\square$

***Teorema 1.3.24* (propiedad universal). —** *Sea $\mathscr{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Entonces, el haz $\mathscr{F}^+$ junto con el morfismo canónico de prehaces $j : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ cumplen la propiedad universal siguiente:*

> *Para todo haz de grupos abelianos $\mathscr{G}$ en X y para todo morfismo de prehaces $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, existe un único morfismo de haces $\varphi^+ : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}$ tal que el diagrama*
>
> $$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \mathscr{G} \\ \mathscr{F}^+ \arrow[ur, "\exists!\ \varphi^+"'] & \end{tikzcd}$$
>
> *es conmutativo.*

En particular, el par $(\mathscr{F}^+, j)$ es único módulo un único isomorfismo. Diremos que $\mathscr{F}^+$ es el **haz asociado** *a $\mathscr{F}$ (o bien que es la* **hacificación** *de $\mathscr{F}$).*

Demostración. — Primero que todo, notamos que la construcción de $\mathscr{F}^+$ y de $j : \mathscr{F} \to \mathscr{F}^+$ es *functorial*, i.e., un morfismo de prehaces $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ induce un morfismo de haces $\varphi^+ : \mathscr{F}^+ \to \mathscr{G}^+$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \mathscr{G} \arrow[d, "j"] \\ \mathscr{F}^+ \arrow[r, "\varphi^+"] & \mathscr{G}^+ \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Luego, si $\mathscr{G}$ es un haz, entonces $j : \mathscr{G} \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}^+$ es un isomorfismo por el lema anterior, y así obtenemos el diagrama conmutativo deseado

$$(\dagger) \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \mathscr{G} \\ \mathscr{F}^+ \arrow[ur, "\varphi^+"'] & \end{tikzcd}$$

Para verificar la unicidad del morfismo φ^+, consideremos $\sigma = (s_x)_{x \in U}$ una sección de $\mathscr{F}^+(U)$, y sea $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ cubrimiento abierto junto con secciones $\sigma_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tales que $(\sigma_i)_x = s_x$ para todo $x \in U_i$. La conmutatividad de $(\dagger)$ implica que $\varphi_U^+(\sigma)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(\sigma_i)$. Finalmente, el hecho que $\mathscr{G}$ es un haz implica que $\varphi_{U_i}(\sigma_i)$ determina completamente $\varphi^+(\sigma)$ (pues determina $\varphi_U^+(\sigma)|_{U_i}$). $\square$

***Ejercicio 1.3.25.* —** Sea $\mathscr{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X. Probar que $\mathscr{F}_x = \mathscr{F}_x^+$ para todo $x \in X$.

Veamos algunos ejemplos típicos.

Ejemplo 1.3.26. —

(1) Sea G un grupo abeliano. El haz asociado al prehaz constante G es exactamente el haz $\underline{G}$ de funciones localmente constantes, i.e., $G^+ = \underline{G}$.

(2) Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X y sea $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}$ un sub-haz (i.e. un sub-prehaz que además es un haz). Definimos el **haz cociente** $\mathscr{F}/\mathscr{E}$ como el haz asociado al prehaz cociente $(\mathscr{F}/\mathscr{E})_{\text{pre}}$ que definimos anteriormente como

$$(\mathscr{F}/\mathscr{E})_{\text{pre}}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{F}(U)/\mathscr{E}(U) \text{ para todo abierto } U \subseteq X,$$

i.e., $(\mathscr{F}/\mathscr{E}) := (\mathscr{F}/\mathscr{E})^+_{\text{pre}}$.

(3) Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos, y sea $(\operatorname{coker}\varphi)_{\text{pre}}$ el prehaz cokernel que definimos anteriormente como

$$(\operatorname{coker}\varphi)_{\text{pre}}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{coker}(\varphi_U) \text{ para todo abierto } U \subseteq X.$$

Así, definimos el **haz cokernel** como el haz asociado al prehaz cokernel, i.e., $\operatorname{coker}\varphi = (\operatorname{coker}\varphi)^+_{\text{pre}}$.

Ejemplo importante 1.3.27. — Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos, y sea $(\operatorname{Im}\varphi)_{\text{pre}}$ el prehaz imagen que definimos anteriormente como

$$(\operatorname{Im}\varphi)_{\text{pre}}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im}(\varphi_U) \text{ para todo abierto } U \subseteq X.$$

Luego, definimos el **haz imagen** como el haz asociado al prehaz imagen, i.e., $\operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^+_{\text{pre}}$.

En términos prácticos, una sección $\sigma \in \mathscr{G}(U)$ pertenece a $(\operatorname{Im}\varphi)(U)$ si existe un cubrimiento abierto $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ y existen secciones $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ tales que $\varphi(s_i) = \sigma|_{U_i}$ para todo $i \in I$. En otras palabras, son las *secciones de $\mathscr{G}$ que provienen localmente de secciones de $\mathscr{F}$*.

Definición 1.3.28. — Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos en X. Decimos que φ es:

(a) **inyectivo** si $\ker(\varphi) = 0$, donde 0 denota el haz asociado al grupo trivial.

(b) **sobreyectivo** si $\operatorname{Im}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\operatorname{Im}\varphi)^+_{\text{pre}} = \mathscr{G}$.

(c) un **isomorfismo** de haces si es inyectivo y sobreyectivo.

La siguiente proposición es muy útil en la práctica, pues señala que para comprender morfismos de haces basta observar el morfismo inducido a nivel de tallos.

Proposición 1.3.29. — *Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos en X. Entonces, φ es un isomorfismo si y sólo si para todo $x \in X$ el morfismo inducido*

$$\varphi_x : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$$

es un isomorfismo.

Demostración. — Dado $x \in X$, el morfismo inducido a nivel de tallos

$$\varphi_x : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$$

se define considerando para todo germen $s_x \in \mathscr{F}_x$ un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y una sección $s \in \mathscr{F}(U)$ tal que $s_x = [(s, U)]$. Así, definimos $\varphi_x(s_x)$ como el germen de $\varphi(s) \in \mathscr{G}(U)$ en $\mathscr{G}_x$, i.e., $\varphi_x(s_x) := [(\varphi(s), U)]$. Luego, si φ es un isomorfismo entonces φ_x también lo es para todo $x \in X$.

Recíprocamente, si $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ es un isomorfismo de grupos abelianos para todo $x \in X$ entonces tenemos que φ es inyectivo, puesto que si $s \in \mathscr{F}(U)$ es una sección sobre un abierto $U \subseteq X$ y se verifica que $\varphi(s) = 0$ en $\mathscr{G}(U)$, entonces tenemos que $\varphi_x(s_x) = 0$ en $\mathscr{G}_x$ para todo $x \in U$. Dado que φ_x es inyectivo, tenemos que $s_x = 0$ para todo $x \in U$, de donde se deduce que $s = 0$ puesto que $\mathscr{F}$ es un haz. La sobreyectividad se deja como ejercicio al lector (cf. Ejemplo 1.3.27). □

Corolario 1.3.30. — *Sea $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos en X. Entonces, hay un isomorfismo de haces*

$$\mathscr{F} / \ker \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi.$$

Demostración. — Basta utilizar para todo $x \in X$ el teorema del isomorfismo (para grupos) para cada morfismo de grupos abelianos $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$. □

Gracias a la discusión anterior, podemos hablar de kernel, cokernel e imagen de morfismos de haces. En particular, tiene sentido hablar de **sucesiones exactas**.

Definición 1.3.31. — Sea $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una colección de haces de grupos abelianos en X, y sean $\varphi_n : \mathscr{F}_n \to \mathscr{F}_{n+1}$ morfismos de haces para todo $n \in \mathbb{Z}$. Decimos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} \mathscr{F}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathscr{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathscr{F}_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \cdots$$

es **exacta** si $\ker \varphi_n = \operatorname{Im} \varphi_{n-1} \overset{\mathsf{def}}{=} (\operatorname{Im} \varphi_{n-1})^+_{\mathrm{pre}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Más aún, una **sucesión exacta corta** de haces es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{G} \xrightarrow{\psi} \mathscr{H} \longrightarrow 0,$$

i.e., φ es inyectivo, ψ es sobreyectivo, y además $\ker \psi = \operatorname{Im} \varphi$.

Ejemplo importante 1.3.32. — Sea $X = \mathbb{C}$ (o una variedad compleja). La **sucesión exponencial**, introducida en 1953 por Kodaira y Spencer, está dada por

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\ \iota\ } \mathscr{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i\cdot)} \mathscr{O}_X^\times \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{O}_X^\times$) el haz de funciones holomorfas (resp. el haz de funciones holomorfas que no se anulan). Dicha sucesión es exacta.

1.4. Espacios anillados y $\mathscr{O}_X$-módulos

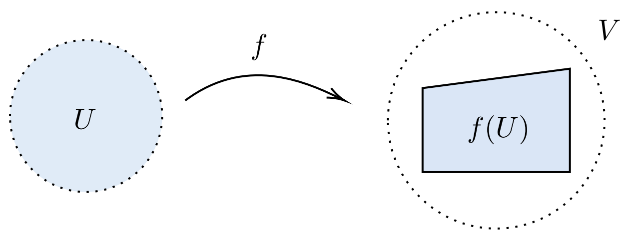
Recordemos que si A es un anillo (conmutativo con unidad), entonces un A-módulo M es esencialmente un A-espacio vectorial. Más precisamente, es un grupo abeliano $(M, +)$ donde adicionalmente podemos multiplicar por "*escalares*" en el anillo A.

En esta sección generalizaremos lo anterior permitiendo que el anillo A dependa del abierto U del espacio topológico X que estemos considerando. Comencemos por usar funciones continuas para conectar (pre)haces entre dos espacios topológicos X e Y.

Observación 1.4.1. — Si $f : X \to Y$ es una función continua y $V \subseteq Y$ es un abierto, entonces (por continuidad) $f^{-1}(V)$ es un abierto de X. Luego, a partir de un prehaz $\mathscr{F}$ en X podemos definir naturalmente un prehaz $f_*\mathscr{F}$ en Y mediante:

$$(f_*\mathscr{F})(V) := \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \text{ para todo } V \subseteq Y \text{ abierto.}$$

Sin embargo, la imagen $f(U) \subseteq Y$ de un abierto $U \subseteq X$ **no** es necesariamente un abierto de Y[10]. Así, dado un prehaz $\mathscr{G}$ en Y **no** podemos utilizar la fórmula "*inocente*" $\mathscr{G}(f(U))$, donde $U \subseteq X$ abierto, para definir un prehaz en X.



[10] En caso de serlo para todo $U \subseteq X$, decimos que f es una **función abierta**.

Lo mejor que podemos hacer es *aproximar* la imagen $f(U) \subseteq Y$ por abiertos de Y, i.e., considerar vecindades abiertas de $f(U)$ y gérmenes de secciones:

$$(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}(U) := \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ abierto} \\ \text{tal que } f(U) \subseteq V}} \mathscr{G}(V)$$

Concretamente, los elementos de $(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}(U)$ son (clases de equivalencia de) gérmenes (s, V) con $s \in \mathscr{G}(V)$ y $f(U) \subseteq V$ abierto de Y, y donde $(s_1, V_1) \sim (s_2, V_2)$ si existe $W \subseteq Y$ abierto tal que $f(U) \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $s_1|_W = s_2|_W$.

La discusión anterior decanta en la siguiente definición.

Definición 1.4.2. — Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Sea $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) un prehaz en X (resp. en Y) entonces definimos

(1) El prehaz **imagen directa** $f_*\mathscr{F}$ en Y mediante

$$(f_*\mathscr{F})(V) := \mathscr{F}(f^{-1}(V)) \text{ para todo } V \subseteq Y \text{ abierto.}$$

(2) El prehaz **imagen inversa** $(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}$ en X mediante

$$(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}(U) := \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ abierto} \\ \text{tal que } f(U) \subseteq V}} \mathscr{G}(V) \text{ para todo } V \subseteq Y \text{ abierto.}$$

En general $(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}$ **no** es un haz (ver Ejercicio 1.4.3). Por lo anterior, si $\mathscr{G}$ es un haz en Y, entonces definimos el **haz imagen inversa** $f^{-1}\mathscr{G}$ como el haz asociado al prehaz $(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}$, i.e., $f^{-1}\mathscr{G} := (f^{-1}\mathscr{G})^{+}_{\mathrm{pre}}$.

Ejercicio 1.4.3. — Con la notación anterior

(1) Probar que si $\mathscr{F}$ es un haz en X, entonces $f_*\mathscr{F}$ es un haz en Y.

(2) Dar un ejemplo que muestre que incluso si $\mathscr{G}$ es un haz, **no** necesariamente $(f^{-1}\mathscr{G})_{\mathrm{pre}}$ es un haz en X.
Indicación: Considerar $Y = \{\mathrm{pt}\}$ *un punto.*

(3) Sea $x \in X$ y sea $y = f(x) \in Y$. Probar que hay morfismos

$$(f_*\mathscr{F})_y \longrightarrow \mathscr{F}_x \qquad \text{y} \qquad (f^{-1}\mathscr{G})_x \longrightarrow \mathscr{G}_y,$$

y que $(f^{-1}\mathscr{G})_x \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}_y$ es un isomorfismo.

(4) Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ haces de grupos abelianos en X e Y, respectivamente. Probar que hay un isomorfismo de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}),$$

i.e., los functores f^{-1} y f_* son adjuntos.
Indicación: Este ejercicio es más astucioso. Ver [**Vak17**, 2.7.B].

Ejemplo importante 1.4.4. — Un caso particular muy relevante es el caso de $X \subseteq Y$ un sub-espacio topológico. Sea $\iota : X \hookrightarrow Y$ la función continua dada por la inclusión.

Dado un haz $\mathscr{G}$ en Y, denotamos el haz imagen inversa $\iota^{-1}\mathscr{G}$ en X mediante $\mathscr{G}|_X$, y lo llamamos la **restricción de $\mathscr{G}$ a X**.

En el caso en que $X = V$ sea un *abierto* de Y, tenemos que $\mathscr{G}|_V$ es el haz en V que asocia a todo abierto $U \subseteq V$ el grupo abeliano $\mathscr{G}(U)$.

Ejercicio 1.4.5. — Probar que si $X = \{y\}$ es un punto de Y, entonces $\mathscr{G}|_y$ es el haz constante $\mathscr{G}_y$ en $\{y\}$.

La siguiente noción será crucial para dar la definición formal de *variedad algebraica.*

Definición 1.4.6. — Sea k un cuerpo. Un **espacio anillado** en k-álgebras es un par $(X, \mathscr{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y un haz $\mathscr{O}_X$ de k-álgebras (conmutativas con unidad) llamado el **haz estructural**.

Además, un **morfismo de espacios anillados** en k-álgebras

$$(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{O}_Y)$$

es un par (f, φ) formado por una función continua $f : X \to Y$ y un morfismo de haces de k-álgebras

$$\varphi : \mathscr{O}_Y \longrightarrow f_*\mathscr{O}_X,$$

al cual usualmente[(11)] nos referiremos como el *pullback de funciones regulares de Y a X*. Dado que la composición de morfismos de espacios anillados está bien definida, obtenemos una categoría y, en particular, la noción de isomorfismo de espacios anillados en k-álgebras tiene sentido.

¡Atención! — En nuestra definición "oficial" de espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ se pide que $\mathscr{O}_X$ sea un haz de k-álgebras. Sin embargo, se puede considerar sin problemas $\mathscr{O}_X$ como un haz de **anillos** abelianos. Esto será útil al final del curso, cuando tomaremos $\mathscr{O}_X = \underline{\mathbb{Z}}$ en algunas situaciones de interés.

Observación 1.4.7. — Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado en k-álgebras. Si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces podemos considerar el haz de k-álgebras $\mathscr{O}_U \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_X|_U$ que permite considerar a U como un espacio anillado también. Dejamos como ejercicio al lector construir un morfismo de espacios anillados $(U, \mathscr{O}_U) \to (X, \mathscr{O}_X)$ en este caso.

(11) La terminología será explicada cuando discutamos el caso de variedades algebraicas. En muchos textos, φ se denota $f^\sharp : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$.

Ejemplo 1.4.8. — Sea M una variedad diferenciable, y sea $\mathscr{O}_M := \mathscr{C}_M^\infty$ el haz de funciones diferenciables en M. Entonces, $(M, \mathscr{O}_M)$ es un espacio anillado en $\mathbb{R}$-álgebras.

Tal como anticipamos al comienzo de esta sección, si pensamos $\mathscr{O}_X$ como un anillo que varía a medida que variamos los abiertos U de X, entonces podemos considerar módulos sobre cada uno de los anillos $\mathscr{O}_X(U)$.

Definición 1.4.9. — Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado en k-álgebras. Un **$\mathscr{O}_X$-módulo** es un haz $\mathscr{F}$ de k-espacios vectoriales tal que para todo abierto $U \subseteq X$ el k-espacio vectorial $\mathscr{F}(U)$ es un $\mathscr{O}_X(U)$-módulo. Más aún, para cada inclusión de abiertos $V \subseteq U \subseteq X$ las aplicaciones lineales de restricción $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$, $s \mapsto s|_V$ son compatibles con las estructuras de módulos.(12)

Además, un **morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos** $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ es un morfismo de haces de k-espacios vectoriales tal que para todo abierto $U \subseteq X$ la aplicación

$$\varphi_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)$$

es $\mathscr{O}_X(U)$-lineal. Dado que la composición de morfismos de $\mathscr{O}_X$-módulos está bien definida, obtenemos una categoría **$\mathscr{O}_X$-Mod**, donde los conjuntos de morfismos se denotan por

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G} \text{ morfismo de } \mathscr{O}_X\text{-módulos}\}.$$

Los conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ son grupos abelianos que además pueden ser dotados(13) de una estructura de $\mathscr{O}_X(X)$-módulo (i.e., de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$-módulo).

Observación importante 1.4.10. — Todas las construcciones válidas para módulos sobre un anillo poseen análogos en el contexto de $\mathscr{O}_X$-módulos. Sin embargo, en ocasiones hay que considerar el haz asociado al prehaz en cuestión. Los principales ejemplos son:

(1) La noción de sub-$\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}$, y el $\mathscr{O}_X$-módulo cociente $\mathscr{F}/\mathscr{E}$. Para este último, se considera el haz asociado.

(2) Dado un morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, los haces $\ker(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$ y $\mathrm{coker}(\varphi)$ son $\mathscr{O}_X$-módulos, donde para los dos últimos se considera el haz asociado. En particular, tiene sentido hablar de sucesiones exactas de $\mathscr{O}_X$-módulos.

---

(12) Ejercicio: Escribir la condición de compatibilidad explícitamente.

(13) Dado $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos y $\lambda \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ sección global, definimos $\lambda\varphi$ como el morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos que en el abierto $U \subseteq X$ está dado por $(\lambda\varphi)(s) := \lambda|_U \cdot s$ para toda sección $s \in \mathscr{F}(U)$.

(3) Dados $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos $\mathscr{O}_X$-módulos, la suma directa $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo. Más generalmente, si $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in I}$ es una colección arbitraria de $\mathscr{O}_X$-módulos, entonces la **suma directa** $\bigoplus_{i\in I} \mathscr{F}_i$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo.

(4) Dados $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos $\mathscr{O}_X$-módulos, el **producto tensorial** $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ (también denotado $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ si el haz estructural $\mathscr{O}_X$ es claro en el contexto) es el haz asociado al prehaz

$$U \longmapsto \mathscr{F}(U) \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} \mathscr{G}(U)$$

para todo abierto $U \subseteq X$.

(5) Sean $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ dos $\mathscr{O}_X$-módulos y sea $U \subseteq X$ un abierto. Entonces, $\mathscr{F}|_U$ y $\mathscr{G}|_U$ son $\mathscr{O}_U$-módulos. El $\mathscr{O}_X$-módulo dado por el prehaz de grupos abelianos

$$U \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$$

es de hecho un haz, que denotamos $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ (o también $\mathscr{H}\!om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ si el haz estructural $\mathscr{O}_X$ es claro en el contexto).

(6) Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. El $\mathscr{O}_X$-módulo **dual** de $\mathscr{F}$ está dado por

$$\mathscr{F}^\vee := \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X).$$

(7) Podemos hablar del álgebra tensorial, álgebra exterior, y álgebra simétrica de $\mathscr{O}_X$-módulos. Por ejemplo, para $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ la **potencia exterior** $\bigwedge^d \mathscr{F}$ de un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es el haz asociado al prehaz

$$U \longmapsto \bigwedge^d \mathscr{F}(U).$$

(8) Un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es **libre** si $\mathscr{F} \cong \mathscr{O}_X^{\oplus I} \overset{\mathsf{def}}{=} \bigoplus_{i\in I} \mathscr{O}_X$ para cierto conjunto de índices I. El cardinal de I es el **rango** de F.

(9) Un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ es **localmente libre** si existe un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ tal que $\mathscr{F}|_{U_i}$ es un $\mathscr{O}_{U_i}$-módulo libre, i.e., $\mathscr{F}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i}^{\oplus r_i}$. Si el espacio topológico X es *conexo*, entonces todos los rangos r_i son iguales a un mismo valor r, llamado el **rango** del $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre $\mathscr{F}$.

(10) Un **haz invertible** en X es un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre $\mathscr{L}$ de rango 1, i.e., tal que X puede cubrirse por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ tales que $\mathscr{L}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i}$ para todo $i \in I$. En particular, si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo, entonces $\mathscr{F}|_{U_i} \otimes_{\mathscr{O}_{U_i}} \mathscr{L}|_{U_i} \cong \mathscr{F}|_{U_i}$ para todo $i \in I$.

(11) Un **haz de ideales** $\mathcal{I}$ es un sub-$\mathscr{O}_X$-módulo de $\mathscr{O}_X$. En otras palabras, para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que $\mathcal{I}(U)$ es un ideal de $\mathscr{O}_X(U)$.

Ejercicio 1.4.11. — Sea $\mathscr{L}$ un haz invertible en X. Probar que $\mathscr{L}^\vee \otimes \mathscr{L} \cong \mathscr{O}_X$. Más aún, probar que $\mathscr{L}$ es un **haz reflexivo**, i.e.,

$(\mathscr{L}^\vee)^\vee \cong \mathscr{L}$.
Indicación: Si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre de rango finito[14] *y $\mathscr{G}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo arbitrario, entonces $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})_x \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{F}_x,\mathscr{G}_x)$.*

Terminemos por discutir cómo podemos hacer pullback y pushforward de haces de módulos utilizando morfismos de espacios anillados. Para esto, sea

$$(X,\mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathscr{O}_Y)$$

un morfismo de espacios anillados dado por el par (f,φ), donde $f : X \to Y$ es una función continua y donde $\varphi : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ es un morfismo de haces de k-álgebras, i.e., para todo abierto $V \subseteq Y$ tenemos un morfismo de k-álgebras

$$\varphi_V : \mathscr{O}_Y(V) \longrightarrow f_*\mathscr{O}_X(V) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_X(f^{-1}(V)).$$

Consideremos $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo definido en X y $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_Y$-módulo definido en Y. Entonces:

(1) Por definición, el haz imagen directa $f_*\mathscr{F}$ es un $f_*\mathscr{O}_X$-módulo. Más aún, dado que poseemos un morfismo de haces $\varphi : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ podemos definir una estructura de $\mathscr{O}_Y$-módulo en $f_*\mathscr{F}$.

(2) Por definición, el haz imagen inversa $f^{-1}\mathscr{G}$ es un $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulo. Por otra parte, la *adjunción* entre f^{-1} y f_* (ver Ejercicio 1.4.3) implica que hay un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathscr{O}_Y,\mathscr{O}_X) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_Y, f_*\mathscr{O}_X).$$

Luego, el morfismo $\varphi : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ corresponde vía la adjunción a un único morfismo $\psi : f^{-1}\mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_X$. Así, $\mathscr{O}_X$ es dotado de estructura de $f^{-1}\mathscr{O}_Y$-módulo a través de ψ. Luego, para obtener un $\mathscr{O}_X$-módulo a partir de $f^{-1}\mathscr{G}$ basta considerar la *extensión por escalares* (cf. Ejemplo 1.1.10 (2)):

$$f^*\mathscr{G} := f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X.$$

La discusión anterior puede resumirse en la siguiente definición.

Definición 1.4.12. — Sea $(f,\varphi) : (X,\mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathscr{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados en k-álgebras, y sea $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) un $\mathscr{O}_X$-módulo (resp. $\mathscr{O}_Y$-módulo). Definimos

(1) El $\mathscr{O}_Y$-módulo **imagen directa** mediante $f_*\mathscr{F}$.

(2) El $\mathscr{O}_X$-módulo **imagen inversa** (o **pullback**) mediante

$$f^*\mathscr{G} := f^{-1}\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_X.$$

[14] De hecho, esto es cierto para $\mathscr{F}$ localmente de presentación finita. Sin embargo, es falso para $\mathscr{O}_X$-módulos en general.

Observación 1.4.13. — Tal como antes, hay un isomorfismo functorial

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(f^*\mathscr{G},\mathscr{F}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F})$$

de donde obtenemos que f^* y f_* son functores adjuntos.

Ejemplo importante 1.4.14. — Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y $\mathscr{O}_X := \mathscr{C}_X^\infty$ el haz de funciones diferenciables en X.

Si elegimos coordenadas (locales) $x_1, \ldots, x_n$ de X y denotamos por $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ sus diferenciales, entonces el **haz cotangente** Ω_X^1 (a veces denotado Ω_X) está definido de la forma siguiente:

Para cada abierto $U \subseteq X$, los elementos de $\Omega_X^1(U)$ son 1-formas diferenciales de la forma

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)\,\mathrm{d}x_j, \quad \text{donde } f_j \in \mathscr{O}_X(U).$$

En particular, $\Omega_X^1|_U \cong \mathscr{O}_U^{\oplus n}$ y luego Ω_X^1 es un haz localmente libre de rango $n = \dim_{\mathbb{R}}(X)$.

Más generalmente, podemos considerar el haz $\Omega_X^d := \bigwedge^d \Omega_X^1$ de d-formas diferenciales, cuyas secciones sobre el abierto $U \subseteq X$ son de la forma

$$\omega(x) = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_d\le n} f_{j_1,\ldots,j_d}(x)\,\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{j_d}, \quad \text{donde } f_{j_1,\ldots,j_d} \in \mathscr{O}_X(U).$$

Así, Ω_X^d es un haz localmente libre de rango $\binom{n}{d}$. En particular,

$$\omega_X := \Omega_X^n \overset{\mathsf{def}}{=} \bigwedge^n \Omega_X^1$$

es un *haz invertible*, que llamamos el **haz canónico** de X. Además, el haz dual

$$\mathscr{T}_X := \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X^1, \mathscr{O}_X)$$

es llamado el **haz tangente** de X, y cuyas secciones son llamadas tradicionalmente *campos vectoriales.*

Ejercicio 1.4.15. — Con la notación del Ejemplo anterior, probar que para todo $d \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene

$$\omega_X \otimes (\Omega_X^d)^\vee \cong \Omega_X^{n-d},$$

y en particular tenemos que $\omega_X \otimes \mathscr{T}_X \cong \Omega_X^{n-1}$. Debido a esta identidad, y por motivos que veremos más adelante cuando discutamos sobre la *dualidad de Grothendieck-Serre*, es que ω_X es llamado el **haz dualizante** de X.

CAPÍTULO 2

VARIEDADES ALGEBRAICAS

2.1. Variedades algebraicas afines y Topología de Zariski

Sea k un cuerpo (que más adelante asumiremos algebraicamente cerrado). En esta sección, dotaremos al conjunto

$$k^n \overset{\mathsf{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \text{ donde } x_i \in k \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

de una topología, llamada la *topología de Zariski.* Esto nos permitirá definir un haz de k-álgebras llamado el *haz de funciones regulares.* Así, el espacio anillado correspondiente se llamará el **espacio afín**, y será denotado $\mathbb{A}^n(k)$ (o simplemente $\mathbb{A}^n$, si el cuerpo k es claro en el contexto).

Notación 2.1.1. — A partir de esta sección, denotaremos por $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ al anillo de polinomios $k[X_1, \ldots, X_n]$ en n variables con coeficientes en k.

La definición más importante en este contexto es la siguiente.

Definición 2.1.2. — Sea $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ un subconjunto de polinomios. El conjunto

$$V(S) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \text{ tal que } f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ para todo } f \in S\}$$

es llamado una **subvariedad afín** de k^n.

Veamos algunos ejemplos explícitos.

Ejemplo 2.1.3. —

(1) $V(1) = \emptyset$ y $V(\emptyset) = V(0) = k^n$ son subvariedades afines.
(2) $V(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$, i.e., todo punto es una subvariedad afín.

(3) En k^2 con $\mathscr{O}(\mathbb{A}^2) = k[X,Y]$, tenemos que $V(Y) = V(Y^2)$ es el eje x. En particular, dos polinomios diferentes pueden definir la misma subvariedad afín.
(4) Todo sub-espacio lineal afín de k^n es una subvariedad afín.

Observación 2.1.4. —
(1) Por definición, si $T \subseteq S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$, entonces $V(S) \subseteq V(T)$. En otras palabras, "mientras más ecuaciones, menos soluciones".
(2) Sea $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ subconjunto arbitrario, y sea $\langle S \rangle$ el *ideal generado* por S (i.e., sumas finitas de la forma $\sum f_i g_i$ con $f_i \in S$ y $g_i \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ arbitrario). Entonces,
$$V(S) = V(\langle S \rangle).$$
En particular, *siempre* podemos suponer que $S = I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ es un ideal.

En vista de lo anterior, es útil recordar el siguiente resultado de Hilbert.

***Recuerdo 2.1.5* (Teorema de la base de Hilbert)**
El anillo $k[X_1, \ldots, X_n]$ es **noetheriano**. En otras palabras, se verifican las condiciones equivalentes siguientes:
(i) Toda sucesión creciente de ideales es eventualmente constante, i.e., si
$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$
son ideales en $k[X_1, \ldots, X_n]$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $I_m = I_{m+1}$ para todo $m \geq N$; o bien,
(ii) Todo ideal I de $k[X_1, \ldots, X_n]$ está generado por un número *finito* de polinomios.

En términos prácticos, si $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ es un subconjunto de polinomios y si $I = \langle S \rangle$ es el ideal asociado, entonces existen $f_1, \ldots, f_r \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$. En particular, $V(S) = V(f_1, \ldots, f_r)$ y luego *toda* subvariedad afín de k^n puede definirse por un número finito de ecuaciones polinomiales.

Proposición 2.1.6. —
(1) *Intersección arbitraria de subvariedades afines de k^n es también una subvariedad afín de k^n.*
(2) *Unión finita de subvariedades afines de k^n es también una subvariedad afín de k^n.*

Demostración. — Para (1), basta notar que por definición se tiene la identidad

$$\bigcap_{i\in I} V(S_i) = V\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right).$$

Para (2), probaremos que

$$V(S_1)\cup V(S_2) = V(S_1S_2),$$

donde S_1S_2 es el conjunto formado por todos los posibles productos f_1f_2, con $f_i \in S_i$. En efecto, notamos que por definición se tiene que $V(S_1)\cup V(S_2) \subseteq V(S_1S_2)$. Por otro lado, si $x \notin V(S_1)\cup V(S_2)$ entonces existen $f_1 \in S_1$ y $f_2 \in S_2$ tales que $f_1(x) \neq 0$ y $f_2(x) \neq 0$, lo cual implica que $(f_1f_2)(x) \neq 0$ y con ello $x \notin V(S_1S_2)$. □

Corolario 2.1.7. — *Las subvariedades afines $V(S) \subseteq k^n$ verifican los axiomas de los conjuntos* cerrados *de una topología.*

Demostración. — Por definición, basta probar que k^n y $\emptyset$ son de la forma $V(S)$ para cierto S, que la intersección arbitraria de subvariedades afines es subvariedad afín, y que la unión finita de subvariedades afines es una subvariedad afín. Lo anterior es consecuencia del Ejemplo 2.1.3 y de la Proposición 2.1.6, respectivamente. □

Estamos listos para dar la primera definición del *espacio afín*.

Definición 2.1.8. — Definimos la **topología de Zariski** de k^n como la topología obtenida al declarar como cerrados a las subvariedades afines, i.e., conjuntos de la forma $V(S)$ para cierto $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. En particular, los **abiertos de Zariski** son los conjuntos de la forma

$$U = k^n \setminus V(S) \text{ para cierto } S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n).$$

Denotamos por $\mathbb{A}^n$ a k^n dotado de la topología de Zariski (i.e., los cerrados son ceros de polinomios y los abiertos sus complementos), que llamaremos el **espacio afín**.

Veamos algunas de las propiedades de la topología de Zariski. Para esto, recordemos la siguiente definición de topología.

Definición 2.1.9. — Un espacio topológico X es **noetheriano** si toda sucesión *decreciente* de conjuntos cerrados es eventualmente constante. En otras palabras, si

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$$

son subconjuntos cerrados de X, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_m = F_{m+1}$ para todo $m \geq N$.

Ejemplo importante 2.1.10. — El espacio afín $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano. En efecto, todo cerrado (de Zariski) en $\mathbb{A}^n$ es de la forma $V(I)$ para cierto ideal $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. Además, se tiene que

(1) La función $I \mapsto V(I)$ es decreciente.

(2) La función $V(I) \mapsto \mathcal{I}(V(I))$, donde

$$\mathcal{I}(V(I)) := \{f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in V(I)\},$$

es decreciente, y cumple $I \subseteq \mathcal{I}(V(I))$.

Así, una sucesión decreciente de cerrados

$$V(I_0) \supseteq V(I_1) \supseteq V(I_2) \supseteq \cdots \supseteq V(I_n) \supseteq \cdots$$

induce una sucesión *creciente* de ideales de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$

$$J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n \subseteq \cdots$$

donde $J_m := \mathcal{I}(V(I_m))$. Notamos que si la sucesión decreciente de cerrados no es eventualmente constante, entonces la sucesión creciente de ideales tampoco, lo cual es una contradicción al Teorema de la base de Hilbert.

Definición 2.1.11. — Un espacio topológico X es **quasi-compacto** si todo cubrimiento abierto de X admite un sub-cubrimiento finito(1).

Teorema 2.1.12. — *Todo espacio topológico noetheriano es quasi-compacto. En particular, el espacio afín $\mathbb{A}^n$ es quasi-compacto.*

Demostración. — Sea X un espacio topológico noetheriano y sea $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ un cubrimiento abierto. Queremos probar que existe $J \subseteq I$ subconjunto *finito* tal que $X = \bigcup_{j \in J} U_j$.

Para ello, consideramos para cada $i \in I$ al conjunto cerrado $F_i := X \setminus U_i$. Notamos, considerando complementos, que si $J \subseteq I$ entonces los abiertos $\{U_j\}_{j \in J}$ cubren X si y sólo si

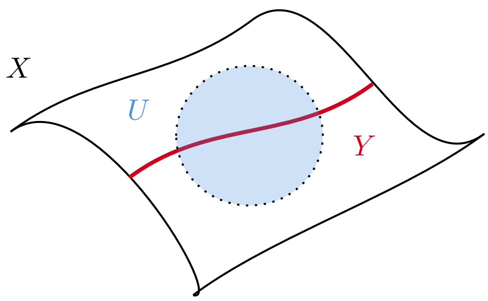
$$\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset.$$

Supongamos, por contradicción, que toda intersección finita de cerrados de la forma F_i es no-vacía. Además, agregando todas las intersecciones finitas si

(1)Es común reservar el término **compacto** para referirse a un espacio topológico quasi-compacto y de Hausdorff. Veremos que la condición de Hausdorff falla (salvo en casos triviales) para la topología de Zariski.

fuese necesario[2], podemos suponer sin pérdida de generalidad que la familia $\{F_i\}_{i\in I}$ es estable por intersecciones finitas. Como X es un espacio noetheriano, existe un elemento minimal no-vacío F_m en esta familia[3]. En particular, la minimalidad de F_m implica que la inclusión $F_m \cap F_i \subseteq F_m$ es una igualdad para todo $i \in I$, i.e., $F_m \subseteq F_i$ para todo $i \in I$. Esto último es imposible, pues por hipótesis $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. □

Recuerdo 2.1.13. — Sea (X,τ) un espacio topológico, y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto arbitrario. Entonces, la **topología inducida** o **topología traza** en Y es la topología τ_Y obtenida al declarar que los cerrados (resp. abiertos) de Y son la intersección de cerrados (resp. abiertos) de X con Y, i.e., $V \in \tau_Y$ si y sólo si $V = Y \cap U$ para cierto $U \in \tau$.



En particular, un subconjunto de un espacio noetheriano es también noetheriano (respecto a la topología inducida).

Corolario 2.1.14. — *Todo subconjunto del espacio afín $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano respecto a la topología de Zariski (inducida). En particular, toda subvariedad afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano, y por ende quasi-compacto.*

---

[2] Equivalentemente, agregando todas las uniones finitas al cubrimiento abierto original.

[3] Esto último es una aplicación clásica del lema de Zorn: basta considerar el conjunto $\mathscr{P}$ cuyos elementos se obtienen a partir de uniones finitas de abiertos U_i, ordenado parcialmente mediante la inclusión. La hipótesis de noetherianidad implica que toda cadena en $\mathscr{P}$ posee una cota superior, y luego el lema de Zorn implica que $\mathscr{P}$ posee un elemento maximal U_m. Así, $F_m := X \setminus U_m$.

2.2. Funciones regulares y morfismos

Sea k un cuerpo y $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \ldots, X_n]$. Comencemos por definir una construcción "*dual*" a $S \mapsto V(S)$ discutida en la sección anterior (cf. Ejemplo 2.1.10).

Definición 2.2.1. — Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto arbitrario. Definimos el **ideal de** V como

$$\mathcal{I}(V) := \{f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in V\}.$$

Tal como lo indica la terminología, $\mathcal{I}(V)$ es un ideal de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.

Ejemplo 2.2.2. —

(1) $\mathcal{I}(\emptyset) = \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.

(2) Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subconjunto arbitrario. Entonces, $X \subseteq V(\mathcal{I}(X))$ con igualdad si y sólo si X es una subvariedad afín. Así, para $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subconjunto arbitrario tenemos que
$$V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}^{\mathrm{Zar}}$$
es la **adherencia de Zariski** de X.

(3) Por definición, si $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^n$, entonces $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$. En otras palabras, "mientras más puntos, menos ecuaciones".

(4) Si $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$, entonces $\mathcal{I}(X \cup Y) = \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$.

(5) Sea $S \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ subconjunto arbitrario. Entonces, $S \subseteq \mathcal{I}(V(S))$ y dicha inclusión en general **no** es una igualdad, incluso en el caso en que S sea un ideal. Por ejemplo, $\mathcal{I}(V(\langle Y^2 \rangle)) = \langle Y \rangle$ en $k[X, Y]$.

Notemos que la subvariedad afín $V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2$ se descompone en la unión $V(X) \cup V(Y)$ de los ejes coordenados. Sin embargo, si k es un cuerpo infinito, entonces $V(X)$ y $V(Y)$ no pueden descomponerse. El fenómeno anterior motiva la siguiente definición fundamental (la cual discutiremos en detalle más adelante).

Definición 2.2.3. — Sea X un espacio topológico (no-vacío). Decimos que X es **irreducible** si *no* es la unión de dos subconjuntos cerrados estrictos. En otras palabras, si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 cerrados, entonces necesariamente $X = X_1$ o bien $X_2 = X$.

Ejercicio 2.2.4. — Sea X un espacio topológico no-vacío. Probar que X es irreducible si y sólo si se satisface alguna de las condiciones equivalentes siguientes:

(1) Todo par de abiertos no-vacíos de X se intersectan.
(2) Todo abierto no-vacío de X es denso.

En particular, si X espacio topológico irreducible entonces X **no** es un espacio de Hausdorff (a menos que sea un conjunto de un elemento).

Teorema 2.2.5. — *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvariedad afín. Entonces, X es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ es un ideal primo.*

Demostración. — Supongamos primero que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es una subvariedad afín irreducible, y sean $f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ polinomios tales que fg se anula en X, i.e., $fg \in \mathcal{I}(X)$. Entonces, tenemos que

$$X \subseteq V(fg) \overset{\mathsf{def}}{=} V(f) \cup V(g),$$

y en particular $X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 := V(f) \cap X$ y $X_2 := V(g) \cap X$ cerrados en X. Dado que X es irreducible, tenemos que $X_1 = X$ o bien $X_2 = X$, i.e., $X \subseteq V(f)$ o bien $X \subseteq V(g)$, i.e., $f \in \mathcal{I}(X)$ o bien $g \in \mathcal{I}(X)$. Así, concluímos que $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo.

Recíprocamente, si suponemos que $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ y suponemos que $X = X_1 \cup X_2$, con $X_i \subsetneq X$ cerrado propio para $i \in \{1, 2\}$, entonces el hecho que $X_i \subsetneq X$ implica que existe $f_i \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ que se anula en X_i pero que no se anula en X. En otras palabras, existen $f_1, f_2 \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $f_i \notin \mathcal{I}(X)$. Sin embargo, $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(X)$ pues f_i se anula en X_i y $X = X_1 \cup X_2$. Esto último es una contradicción con el hecho que $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo. □

Corolario 2.2.6. — *Sea k un cuerpo de cardinal infinito (e.g. k algebraicamente cerrado). Entonces, $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ y $\mathbb{A}^n$ es irreducible.*

Demostración. — Dado que k es infinito, todo polinomio $f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ que se anula sobre $\mathbb{A}^n$ es nulo. En efecto, basta fijar $n-1$ variables para obtener un polinomio en una variable con infinitas raíces, que por ende debe ser nulo. La conclusión $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ se obtiene por inducción en n. Finalmente, el hecho que $\mathbb{A}^n$ es irreducible se desprende del hecho que $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ es un ideal primo. □

Recuerdo 2.2.7. — Sea A un anillo conmutativo con unidad, y sea $I \subseteq A$ un ideal. El conjunto

$$\sqrt{I} := \{f \in A \text{ tal que existe } m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^m \in I\}$$

es un ideal de I que verifica $I \subseteq \sqrt{I}$, llamado el **radical** de I. Decimos que I es un **ideal radical** si $I = \sqrt{I}$.

Más aún, $I \subseteq A$ es un ideal radical si y sólo si A/I es un **anillo reducido** (i.e., el único elemento nilpotente de A/I es el 0). En particular, hay inclusiones

$$\{\text{ideales maximales}\} \subseteq \{\text{ideales primos}\} \subseteq \{\text{ideales radicales}\}$$

para todo anillo conmutativo con unidad A.

Utilizando la terminología anterior, podemos enunciar (sin demostración) el *Teorema de los ceros de Hilbert*, considerado uno de los resultados fundamentales de la geometría algebraica clásica.

***Teorema 2.2.8* (Hilbert, 1893).** — *Sea $k = \overline{k}$ un cuerpo algebraicamente cerrado (e.g. $k = \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{F}}_p$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{C}_p$, etc), y sea $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \overset{\text{def}}{=} k[X_1, \dots, X_n]$ un ideal. Entonces:*

(1) **Nullstellensatz débil.** *Si $I = \mathfrak{m}$ es un ideal maximal, entonces*

$$\mathfrak{m} = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$$

para ciertos $a_1, \dots, a_n \in k$.

(2) **Nullstellensatz.** *Para todo ideal I se cumple que*

$$\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}.$$

En particular, $V(I) = \emptyset$ si y sólo si $I = \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.

¡Atención! — Debido a la gran importancia del resultado anterior:

⚠ En todo lo que sigue del curso, supodremos que k es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Observación importante 2.2.9. — Como consecuencia del Hilbert Nullstellensatz, tenemos que la aplicación $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ establece una *biyección* decreciente (con inversa dada por $I \mapsto V(I)$) entre:

(1) Las subvariedades afines de $\mathbb{A}^n$ y los ideales *radicales* de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.
(2) Las subvariedades afines irreducibles de $\mathbb{A}^n$ y los ideales *primos* de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.
(3) Los puntos de $\mathbb{A}^n$ y los ideales *maximales* de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$.

Recuerdo 2.2.10. — Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es **localmente cerrado** si es un subconjunto cerrado de un abierto de X.

En otras palabras, si $A = U \cap F$ es la intersección de un abierto U y un cerrado F de X. En particular, considerando $U = X$ (resp. $F = X$), todo cerrado (resp. abierto) de X es localmente cerrado.

Estamos listos para dar la definición más importante de esta sección.

Definición 2.2.11. — Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto localmente cerrado. Una **función regular** en X es una función

$$f : X \longrightarrow k$$

tal que para todo punto $x \in X$ existe una vecindad abierta $x \in U_x \subseteq X$ y polinomios $P_x, Q_x \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $Q_x(x) \neq 0$, y tales que

$$f|_{U_x} = \left.\frac{P_x}{Q_x}\right|_{U_x}.$$

Denotamos por

$$\mathscr{O}(X) := \{f : X \longrightarrow k \text{ función regular}\}$$

al k-álgebra de funciones regulares en X.

El siguiente resultado justifica el hecho que la definición anterior sea compatible con la notación $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \stackrel{\text{def}}{=} k[X_1, \ldots, X_n]$ introducida anteriormente.

Proposición 2.2.12. — *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un* cerrado *de Zariski (i.e., una subvariedad afín). Entonces, toda función regular $f : X \to k$ es la restricción de un polinomio $P \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \stackrel{\text{def}}{=} k[X_1, \ldots, X_n]$ a X, i.e., $f = P|_X$. En otras palabras,*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(X) \stackrel{\iota}{\hookrightarrow} \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{\text{res}_X} \mathscr{O}(X) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, y en particular $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$.

Demostración. — Sea $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ cerrado de Zariski, donde $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal (radical). Sea $f : X \to k$ función regular, y veamos que f es restricción de un polinomio.

Para ello, fijamos para cada $x \in X$ una vecindad abierta $U_x \subseteq X$ de $x \in X$ y polinomios P_x, Q_x tales que $fQ_x = P_x$ en U_x.

Dado que U_x es un abierto de Zariski, tenemos que

$$X \setminus U_x = X \cap V(A_1, \ldots, A_m) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \text{ tal que } A_1(y) = \cdots = A_m(y) = 0\}$$

para ciertos polinomios $A_i \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. En particular, tenemos la igualdad $(A_1 f Q_x)(y) = (A_1 P_x)(y)$ para todo $y \in X$.

Luego, redefiniendo $Q_x := A_1 Q_x$ y $P_x := A_1 P_x$, obtenemos que la igualdad anterior $fQ_x = P_x$ ahora es válida en todo X. Más aún, cambiando la numeración si fuera necesario para que $A_1(x) \neq 0$, tenemos que $Q_x(x) \neq 0$ por definición de Q_x.

Sea $J := \langle \{Q_x\}_{x \in X} \rangle \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal generado por los Q_x. Por definición, los Q_x **no** tienen ceros comunes en X, i.e., $\emptyset = V(J) \cap X \stackrel{\text{def}}{=} V(J) \cap V(I) \stackrel{\text{def}}{=} V(I+J)$.

Por otro lado, gracias al Hilbert Nullstellensatz, tenemos que $V(I+J)=\emptyset$ si y sólo si $I+J=\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. En particular, existen $B \in I$ y $\sum_{j=1}^r G_{x_j} Q_{x_j} \in J$ tales que
$$B+\sum_{j=1}^r G_{x_j} Q_{x_j}=1.$$
Dado que $X=V(I)$, tenemos que $B=0$ en X y por ende deducimos (al multiplicar por f) que $f=f\cdot 1=\sum_{j=1}^r G_{x_j}(fQ_{x_j})=\sum_{j=1}^r G_{x_j} P_{x_j} =: P$, de donde se obtiene lo pedido.

La última parte se deduce al considerar
$$\mathrm{res}_X : \mathscr{O}(\mathbb{A}^n) \twoheadrightarrow \mathscr{O}(X),\ P \longmapsto P|_X$$
y notar que por definición se tiene $\ker(\mathrm{res}_X)=\mathcal{I}(X)$. □

La importancia de la Definición 2.2.11 radica en que no sólamente permite definir la noción de función regular para cerrados de Zariski (donde la situación es particularmente simple, de acuerdo a lo discutido en la Proposición anterior), sino que también para *abiertos*. Esto último, es de suma utilidad al momento de definir la noción de *haz de funciones regulares*.

Definición 2.2.13. — Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto localmente cerrado. Definimos el **haz de funciones regulares** en X como el haz en k-álgebras $\mathscr{O}_X$ que a cada abierto $U \subseteq X$ asocia el k-álgebra
$$\mathscr{O}_X(U) := \mathscr{O}(U) \overset{\mathsf{def}}{=} \{f : U \longrightarrow k \text{ función regular}\}.$$
Más aún, si dotamos a k de la topología de Zariski (i.e., lo pensamos como la **recta afín** $\mathbb{A}^1$) entonces toda función regular es continua. Es decir, si denotamos por $\mathscr{C}_X$ al haz de funciones continuas $f : X \to \mathbb{A}^1$ respecto a las correspondientes topologías de Zariski, entonces $\mathscr{O}_X \subseteq \mathscr{C}_X$ es un subhaz.

Lo anterior se extiende naturalmente al contexto más general siguiente.

Definición 2.2.14. — Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Una función $f : X \to Y$ es llamada un **morfismo regular** si es la restricción de una función polinomial $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ tal que $F(X) \subseteq Y$.

En particular, decimos que un morfismo regular $f : X \to Y$ es un **isomorfismo** (o también, un **morfismo birregular**) si es una función biyectiva y $f^{-1} : Y \to X$ es un morfismo regular. En tal caso, escribimos $X \cong Y$.

Observación 2.2.15. — Gracias a la Proposición 2.2.12, tenemos que
$$\mathscr{O}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1 \text{ morfismo regular}\}.$$

Además, notamos que si $f : X \to Y$ es un morfismo regular, entonces el **pullback** de f, dado por

$$f^* : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X),\ \varphi \longmapsto \varphi \circ f,$$

es un morfismo de k-álgebras.

Ejemplo 2.2.16. —

(1) Toda función polinomial $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m,\ x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ es regular.
(2) Todo morfismo regular es continuo para la topología de Zariski.
(3) Supogamos que $\mathrm{car}(k) = p > 0$ (e.g. $k = \overline{\mathbb{F}}_p$). La función

$$\mathrm{Fr} : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1,\ x \longmapsto x^p$$

es un morfismo regular biyectivo, llamado el **morfismo de Frobenius**. Sin embargo, veremos más adelante que **no** es un isomorfismo (i.e., la función inversa no es regular). El morfismo de k-álgebras asociado está dado por

$$\mathrm{Fr}^* : k[X] \longrightarrow k[X],\ X \longmapsto X^p.$$

Ejercicio 2.2.17. — Consideremos la parábola $C \subseteq \mathbb{A}^2$ dada por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y = x^2\}.$$

Probar que $\mathcal{I}(C) = \langle X^2 - Y \rangle$ en $\mathscr{O}(\mathbb{A}^2) = k[X, Y]$, y deducir que C es una subvariedad afín irreducible. Demostrar que las funciones $f : C \to \mathbb{A}^1,\ (x, y) \mapsto x$ y $g : \mathbb{A}^1 \to C,\ t \mapsto (t, t^2)$ son morfismos regulares e inversas una de la otra. En particular, f es un isomorfismo. Finalmente, describir

$$f^* : \mathscr{O}(\mathbb{A}^1) \to \mathscr{O}(C)$$

el pullback de f.

El siguiente importante resultado señala que todo morfismo de k-álgebras abstracto entre álgebras de funciones regulares es en realidad *geométrico*, i.e., proviene de un morfismo regular.

Teorema 2.2.18. — *Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Entonces, hay una correspondencia biyectiva*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos regulares} \\ f : X \longrightarrow Y \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos de } k\text{-álgebras} \\ \varphi : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X) \end{array} \right\},\ f \longmapsto f^*$$

En particular, $X \cong Y$ son isomorfas si y sólo si $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(Y)$ son isomorfas como k-álgebras.

Demostración. — Para la inyectividad, debemos probar que f^* determina al morfismo $f : X \to Y$. Para ello, consideremos $(y_1, \dots, y_m)$ coordenadas en $\mathbb{A}^m$ y notemos que cada una de ellas $y_i : \mathbb{A}^m \to k$ puede ser vista como una función regular en $\mathbb{A}^m$. Así $y_i|_Y : Y \to k$ son funciones regulares en Y, que denotaremos por abuso de notación $y_i \in \mathscr{O}(Y)$.

Por otro lado, si escribimos $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ donde $f_i \in \mathscr{O}(X)$ es la i-ésima componente de f, entonces por definición

$$f^*(y_i) \overset{\mathsf{def}}{=} y_i \circ f \overset{\mathsf{def}}{=} f_i$$

para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, de donde deducimos que f^* determina a f.

Para la sobreyectividad, comenzamos con un morfismo $\varphi : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$ de k-álgebras arbitrario, y debemos probar que existe $f : X \to Y$ morfismo regular tal que $f^* = \varphi$. Para ello, y con el abuso de notación anterior, consideramos para cada $y_i \in \mathscr{O}(Y)$ la imagen $f_i := \varphi(y_i) \in \mathscr{O}(X)$. Así, construimos

$$f : X \longrightarrow \mathbb{A}^m,\ x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

morfismo regular entre X y $\mathbb{A}^m$. Así, basta probar que $f(X) \subseteq Y$.

Por otro lado, notemos que $f(X) \subseteq Y$ equivale a que $f(x) \in Y \overset{\mathsf{def}}{=} V(\mathcal{I}(Y))$ para todo $x \in X$, lo cual equivale a su vez que $g(f(x)) = 0$ para todo $g \in \mathcal{I}(Y)$ y todo $x \in X$. Consideremos entonces $g \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tal que $g|_Y = 0$ (i.e., $g \in \mathcal{I}(Y)$), y notemos que para todo $x \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\overset{\mathsf{def}}{=} g((f_1(x), \dots, f_m(x)) \overset{\mathsf{def}}{=} g((\varphi(y_1)(x), \dots, \varphi(y_m)(x))) \\ &= \varphi(g(y_1, \dots, y_m))(x) = 0 \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se deduce del hecho que φ es un morfismo de k-álgebras, y donde la última igualdad se deduce del hecho que $g = 0$ para todo $(y_1, \dots, y_m) \in Y$. Así, $f : X \to Y$ es un morfismo regular y por construcción tenemos que $f^* = \varphi$. □

Como consecuencia del resultado anterior, basta comprender las k-álgebras de funciones regulares para entender las subvariedades afines. En particular, podemos distinguir clases de isomorfismo de subvariedades analizando dichas álgebras.

Ejercicio 2.2.19. — Consideremos la *cúbica cuspidal* dada por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^3\}.$$

Probar que C es una subvariedad afín irreducible y calcular $\mathcal{I}(C)$. Deducir que C **no** es isomorfa a $\mathbb{A}^1$.

Indicación: Para lo último, basta probar que $\mathscr{O}(C)$ no es isomorfo a $k[T]$, por *ejemplo, notando que no todo ideal de $\mathscr{O}(C)$ es* principal *(i.e., generado por un elemento).*

2.3. Variedades algebraicas

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado.

Definición 2.3.1. — Una **variedad algebraica afín** sobre k es un espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ que es isomorfo (en la categoría de espacios anillados en k-álgebras) a un *cerrado* de Zariski de un espacio afín, junto con su haz de funciones regulares.

¡Atención! — Típicamente el haz estructural $\mathscr{O}_X$ se omite si es claro en el contexto, por lo que es común escribir "*la variedad algebraica afín X*" símplemente. Notamos que el tallo $\mathscr{O}_{X,x}$ formado por los gérmenes de funciones regulares en $x \in X$ es una k-álgebra **local**, i.e, posee un único ideal maximal dado por

$$\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathscr{O}_{X,x} \text{ tal que } f(x) = 0\}.$$

En efecto, todo germen fuera de $\mathfrak{m}_x$ es invertible. Más aún, el morfismo de evaluación

$$\mathrm{ev}_x : \mathscr{O}_{X,x} \twoheadrightarrow k, \; f \longmapsto f(x)$$

induce un isomorfismo $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$ para todo $x \in X$.

Finalmente estamos listos para dar la definición más importantes del curso.

Definición 2.3.2. — Una **variedad algebraica** (reducida) sobre k es un espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ tal que:

(1) X es un espacio topológico noetheriano.
(2) Todo punto de X admite una vecindad abierta $U \subseteq X$ tal que el espacio anillado $(U, \mathscr{O}_U)$ es una variedad algebraica afín, donde $\mathscr{O}_U \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_X|_U$. En tal caso, decimos que U es un **abierto afín** de X.

Observación 2.3.3. — En la práctica, agregaremos una condición extra de "*separación*" que será explicada más adelante.

Definición 2.3.4. — Un **morfismo** de variedades algebraicas

$$(X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{O}_Y)$$

es un morfismo entre los espacios anillados subyacentes.

Ejemplo importante 2.3.5. — Sean X e Y dos variedades algebraicas. Una función continua
$$f : X \to Y$$
es un **morfismo regular** si

> Para toda función regular $u : V \to k$ definida sobre un abierto $V \subseteq Y$ (i.e., $u \in \mathscr{O}_Y(V)$), la función definida mediante el pullback $f^*(u) := u \circ f : f^{-1}(V) \to k$ es una función regular en $f^{-1}(V) \subseteq X$ (i.e., $f^*(u) \in f_*\mathscr{O}_X(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X(f^{-1}(V))$.

Luego, un morfismo regular define un morfismo de haces en k-álgebras dado por el pullback
$$f^* : \mathscr{O}_Y \longrightarrow f_*\mathscr{O}_X$$
y por ende define un morfismo de espacios anillados
$$(f, f^*) : (X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{O}_Y).$$
La importancia de este ejemplo radica en que veremos que *todo morfismo entre variedades algebraicas es regular*, i.e., para todo morfismo
$$(f, \varphi) : (X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{O}_Y).$$
de espacios anillados entre variedades algebraicas se tiene que $f : X \to Y$ es un morfismo regular (en el sentido anterior) y $\varphi = f^*$.

En la categoría de variedades algebraicas con morfismos dados por los morfismos regulares, tenemos la noción de isomorfismo siguiente.

Definición 2.3.6. — Un morfismo regular $f : X \to Y$ entre variedades algebraicas es un **isomorfismo** (o también un **morfismo birregular**) si f es una función biyectiva y $f^{-1} : Y \to X$ es un morfismo regular. En otras palabras, el morfismo (f, f^*) es un isomorfismo en la categoría de espacios anillados.

Comencemos por el siguiente resultado de utilidad.

Proposición 2.3.7. — *Sea X una variedad algebraica. Entonces, todo abierto y todo cerrado de X posee una estructura inducida de variedad algebraica.*

Demostración. — Sea $U \subseteq X$ un abierto no-vacío. Entonces, sabemos que $(U, \mathscr{O}_U)$ es un espacio anillado, donde $\mathscr{O}_U \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X|_U$. Además, U es un espacio noetheriano. Luego, basta probar que U está cubierto por abiertos afines (i.e., abiertos isomorfos a *cerrados* de Zariski en algún espacio afín):

Sabemos que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, donde U_i es un abierto afín de X. Así,

$$U = \bigcup_{i\in I} V_i \qquad \text{donde } V_i := U \cap U_i,$$

y luego V_i es un abierto de la variedad algebraica afín U_i. Luego, basta probar que todo abierto V de una subvariedad afín $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ (i.e., un cerrado de Zariski) puede ser cubierto por abiertos afines.

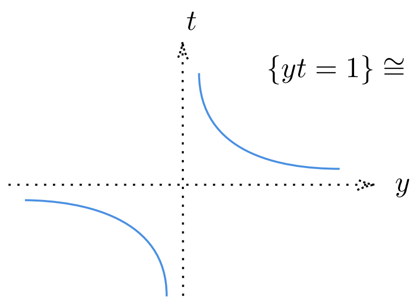
Para esto último, consideramos un abierto de Zariski $V \subseteq Y$. Por definición, existen polinomios $f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que

$$Y \setminus V = Y \cap V(f_1, \ldots, f_m) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{y \in Y \text{ tal que } f_1(y) = \cdots = f_m(y) = 0\}.$$

En particular, si para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ consideramos el abierto

$$U_{f_i} := Y \setminus V(f_i) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{y \in Y \text{ tal que } f_i(y) \neq 0\}$$

entonces tenemos que $V = \bigcup_{i=1}^{m} U_{f_i}$. Veamos que cada U_{f_i} es un *abierto afín* (i.e., isomorfo a una subvariedad afín de algún espacio afín):



En $\mathbb{A}^{n+1}$ con coordenadas $(y,t) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (y_1, \ldots, y_n, t)$ consideramos el *cerrado* de Zariski

$$W_i := \{(y,t) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^{n+1} \text{ tal que } y \in Y \text{ y tal que } f_i(y)t = 1\},$$

y notamos que $W_i \to U_{f_i}$, $(y,t) \mapsto y$ es un morfismo regular biyectivo con inversa regular dada por $y \mapsto (y, \frac{1}{f_i(y)})$. Así, $(U, \mathscr{O}_U)$ es una variedad algebraica.

Veamos ahora el caso de subconjuntos cerrados. Para ello, consideremos $Y \subseteq X$ cerrado no-vacío y notemos que Y es un espacio topológico noetheriano.

Es importante destacar que la definición del haz estructural $\mathscr{O}_Y$ es más sutil: la idea crucial es que si $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ son subvariedades afines entonces Y está determinada por el ideal

$$\mathcal{I}_X(Y) := \mathcal{I}(Y)/\mathcal{I}(X) \text{ en el anillo cociente } \mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X).$$

En el caso general, la idea será ver Y como un cerrado dentro de un abierto afín y repetir la idea anterior.

Concretamente, si $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathscr{O}_X$ es el haz de ideales (i.e., un sub-$\mathscr{O}_X$-módulo) de funciones regulares que se anulan en Y, i.e.,

$$\mathcal{I}_Y(U) := \{f \in \mathscr{O}_X(U) \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in U \cap Y\},$$

entonces definimos[4] $\mathscr{O}_Y := (\mathscr{O}_X / \mathcal{I}_Y)|_Y$.

Así, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ es un espacio anillado y por ende basta chequear que Y puede ser cubierto por abiertos afines. Para ello, consideremos $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ un cubrimiento afín, y notemos que

$$Y = \bigcup_{i\in I} Z_i \qquad \text{donde } Z_i := Y \cap U_i,$$

y luego Z_i es un cerrado de la variedad algebraica afín U_i, y luego Z_i es también una subvariedad afín. Más aún, dado que si $Z \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ son subvariedades afines entonces tenemos que $\mathscr{O}_X|_Z \cong \mathscr{O}_Z$ (¡dada por la restricción de polinomios!), y por ende $\mathscr{O}_Y|_{Z_i} \cong \mathscr{O}_{Z_i}$. Así, $(Y, \mathscr{O}_Y)$ es una variedad algebraica. □

Ejemplo importante 2.3.8. — Gracias a la demostración del resultado anterior, tenemos que si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica afín y $f \in \mathscr{O}(X)$ es una función regular, entonces se tiene que

$$U_f := \{x \in X \text{ tal que } f(x) \neq 0\} \subseteq X$$

es un abierto afín (i.e., es isomorfo como espacio anillado a una variedad algebraica afín). Dichos abiertos son llamados **abiertos principales** de la topología de Zariski de X, pues forman una base de dicha topología.

Más generalmente, una **variedad quasi-afín** es por definición un abierto de una variedad algebraica afín. Es importante notar que, en general, una variedad quasi-afín **no** es una variedad afín.

Por ejemplo, si consideramos $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la variedad algebraica definida a partir del cubrimiento afín

$$U \cup V = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } x \neq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y \neq 0\},$$

entonces $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_X(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)$. En efecto, una sección global $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ puede escribirse como

$$f = \frac{P}{X^n} = \frac{Q}{Y^m}$$

[4] Notar que, a diferencia de $\mathscr{O}_X|_Y$, el haz $(\mathscr{O}_X / \mathcal{I}_Y)|_Y$ tiene la ventaja de que sus secciones pueden ser vistas como funciones regulares en Y, y no en una *vecindad* abierta de Y.

para ciertos $P, Q \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)$, y en particular $P \cdot Y^m = Q \cdot X^n$. Así, Y^m divide a Q y X^n divide a P, i.e., $f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)$. Por otra parte, si X fuera una variedad algebraica afín, entonces el Hilbert Nullstellensatz nos daría una biyección entre los puntos de X y los ideales maximales de $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)$. Sin embargo, $\mathfrak{m}_{(0,0)} \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^2) \cong \mathscr{O}(X)$, mientras que $(0,0) \notin X$. En conclusión, X **no** es una variedad algebraica afín.

El siguiente es un ejemplo fundamental en geometría algebraica, y nos acompañará por el resto del curso.

Ejemplo importante 2.3.9. — Consideremos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto $k^{n+1} \setminus \{0\}$:

> Dos vectores $x, y \in k^{n+1}$ no-nulos son equivalentes si y sólo si son *colineales*, i.e., si existe $\lambda \in k^*$ tal que $y = \lambda x$.

El conjunto cociente (cuyos elementos son las clases de equivalencia por esta relación), se llama el **espacio proyectivo de dimension** n sobre k, y será denotado $\mathbb{P}^n(k)$ (o simplemente $\mathbb{P}^n$, si el cuerpo k es claro en el contexto).

Tradicionalmente, se denota la clase de $x = (x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{P}^n$ mediante

$$[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n$$

(o también $[x_0 : \dots : x_n]$), y se dice que $x_0, \dots, x_n$ son "*las*" **coordenadas homogéneas** de $[x] \in \mathbb{P}^n$ (¡a pesar que sólo están definidas módulo multiplicación por una constante no-nula!).

Más generalmente, si V es un k-espacio vectorial no-nulo, se define el espacio proyectivo asociado a V, también llamado la **proyectivización de** V como el conjunto

$$\mathbb{P}(V) := \{\ell \subseteq V \text{ sub-espacio vectorial tal que } \dim_k(\ell) = 1\}.$$

Notar que si $W \subseteq V$ es un sub-espacio vectorial no-nulo, entonces tenemos una inclusión $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$.

Para probar que el espacio proyectivo es en realidad una variedad algebraica, debemos recordar cómo dotar a un conjunto cociente de una topología.

Recuerdo 2.3.10. — Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Si denotamos por $Y := X/\sim$ al conjunto cociente y por $\pi : X \twoheadrightarrow Y,\ x \mapsto [x]$ la proyección canónica, entonces la **topología cociente**

en Y es la topología obtenida al declarar que los abiertos de Y son los subconjuntos $V \subseteq Y$ tales que

$$\pi^{-1}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } [x] \in V\}$$

es un abierto en X.

Gracias a lo anterior, podemos probar el siguiente resultado fundamental.

Proposición 2.3.11. — *El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica.*

Demostración. — Consideremos el **grupo multiplicativo** $\mathbb{G}_m := (k^*, \times)$ y la acción en $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ dada por

$$\lambda \cdot (x_0, \ldots, x_n) = (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{G}_m.$$

Así, el espacio proyectivo de dimensión n se identifica con el conjunto cociente

$$\mathbb{P}^n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m,$$

y la proyección canónica está dada por

$$\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n,\ (x_0, \ldots, x_n) \longmapsto [x_0, \ldots, x_n].$$

Luego, dotamos a $\mathbb{P}^n$ de la topología de Zariski (cociente). Más aún, definimos el haz estructural de $\mathbb{P}^n$ mediante

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} := \pi_*((\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}})^{\mathbb{G}_m}),$$

i.e., $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} = \pi_*(\mathscr{F})$ es la imagen directa por π del sub-haz $\mathscr{F} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}})^{\mathbb{G}_m}$ de $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}}$ dado por las funciones regulares que son $\mathbb{G}_m$-invariantes.

Concretamente, una sección (local) de $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}}$ es una función racional de la forma

$$u(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ donde } P, Q \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1}).$$

Por otra parte, las secciones $\mathbb{G}_m$-invariantes deben cumplir que

$$u(\lambda x) = u(x), \text{ i.e., } \frac{P(\lambda x)}{Q(\lambda x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

No es difícil notar[5] que esto último equivale a que $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ y $Q(\lambda x) = \lambda^d Q(x)$ para cierto $d \in \mathbb{N}$. En otras palabras, una sección local de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}$ es una función racional dada por el cociente de dos *polinomios homogéneos del mismo grado.*

[5] e.g. escribiendo P y Q como suma de polinomios homogéneos, y pensando $u(\lambda x) = u(x)$ como una identidad entre polinomios en la variable λ.

Finalmente, veamos que el espacio anillado $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n})$ es efectivamente una variedad algebraica:

Sea $A_i \cong \mathbb{A}^n$ el subespacio afín

$$A_i := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \text{ tal que } x_i = 1\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

Consideremos el abierto $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$ dado por

$$U_i := \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } x_i \neq 0\},$$

y notar que $\pi(A_i) = U_i$. Más aún, podemos encontrar una inversa $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} A_i$ al definir

$$\varphi_i([x]) = \varphi_i([x_0, \ldots, x_n]) := \frac{x}{x_i} \overset{\mathsf{def}}{=} \left(\frac{x_0}{x_1}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right),$$

la cual está bien definida y nos da un homeomorfismo entre U_i y A_i (de inversa $\pi|_{A_i} : A_i \to U_i$).

Por otro lado, si $V \subseteq A_i \cong \mathbb{A}^n$ es un abierto de Zariski y $f \in \mathscr{O}_{A_i}(V)$ es una función regular, entonces la función

$$\varphi_i^*(f) \overset{\mathsf{def}}{=} f \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(V) \longrightarrow k$$

es regular en el abierto $\varphi_i^{-1}(V)$. Así, obtenemos un isomorfismo de haces en k-álgebras $\varphi_i^* : \mathscr{O}_{A_i} \xrightarrow{\sim} (\varphi_i)_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i})$ que está dado explícitamente por

$$\begin{aligned}
(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i})(\varphi_i^{-1}(V)) &\cong \mathscr{O}_{A_i}(V) \\
\frac{P(x_0, \ldots, x_n)}{Q(x_0, \ldots, x_n)} &\xmapsto{(\varphi_i^*)^{-1}} \frac{P(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{Q(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)} \\
\varphi_i^*(f) \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{A\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)}{B\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)} &\xleftarrow{\ \varphi_i^*\ } f = \frac{A(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{B(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}
\end{aligned}$$

Luego, obtenemos un isomorfismo de espacios anillados

$$(\varphi_i, \varphi_i^*) : (U_i, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i}) \xrightarrow{\sim} (A_i, \mathscr{O}_{A_i})$$

para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, de donde concluímos que $(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n})$ es una variedad algebraica. $\square$

Ejercicio 2.3.12. — Probar que toda función regular en el espacio proyectivo definida globalmente es constante, i.e.,

$$\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k,$$

y deducir que $\mathbb{P}^n$ **no** es una variedad algebraica afín.
Indicación: Una función regular definida globalmente *puede restringirse a cada uno de los abiertos $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$.*

Recordemos que una función continua $f : X \to Y$ entre dos variedades algebraicas es un **morfismo regular** si para todo abierto $V \subseteq Y$ y toda función regular $u : V \to k$, la función continua $f^*(u) \stackrel{\text{def}}{=} u \circ f : f^{-1}(V) \to k$ es regular, i.e., si se tiene

$$f^* : \mathscr{O}_Y \longrightarrow f_*\mathscr{O}_X \subseteq f_*\mathscr{C}_X$$

a nivel de haces en k-álgebras.

El siguiente resultado fundamental señala que en realidad todo morfismo de variedades algebraicas es regular.

Teorema 2.3.13. — *Sean X e Y variedades algebraicas, y sea*

$$(f, \varphi) : (X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{O}_Y)$$

un morfismo de espacios anillados dado por $f : X \to Y$ función continua y por $\varphi : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$ morfismo de haces en k-álgebras. Entonces, $f : X \to Y$ es un morfismo regular y además $\varphi = f^*$.

Idea de demostración. — La afirmación es *local* en Y, por lo que podemos suponer que Y es una variedad afín, i.e., $Y \subseteq \mathbb{A}^m$. Además, cubriendo X por abiertos afines

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

obtenemos $f_*\mathscr{O}_X \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I} (f|_{U_i})_*\mathscr{O}_{U_i}$, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X = U_i$ es una variedad afín, i.e., $X \subseteq \mathbb{A}^n$.

Sean $A = \mathscr{O}(X)$ y $B = \mathscr{O}(Y)$ anillos de funciones regulares, y sea $\varphi : B \to A$ morfismo de k-álgebras. Dado $x \in X$, consideramos $\mathfrak{m}_x \subseteq A$ el ideal maximal correspondiente. Luego, sabemos que la preimagen $\eta := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ es un ideal primo en B.

Sin embargo, se puede verificar[6] que el morfismo natural $B/\eta \hookrightarrow A/\mathfrak{m}_x \cong k$ es en realidad un isomorfismo, y por ende $\eta \subseteq B$ es un ideal maximal. En particular, el Hilbert Nullstellensatz nos asegura que $\eta = \eta_y$ corresponde a un punto $y \in Y$, que por construcción verifica $y = f(x) \in Y$. Así, para toda

[6] Si $\varphi : B \to A$ es un morfismo de k-álgebras finitamente generadas y $\mathfrak{m} \subseteq A$ es un ideal maximal, entonces $\eta := \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ es un ideal maximal de B. En efecto, el Hilbert Nullstellensatz implica que $A/\mathfrak{m} \cong k$ y luego el morfismo inyectivo $B/\eta \hookrightarrow A/\mathfrak{m} \cong k$ permite ver B/η como una k-álgebra de dimensión 1, y luego $B/\eta \cong k$, i.e., η es maximal.

función regular $u \in B \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}(Y)$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
u \in B \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, mapsto] \arrow[d] & & A \ni \varphi(u) \arrow[d] \arrow[d, mapsto] \\
u_y \in \mathscr{O}_{Y,y} \arrow[d, mapsto] \arrow[d, "\mathrm{ev}_y"] & & \mathscr{O}_{X,x} \ni \varphi(u)_x \arrow[d, "\mathrm{ev}_x"'] \arrow[d, mapsto] \\
u(y) \in \mathscr{O}_{Y,y}/\eta_y \cong k \arrow[rr, "\mathrm{Id}_k"] & & k \cong \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \ni \varphi(u)(x)
\end{tikzcd}$$

Así, para todo $x \in X$ se cumple $(f^*(u))(x) \stackrel{\mathsf{def}}{=} u(f(x)) \stackrel{\mathsf{def}}{=} u(y) = \varphi(u)(x)$ y luego $\varphi = f^*$ en B. □

2.4. Introducción a los esquemas

La teoría de esquemas comienza en 1960, cuando Alexander Grothendieck (asistido por Jean Dieudonné) establece los fundamentos de la geometría algebraica moderna en su serie de obras "*Éléments de géométrie algébrique*" (1960–1967, ≈ 1500 páginas).

Recuerdo 2.4.1. — Sea A un anillo conmutativo con unidad. Recordemos que $S \subseteq A$ es un **conjunto multiplicativo** si $1 \in S$ y si para todos $s, s' \in S$ se tiene que $ss' \in S$. Luego, si en $A \times S$ definimos la relación de equivalencia

$$(a, s) \sim (a', s') \text{ si y sólo si existe } t \in S \text{ tal que } t(as' - a's) = 0.$$

entonces definimos la **localización** de A respecto a S como el anillo cociente $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$, donde denotamos por $\frac{a}{s}$ la clase de equivalencia de (a, s) (y donde sumamos y multiplicamos "fracciones" de la manera usual). Por ejemplo,

(1) Sea A un dominio entero. Entonces, $S := A \setminus \{0\}$ es un conjunto multiplicativo y en este caso $S^{-1}A := \mathrm{Fr}(A)$ es el **cuerpo de fracciones** de A (e.g. $\mathrm{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$).

(2) Sea $f \in A$ y $S := \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ conjunto multiplicativo. Entonces $S^{-1}A := A_f$ es la **localización de A respecto a f**. Notar que $A_f \neq 0$ si y sólo si f **no** es nilpotente. Además, hay un isomorfismo

$$A_f \cong A[X]/\langle fX - 1\rangle.$$

En particular, si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica afín y $U_f = X \setminus V(f)$ es un abierto principal definido por $f \in \mathscr{O}(X)$, entonces

$$\mathscr{O}_X(U_f) \cong \mathscr{O}(X)_f.$$

(3) Sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo, y sea $S := A \setminus \mathfrak{p}$ conjunto multiplicativo. Entonces $S^{-1}A := A_{\mathfrak{p}}$ es la **localización de A en $\mathfrak{p}$**. Más aún, $A_{\mathfrak{p}}$ es un *anillo local* con único ideal maximal dado por $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \overset{\mathsf{def}}{=} \{\frac{a}{s}$ con $a \in \mathfrak{p}$ y $s \notin \mathfrak{p}\}$, puesto que todo elemento fuera de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ es invertible en $A_{\mathfrak{p}}$.

Además, se verifica la propiedad universal siguiente:

Sea $\iota_S : A \to S^{-1}A,\ a \mapsto \frac{a}{1}$ el morfismo canónico asociado a la localización. Entonces,

> Para todo morfismo de anillos $\varphi : A \to B$ tal que la imagen de S es invertible en B (i.e., $\varphi(s) \in B^{\times}$ para todo $s \in S$), existe un *único* morfismo de anillos $\widehat{\varphi} : S^{-1}A \to B$ tal que $\widehat{\varphi}(\frac{a}{s}) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$.

En otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota_S"'] & & B \\ & S^{-1}A \arrow[ur, "\exists!\,\widehat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

La localización de anillos será crucial para probar el siguiente resultado.

Teorema 2.4.2. — *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, hay una equivalencia de categorías entre:*

(1) *La categoría $\mathbf{Aff}_{k,\mathrm{red}}$ de variedades algebraicas (reducidas) afines definidas sobre k.*
(2) *La categoría $\mathbf{Alg}_{k,\mathrm{red}}$ de k-álgebras conmutativas finitamente generadas y* reducidas *(i.e., sin elementos nilpotentes no-triviales).*

Demostración. — Dada una variedad algebraica afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$, el álgebra de funciones regulares

$$\mathscr{O}(X) \cong k[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(X)$$

es finitamente generada y reducida. Además, a cada morfismo $f : X \to Y$ entre variedades algebraicas afines asociamos (de manera contravariante) un morfismo $f^* : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$ entre las k-álgebras correspondientes.

Para obtener la equivalencia de categorías, asociaremos (de manera functorial) a cada k-álgebra reducida y finitamente generada A una variedad algebraica afín $(X, \mathscr{O}_X)$, llamada el **espectro maximal** de A:

Consideremos el conjunto

$$X := \operatorname{Specm}(A) \overset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal}\}$$

de ideales maximales de A. Dotamos a X de la *topología de Zariski* obtenida al declarar que los cerrados de X son los conjuntos de la forma

$$V(I) := \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal tal que } I \subseteq \mathfrak{m}\}$$

para algún ideal $I \subseteq A$. Más aún, notamos que dado $f \in A$ no-nulo los abiertos de la forma

$$U_f := \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal tal que } f \notin \mathfrak{m}\} = X \setminus V(f)$$

forman una base de la topología de Zariski, y por ende(7) pueden ser utilizados para definir un haz $\mathscr{O}_X$:

Para cada $f \in A$ no-nulo, definimos

$$\mathscr{O}_X(U_f) := A_f,$$

la localización de A respecto a f. Así, una sección $s \in \mathscr{O}_X(U_f)$ es un elemento de la forma $s = \frac{u}{f^n}$ para ciertos $u \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Para definir los morfismos de restricción, notamos que por definición se tiene que $U_f \cap U_g \overset{\text{def}}{=} U_{fg}$, y por ende basta considerar las inclusiones de la forma $U_{fg} \subseteq U_g$. En tal caso, definimos el *morfismo de restricción* mediante

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_X(U_f) \overset{\text{def}}{=} A_f &\longrightarrow \mathscr{O}_X(U_{fg}) \overset{\text{def}}{=} A_{fg} \\ s = \frac{u}{f^n} &\longmapsto \frac{ug^n}{(fg)^n} \end{aligned}$$

Veamos que el prehaz $\mathscr{O}_X$ es efectivamente un haz. Para ello, consideremos $U_f = \bigcup_{i\in I} U_{g_i}$ cubrimiento abierto, i.e., $V(f) = \bigcap_{i\in I} V(g_i)$. Notar que está última condición equivale a:

> "Para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, se tiene que $f \in \mathfrak{m}$ si y sólo si $g_i \in \mathfrak{m}$ para todo $i \in I$."

En particular, dado que f es *invertible* en A_f (i.e., $f \notin \eta$ para todo ideal maximal $\eta \subseteq A_f$) se tiene que **no existe** un ideal maximal $\eta \subseteq A_f$ tal que $\langle \{g_i\}_{i\in I}\rangle \subseteq \eta$, i.e., el ideal generado por los $\{g_i\}_{i\in I}$ es todo el anillo A_f. Más aún, dado que para todo $m_i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que $V(g_i^{m_i}) \overset{\text{def}}{=} V(g_i)$, podemos reemplazar g_i por $g_i^{m_i}$ en el razonamiento anterior para deducir que:

(7)Ver la Sección 2.5 de [**Vak17**] para más detalles sobre el hecho que basta definir un haz utilizando *una base* de un espacio topológico (esto el haz en todo abierto).

($\star$) Existen finitos $v_i \in A_f$ y tales que $\sum_{\text{finita}} v_i g_i^{m_i} = 1$ en A_f.

Con esto en mente, veamos que $\mathscr{O}_X$ es un haz:

(1) **Pegado.** Sean $s_i \in \mathscr{O}(U_{g_i}) \overset{\mathsf{def}}{=} A_{g_i}$ secciones de la forma $s_i = \frac{u_i}{g_i^{n_i}}$ para ciertos $u_i \in A$ y $n_i \in \mathbb{N}$, y supongamos que $s_i|_{U_{g_i g_j}} = s_j|_{U_{g_i g_j}}$ para todos $i, j \in I$. Por definición, esto último equivale a que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$(g_i g_j)^N (u_i g_j^{n_j} - u_j g_i^{n_i}) = 0 \text{ en } A_f.$$
Eligiendo $m_i := n_i + N$ en ($\star$), obtenemos que $\sum_i v_i g_i^{n_i+N} = 1$ en A_f. Al multiplicar esta igualdad por $g_j^N u_j$ obtenemos que
$$g_j^N u_j = \sum_i v_i (g_i g_j)^N u_j g_i^{n_i} \overset{\mathsf{def}}{=} \sum_i v_i (g_i g_j)^N u_i g_j^{n_j} = g_j^{n_j+N} \cdot s,$$
donde $s := \sum_i u_i v_i g_i^N$ en A_f. La restricción de $s \in A_f \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_X(U_f)$ a $A_{g_j} \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_X(U_{g_j})$ es s_j, puesto que:
$$s_j = \frac{u_j}{g_j^{n_j}} = \frac{g_j^N u_j}{g_j^{n_j+N}} \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{g_j^{n_j+N} s}{g_j^{n_j+N}} = s \text{ en } A_{g_j},$$
de donde obtenemos la condición de pegado.

(2) **Unicidad.** Sea $s \in \mathscr{O}_X(U_f) \overset{\mathsf{def}}{=} A_f$ tal que para todo $i \in I$ se tiene que $s|_{U_{g_i}} = 0$ en $\mathscr{O}_X(U_{g_i}) \overset{\mathsf{def}}{=} A_{g_i}$. Dada $s = \frac{u}{f^n}$ en A_f, tenemos (por definición) que $s = 0$ en A_{g_i} si existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $g_i^{m_i} u = 0$ en A_f. Así, ($\star$) implica que existen $v_i \in A_f$ tales que $\sum_i v_i g_i^{m_i} = 1$ y luego
$$u = \sum_i v_i (g_i^{m_i} u) \overset{\mathsf{def}}{=} 0 \text{ en } A_f,$$
de donde concluímos que $s = 0$ en A_f, y con ello la unicidad deseada.

En conclusión, tenemos que $(X, \mathscr{O}_X)$ es un espacio anillado. Veamos ahora que es una variedad algebraica afín:

Sean $a_1, \dots, a_n \in A$ generadores de la k-álgebra A, y consideremos el morfismo sobreyectivo
$$k[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow A,\ X_i \longmapsto a_i$$
cuyo kernel es un ideal $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ que cumple $A \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/I$.

Por hipótesis, A es reducida y por ende tenemos que $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ es un *ideal radical.* Luego, $V(I) =: Y \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica afín que verifica $\mathcal{I}(Y) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I} = I$, y luego $\mathscr{O}(Y) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(Y) \cong A$. En particular, $\mathscr{O}(Y)$ tiene "*los mismos*" ideales maximales que A, en el sentido que el Hilbert Nullstellensatz nos da una biyección

$$Y \xrightarrow{\sim} X = \mathrm{Specm}(A), \ y \longmapsto \mathfrak{m}_y = \{f \in \mathscr{O}(Y) \cong A \text{ tal que } f(y) = 0\}.$$

Más aún, para cada $f \in \mathscr{O}(Y) \cong A$ no-nula, se tienen homeomorfismos

$$Y_f := \{y \in Y \text{ tal que } f(y) \neq 0\} \xrightarrow{\sim} U_f \subseteq X,$$

donde además $\mathscr{O}_Y(Y_f) \cong A_f \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_X(U_f)$. Finalmente, como ya se ha discutido previamente, notamos que Y_f es una variedad algebraica afín ya que

$$Y_f \cong \{(y,t) \in \mathbb{A}^{n+1} \text{ tal que } y \in Y \text{ y tal que } f(y)t = 1\}.$$

En otras palabras, $(X, \mathscr{O}_X)$ es una variedad algebraica afín y por lo tanto[(8)] obtenemos el functor contravariante deseado

$$\mathrm{Specm} : \mathbf{Alg}_{k,\mathrm{red}} \longrightarrow \mathbf{Aff}_{k,\mathrm{red}}$$

que permite obtener la equivalencia de categorías. □

En palabras simples, la *teoría de esquemas* busca reemplazar la categoría $\mathbf{Alg}_{k,\mathrm{red}}$ por k-álgebras (¡o incluso anillos!) más generales, y obtener (usando "espectros") objetos geométricos más generales: los **esquemas**.

Observación importante 2.4.3. — Un caso particular importante muy utilizado es el caso de una k-álgebra finitamente generada A que **no** necesariamente es reducida (e.g. $A = k[X,Y]/\langle Y^2 \rangle$).

La construcción del espacio anillado $\mathrm{Specm}(A)$ se extiende *verbatim* a este contexto, y diremos que es un **esquema afín** (de tipo finito) **sobre** k. Concretamente, si $A \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/I$ donde I es un ideal (no necesariamente radical), entonces el espacio anillado está dado por el espacio topológico

$$X := \mathrm{Specm}(A) = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal}\}$$

que es homeomorfo a (el espacio topológico subyacente a) la variedad algebraica afín $V(I) := X_{\mathrm{red}} \subseteq \mathbb{A}^n$. La gran diferencia es que el haz estructural está dado por $\mathscr{O}_X(U_f) := A_f$ para cada $f \in A$ elemento *no-nilpotente*.

Cabe destacar que si $x \in X$ corresponde al ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, entonces $\mathscr{O}_{X,x} \cong A_{\mathfrak{m}}$ es la localización en $\mathfrak{m}$, el cual es un anillo local con único ideal maximal $\mathfrak{m}_x := \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ y que cumple $\kappa(\mathfrak{m}) := A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m} \cong k$.

---

(8)Recordar que todo morfismo abstracto entre k-álgebras de funciones regulares de variedades algebraicas afines proviene de un morfismo regular, por lo que basta definir el functor en los objetos de la categoría $\mathbf{Alg}_{k,\mathrm{red}}$.

En particular, si bien $f \in \mathscr{O}_X(U)$ **no es** realmente una función, de todas formas podemos definir su valor en $x \in X$ como

$$f(x) := [f] \in \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k.$$

Por ejemplo, si $f \in \mathscr{O}_X(U)$ es *nilpotente*, entonces $f(x) \in k$ también es nilpotente y luego $f(x) = 0$. Además, si denotamos por

$$\operatorname{Nil}(A) \overset{\text{def}}{=} \{a \in A \text{ tal que existe } m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } a^m = 0\}$$

el **nilradical** de A, y definimos por

$$A_{\text{red}} := A/\operatorname{Nil}(A)$$

el anillo reducido asociado[9] a A, entonces el morfismo sobreyectivo

$$A \twoheadrightarrow A_{\text{red}}$$

induce una inclusión de espacios anillados

$$X_{\text{red}} = \operatorname{Specm}(A_{\text{red}}) \hookrightarrow X = \operatorname{Specm}(A)$$

que es la identidad a nivel de espacios topológicos.

Las mismas ideas utilizadas para probar el resultado principal de esta sección permiten de hecho probar el siguiente resultado (que enunciaremos sin demostración).

Teorema 2.4.4. — *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, hay una equivalencia de categorías entre:*

(1) *La categoría $\mathbf{Aff}_k$ de esquemas afines (de tipo finito) definidos sobre k.*
(2) *La categoría $\mathbf{Alg}_k$ de k-álgebras conmutativas finitamente generadas.*

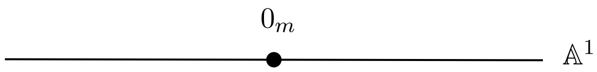
Terminemos dando algunos ejemplos (informales) que ilustran la utilidad de la teoría de esquemas. Para más detalles recomiendo el texto [**EH00**].

Ejemplo 2.4.5. —

(1) En $\mathbb{A}^1 = \operatorname{Specm}(k[X])$ consideramos el sub-esquema afín dado por

$$0_m := \operatorname{Specm}(k[X]/\langle X^m \rangle)$$

que no es reducido si $m \geq 2$. Intuitivamente, 0_m representa al *origen de multiplicidad m*:



[9] Por ejemplo, si $A = \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/I$ entonces $A_{\text{red}} = \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/\sqrt{I}$.

Notar que si pensamos un punto $x \in X \subseteq \mathbb{A}^n$ en una variedad algebraica afín como un morfismo

$$\begin{aligned} \varphi_x : \operatorname{Specm}(k) &\hookrightarrow \operatorname{Specm}(\mathscr{O}(X)) \\ \{*\} &\longmapsto x \end{aligned}$$

Así, podemos pensar puntos de mayor multiplicidad como morfismos

$$\begin{aligned} \varphi_{x_m} : \operatorname{Specm}(k[X]/\langle X^m\rangle) &\hookrightarrow \operatorname{Specm}(\mathscr{O}(X)) \\ \{*\} &\longmapsto x \end{aligned}$$

Por ejemplo, si consideramos el **anillo de números duales**, definido por Clifford en 1873 para dar un análogo algebraico a la intución de *aproximación infinitesimal de primer orden*, dado por

$$D := k[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2 \rangle,$$

entonces los elementos $a + \varepsilon b \in D$ son tales que $a, b \in k$ y $\varepsilon^2 = 0$. Luego, el espacio tangente $T_{X,x}$ de X en $x \in X$ puede pensarse como el conjunto de morfismos

$$\begin{aligned} \operatorname{Specm}(k[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2\rangle) &\hookrightarrow \operatorname{Specm}(\mathscr{O}(X)) \\ \{*\} &\longmapsto x \end{aligned}$$

lo cual se traduce[(10)] en resolver las ecuaciones que definen X en el anillo D en lugar de k.

(2) Para ejemplificar el punto (1), consideremos la variedad algebraica afín dada por el **grupo ortogonal**

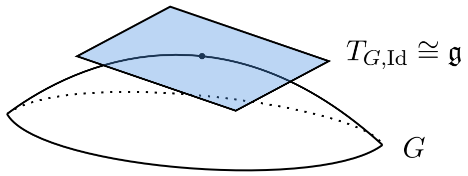
$$X := O_n(\mathbb{R}) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{A \in M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{A}^{n^2} \text{ tales que } {}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n\} \subseteq \mathbb{A}^{n^2},$$

que además es un grupo de Lie (y un grupo algebraico). Dada una matriz ortogonal $A \in X$, tenemos que $A + \varepsilon B \in O_n(\mathbb{R}[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2 \rangle)$ si y sólo si ${}^{\mathrm{t}}(A + \varepsilon B)(A + \varepsilon B) = \mathrm{I}_n$, i.e.,

$${}^{\mathrm{t}}AA + \varepsilon({}^{\mathrm{t}}BA + {}^{\mathrm{t}}AB) + \varepsilon^2\, {}^{\mathrm{t}}BB = \mathrm{I}_n,$$

de donde deducimos que $T_{X,A} \cong \{B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } {}^{\mathrm{t}}BA = -\,{}^{\mathrm{t}}AB\}$.

(10) Nosotros adoptaremos un punto de vista ligeramente diferente más adelante. Sin embargo, una lectura recomendada en esta dirección es el Capítulo 5 de [**Per08**].



Así, el espacio tangente en la matriz identidad está dado por

$$\mathfrak{g} := T_{O_n(\mathbb{R}),\mathrm{I}_n} \cong \{B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } {}^{\mathrm{t}}B = -B\},$$

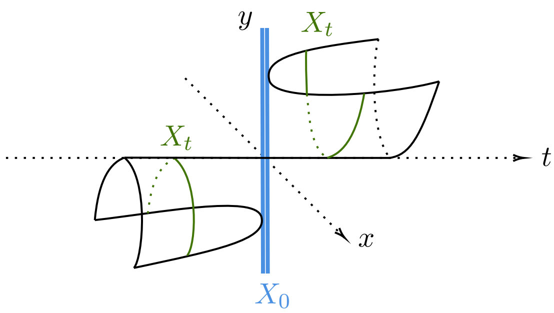
que corresponde al **álgebra de Lie** asociada al grupo de Lie $O_n(\mathbb{R})$.

(3) Otra instancia típica donde aparecen los esquemas de forma natural es el estudiar familia de variedades algebraicas. Por ejemplo, consideremos

$$X = \{(x, y, t) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } yt = x^2\}$$

y sea $\varphi : X \to \mathbb{A}^1$, $(x, y, t) \mapsto t$. Así, para cada $t \in \mathbb{A}^1$ definimos la **fibra** de φ en t como el sub-esquema afín dado por

$$X_t := \mathrm{Specm}(k[X, Y]/\langle Yt - X^2\rangle).$$



Entonces, para $t \neq 0$ se tiene que X_t es una sub-variedad afín reducida (una parábola), mientras que para $t = 0$ obtenemos un esquema afín no-reducido (una recta doble).

Observación 2.4.6. — Más generalmente, Grothendieck introduce la noción más general de **espectro** de un anillo conmutativo A *arbitrario* mediante

$$\mathrm{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ ideal primo}\},$$

y define la correspondiente *topología de Zariski* al considerar como cerrados de $X = \mathrm{Spec}(A)$ a los subconjuntos de la forma

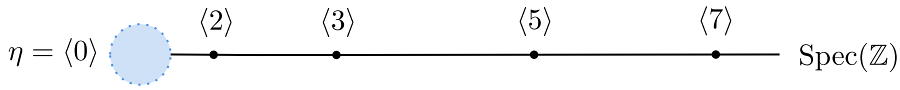
$$V(I) = \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ ideal primo tal que } I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

El haz estructural $\mathscr{O}_X$ se define exactamente como antes, mediante la regla $\mathscr{O}_X(U_f) := A_f$. En particular, si $x \in X$ corresponde al ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$, entonces $\mathscr{O}_{X,x} \cong A_{\mathfrak{p}}$ es la localización en $\mathfrak{p}$.

Por ejemplo, si $A = \mathbb{Z}$ entonces

$$\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) = \langle 0 \rangle \cup \{\langle p \rangle \text{ con } p \text{ número primo}\}.$$

En particular, $\overline{\langle p \rangle}^{\text{Zar}} = \langle p \rangle$ es un punto *cerrado*, mientras que $\overline{\langle 0 \rangle}^{\text{Zar}} = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ es un *punto denso* (o *punto genérico*).



Además, podemos calcular que $\mathscr{O}_{X,\langle 0 \rangle} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_{\langle 0 \rangle} \cong \mathbb{Q}$, mientras que

$$\mathscr{O}_{X,\langle p \rangle} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}, \text{ y luego } \mathscr{O}_{X,\langle p \rangle}/\mathfrak{m}_{\langle p \rangle} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Z}_{\langle p \rangle}/p\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} \cong \mathbb{F}_p.$$

2.5. Atlas algebraicos

Del mismo modo que podemos construir variedades diferenciables (resp. variedades complejas) *pegando* abiertos de $\mathbb{R}^n$ (resp. abiertos de $\mathbb{C}^n$) mediante cambios de carta diferenciables (resp. holomorfos), podemos construir variedades algebraicas pegando variedades afines mediante un *atlas algebraico.*

Teorema 2.5.1. — *Sea X un espacio topológico. Consideremos dado:*

(1) *Un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X.*
(2) *Para cada $i \in I$, un haz de k-álgebras $\mathscr{A}_i$ en U_i.*
(3) *Para todos $i, j \in I$, un isomorfismo de haces*

$$\varphi_{ji} : \mathscr{A}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_j|_{U_i \cap U_j}$$

que verifica

(a) $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}_i}$ *para todo* $i \in I$.
(b) *Para todos $i, j, k \in I$ se tiene que $\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$.*

Entonces, existe un único *haz de k-álgebras $\mathscr{A}$ en X junto con isomorfismos de haces*

$$\varphi_i : \mathscr{A}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_i \text{ en } U_i,$$

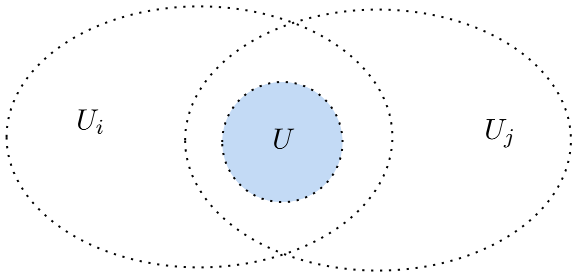
tales que $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ en $U_i \cap U_j$.

Demostración. — Los abiertos $U \subseteq X$ contenidos en alguno de los U_i forman una base de abiertos para la topología de X. Para un tal abierto $U \subseteq X$, definimos

$$\mathscr{A}(U) := \left(\coprod_{\substack{i\in I \\ U\subseteq U_i}} \mathscr{A}_i(U) \right) / \sim$$

donde

> $(s, U_i) \sim (t, U_j)$, con $s \in \mathscr{A}_i(U)$ y $t \in \mathscr{A}_j(U)$, si se verifica que $t = \varphi_{ji}(s)$ en $\mathscr{A}_j|_{U_i\cap U_j}(U)$.



Las condiciones (a) y (b) aseguran que $\sim$ es una relación de equivalencia, y en el cociente definimos (canónicamente) una estructura de haz de k-álgebras de tal suerte que

$$\mathscr{A}_i(U) \longrightarrow \mathscr{A}(U),\ s \longmapsto [s]$$

sea un isomorfismo. Más aún, el hecho que los $\mathscr{A}_i$ son haces implica que $\mathscr{A}$ es un haz y que es único. □

Ejemplo importante 2.5.2. — Sea X un espacio topológico noetheriano, y supongamos que cada espacio anillado $(U_i, \mathscr{A}_i)$ es una variedad algebraica (arbitraria, no necesariamente afín). Entonces, el espacio anillado $(X, \mathscr{A})$ es una variedad algebraica.

Concretamente, el ejemplo anterior nos permite *pegar* variedades algebraicas.

Definición 2.5.3. — Sea X un espacio topológico noetheriano. Entonces, un **atlas algebraico** en X consiste en un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ y una colección de homeomorfismos

$$\alpha_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i$$

llamados **cartas locales**, donde $(V_i, \mathscr{O}_{V_i})$ es una variedad algebraica para cada $i \in I$ y donde se cumple:

Si denotamos por $V_{ij} \subseteq V_i$ a la imagen de $U_i \cap U_j \subseteq U_i$ por α_i, entonces para todos $i, j \in I$ se tiene un isomorfismo regular

$$\psi_{ji} := \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$$

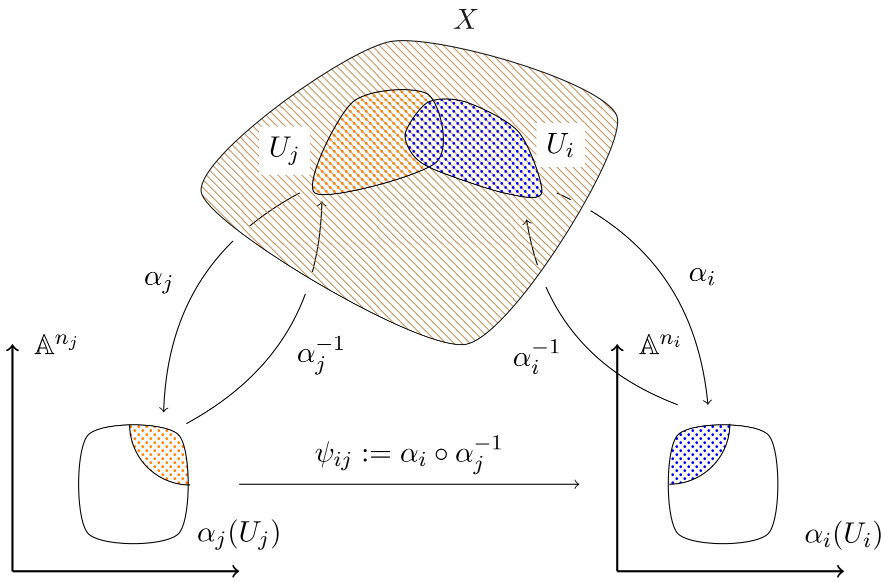
entre las variedades algebraicas V_{ij} y V_{ji}, llamado usualmente como el **cambio de cartas**.

El espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ obtenido al pegar los haces estructurales de cada abierto U_i es la variedad algebraica asociada al atlas algebraico. En particular, dada otra variedad algebraica Y, una función

$$f : X \longrightarrow Y$$

es regular si y sólo si la restricción $f_i := f|_{U_i} : U_i \to Y$ es regular (i.e., la aplicación $f_i \circ \alpha_i^{-1} : V_i \to Y$ es regular) para todo $i \in I$.

Ejemplo 2.5.4. — En el caso en que el espacio topológico noetheriano X puede ser cubierto por abiertos *afines* U_i, la noción de atlas algebraico permite extender al contexto de la geometría algebraica la construcción de variedades diferenciables o complejas.



Ejemplo importante 2.5.5. — Sean $[x, y]$ coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^1 \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$ y sean:

$$U_0 := \{[x, y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tal que } x \neq 0\} \text{ y } U_1 := \{[x, y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tal que } y \neq 0\}.$$

Consideremos cartas locales dadas por

$$\alpha_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 := \mathbb{A}^1,\ [x,y] \longmapsto \frac{y}{x} \text{ y por } \alpha_1 : U_1 \xrightarrow{\sim} V_1 := \mathbb{A}^1,\ [x,y] \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Notar que $\alpha_0(U_0 \cap U_1) = \alpha_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Más aún, si z es una coordenada en $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, entonces $\psi_{01} := \alpha_1 \circ \alpha_0^{-1}$ está dada por

$$\psi_{01}(z) = \frac{1}{z}$$

que es un morfismo birregular.

El ejemplo anterior se generaliza a toda dimensión, como lo muestra el siguiente ejercicio útil.

Ejercicio 2.5.6. — Describir un atlas algebraico en $\mathbb{P}^n$ considerando el cubrimiento abierto dado por los *abiertos estándar*

$$U_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } x_i \neq 0\},$$

y considerando las cartas locales

$$\alpha_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n,\ [x_0, \dots, x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_1}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

2.6. Producto de variedades y separación

La noción de *producto* es púramente categórica. Más precisamente, si $\mathscr{C}$ es una categoría y X, Y son objetos de $\mathscr{C}$, entonces un **producto** de X e Y en $\mathscr{C}$ es un tercer objeto Z junto con dos morfismos $p : Z \to X$ y $q : Z \to Y$ verificando la propiedad universal siguiente:

Para todo objeto S en la categoría $\mathscr{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, Z) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(S, Y) \\ f &\longmapsto (p \circ f, q \circ f) \end{aligned}$$

es biyectiva.

En otras palabras, tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dr, dotted, "\exists!"] \arrow[drr, bend left, "\widetilde{q}"] \arrow[ddr, bend right, "\widetilde{p}"'] & & \\
& Z \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"'] & Y \\
& X &
\end{tikzcd}$$

En particular, el triple (Z, p, q) es único módulo un único isomorfismo, y se denota usualmente por $Z := X \times Y$ y por $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ las respectivas *proyecciones*.

Ejemplo 2.6.1. — En la categoría de variedades algebraicas, el espacio afín $\mathbb{A}^{n+m}$, dotado de las proyecciones canónicas $p := \mathrm{pr}_1 : \mathbb{A}^{n+m} \to \mathbb{A}^n$ y $q := \mathrm{pr}_2 : \mathbb{A}^{n+m} \to \mathbb{A}^m$ es el producto de $\mathbb{A}^n$ y $\mathbb{A}^m$.

Más generalmente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.6.2. — *Los productos (finitos) existen en la categoría de variedades algebraicas afines.*

Demostración. — Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines dadas por $X = V(f_1, \ldots, f_r)$ y por $Y = V(g_1, \ldots, g_s)$. Entonces, el producto conjuntista $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ es una subvariedad afín definida por las ecuaciones

$$X \times Y \stackrel{\mathsf{def}}{=} V(f_1(x), \ldots, f_r(x), g_1(y), \ldots, g_s(y)) \subseteq \mathbb{A}^{n+m}.$$

Además, las proyecciones

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X \text{ y } \mathrm{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y$$

son regulares, y luego para verificar la propiedad universal basta notar que si S es una variedad algebraica afín y si

$$u : S \to X,\ s \mapsto (u_1(s), \ldots, u_n(s)) \text{ y } v : S \to Y,\ s \mapsto (v_1(s), \ldots, v_m(s))$$

son morfismos regulares, entonces necesariamente tenemos que

$$f : S \to X \times Y,\ s \mapsto f(s) := (u_1(s), \ldots, u_n(s), v_1(s), \ldots, v_m(s))$$

es regular. $\square$

Observación importante 2.6.3. — La topología de $X \times Y$ **no** es la topología producto, i.e., **no** es la topología generada por abiertos de la forma $U \times V$ con $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos. Por ejemplo, los cerrados en $X = Y = \mathbb{A}^1$ son $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ y los conjuntos finitos. Sin embargo, $X \times Y = \mathbb{A}^2$ posee más cerrados (e.g. *curvas* dadas por $\{f(x, y) = 0\}$ donde $f \in k[X, Y]$ no-constante).

Lema 2.6.4. — *Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Entonces,*

$$\begin{aligned} \mathscr{O}(X) \otimes_k \mathscr{O}(Y) &\xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(X \times Y) \\ \sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) \otimes g_j(y) &\longmapsto \sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) g_j(y) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. — Recordar que todo k-espacio vectorial posee una base (de Hamel). En particular, si $\{f_i\}$ es una base de $\mathscr{O}(X)$ y $\{g_j\}$ es una base de $\mathscr{O}(Y)$, entonces $\{f_i \otimes g_j\}$ es una base de $\mathscr{O}(X) \otimes_k \mathscr{O}(Y)$. Luego, si $\sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) \otimes g_j(y)$ verifica que $\sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) g_j(y) = 0$ entonces para todo j tenemos que $\sum_i a_{ij} f_i(x) = 0$ y luego $a_{ij} = 0$, de donde deducimos la inyectividad.

Por otro lado, si $h(x, y)$ es una función regular en $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ dada por la restricción del polinomio

$$P(x, y) = \sum_{i,j} P_i(x) Q_j(y)$$

en $\mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+m})$, entonces $u_i := P_i|_X \in \mathscr{O}(X)$ y $v_j := Q_j|_Y \in \mathscr{O}(Y)$ permiten escribir a h como la imagen de $\sum_{i,j} u_i \otimes v_j \in \mathscr{O}(X) \otimes_k \mathscr{O}(Y)$, de donde se deduce la sobreyectividad. $\square$

Más generalmente, tenemos el siguiente resultado (y definición) para variedades algebraicas arbitrarias.

Teorema 2.6.5. — *Los productos (finitos) existen en la categoría de variedades algebraicas.*

Demostración. — Sean X e Y variedades algebraicas. Consideremos cubrimientos por abiertos afines $\{U_i\}_{i \in I}$ y $\{V_j\}_{j \in J}$, respectivamente. Sabemos por los resultados anteriores que $U_i \times V_j$ es una variedad algebraica afín, y luego construiremos $Z = X \times Y$ usando el atlas algebraico definido por los conjuntos $Z_{ij} := U_i \times V_j$ con $i \in I$ y $j \in J$. En particular, $Z_{ij} \cap Z_{kl} \overset{\text{def}}{=} (U_i \cap U_k) \times (V_j \cap V_l)$. Concretamente, dotamos al conjunto $X \times Y$ de la topología siguiente:

> Un *abierto* en $Z = X \times Y$ es un subconjunto tal que su intersección con cada Z_{ij} es abierto en Z_{ij}.

Por ejemplo, cada Z_{kl} es abierto en Z.

Por otro lado, dado que U_i y U_j pueden ser pegados mediante un atlas algebraico, tenemos que las funciones regulares en U_i y U_j coinciden en la intersección $U_i \cap U_j$. Así, las funciones regulares en Z_{ij} y Z_{kl} coinciden en la intersección $Z_{ij} \cap Z_{kl}$, por lo que los abiertos $\{Z_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J}$ forman un atlas algebraico. Así, $Z = X \times Y$ es una variedad algebraica.

Mas aún, si $u : S \to X$ y $v : S \to Y$ son morfismos regulares, entonces los abiertos $u^{-1}(U_i) \times v^{-1}(V_j)$ forman un cubrimiento de S. Así, la propiedad universal del producto se verifica *localmente*, y dado que "ser regular" es una propiedad local, tenemos por ende que la propiedad universal del producto se verifica globalmente. $\square$

Recuerdo 2.6.6. — Dado que k es algebraicamente cerrado (y en particular de cardinal infinito), tenemos que $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico irreducible. Así, todo par de abiertos de Zariski no-vacíos de $\mathbb{A}^n$ se intersectan. En particular $\mathbb{A}^n$ **no es** un espacio de Hausdorff.

Por otro lado, tenemos la siguiente caracterización de espacios de Haussdorff que será útil en nuestro contexto.

Ejercicio 2.6.7. — Sea X un espacio topológico. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

(1) X es un espacio de Hausdorff, i.e., para todos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y tales que $U \cap V = \emptyset$.
(2) La diagonal
$$\Delta_X := \{(x, x),\ x \in X\}$$
es un *cerrado* en $X \times X$ respecto a la topología producto.

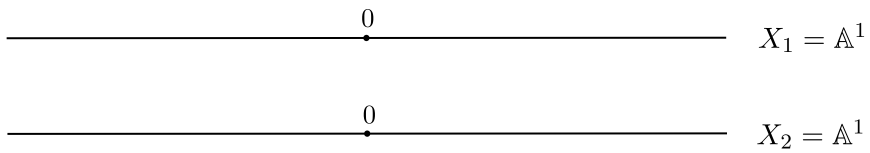
Indicación: La propiedad (1) *se traduce en que todo punto fuera de la diagonal posee una vecindad abierta para la topología producto de* $X \times X$*.*

Lo anterior motiva la siguiente definición fundamental en geometría algebraica.

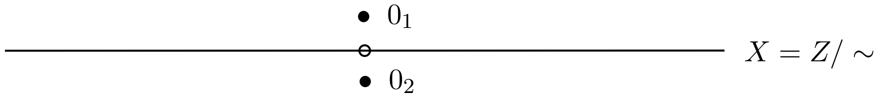
Definición 2.6.8. — Sea X una variedad algebraica. Decimos que X es una variedad algebraica **separada** si la diagonal
$$\Delta_X := \{(x, x),\ x \in X\} \subseteq X \times X$$
es un *cerrado de Zariski* respecto a la topología definida en el Teorema 2.6.5.

Ejemplo 2.6.9. —

(1) Toda variedad algebraica afín es separada. En efecto, sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una subvariedad afín y consideremos $(x, y) \notin \Delta_X$, i.e., $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces, existe $f \in \mathscr{O}(X)$ tal que $f(x) \neq f(y)$ (e.g. funciones coordenadas). Luego, la función $h(x, y) := f(x) - f(y)$ en $\mathscr{O}(X \times X)$ se anula en Δ_X pero no se anula en (x, y). En otras palabras, el abierto principal U_h es una vecindad abierta (de Zariski) del punto (x, y) y por ende $(X \times X) \setminus \Delta_X$ es un abierto.
(2) El ejemplo típico de una variedad algebraica no-separada es la *recta afín con dos orígenes*. Para construirla, consideremos dos copias X_1 y X_2 de la recta afín, y sean $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.



Sea $Z := X_1 \coprod X_2 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{A}^1 \times \{1, 2\}$, y construyamos X como la variedad algebraica obtenida al pegar X_1 y X_2 a lo largo de los abiertos U_1 y U_2 usando la función identidad, i.e., $X := Z/\sim$ donde $(x; 1) \sim (x; 2)$ si $x \neq 0$.

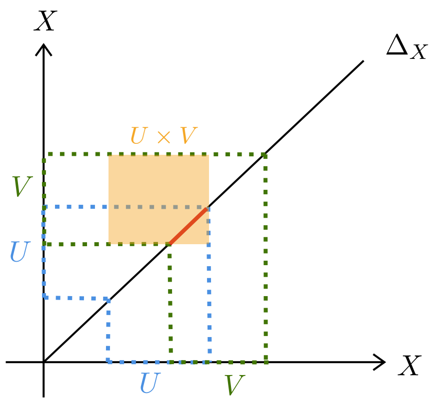


En particular, X posee dos orígenes dados por $0_1 := [(0; 1)]$ y $0_2 := [(0; 2)]$. Así, observamos que la variedad X **no** es separada, pues la clausura de Zariski de la diagonal $\overline{\Delta_X}^{\text{Zar}}$ contiene a los puntos $(0_1, 0_2), (0_2, 0_1) \in X \times X$ que no forman parte de Δ_X.

Una de las consecuencias más útiles de la separación es la propiedad siguiente.

Proposición 2.6.10. — *Sea X una variedad algebraica separada y sean $U, V \subseteq X$ abiertos afines. Entonces, $U \cap V$ es un abierto afín de X.*

Demostración. — Notamos que $(U \times V) \cap \Delta_X \cong U \cap V$.



Dado que el producto $U \times V$ es una variedad algebraica afín y que $\Delta_X \subseteq X \times X$ es un cerrado de Zariski, concluímos que el abierto $U \cap V$ es isomorfo a un cerrado de una variedad algebraica afín. $\square$

Definición 2.6.11. — Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Definimos el **grafo** de f como el conjunto

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \text{ tal que } y = f(x)\} \subseteq X \times Y.$$

El siguiente resultado puede pensarse como la versión algebraica del *Teorema del grafo cerrado* en topología o análisis funcional.

Teorema 2.6.12. — *Sea X una variedad algebraica definida a partir del atlas algebraico $\{\alpha_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i\}_{i\in I}$, donde los $\{U_i\}_{i\in I}$ forman un cubrimiento abierto de X y donde V_i es una variedad algebraica* separada *(e.g. afín). Entonces, la variedad algebraica X es separada si y sólo si*

> *Para todo par de cartas locales* distintas *α_i y α_j, el grafo $\Gamma_{ji} := \Gamma_{\psi_{ji}}$ del cambio de cartas $\psi_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$ es un cerrado de Zariski de $V_i \times V_j$.*

Demostración. — Los abiertos de Zariski $\{U_i \times U_j\}_{(i,j)\in I\times I}$ cubren $X \times X$, por lo que la diagonal $\Delta_X \subseteq X \times X$ es cerrada si y sólo si

$$\Delta_X \cap (U_i \times U_j) \text{ es cerrado en } U_i \times U_j \text{ para todos } i, j \in I.$$

Por otro lado, recordar que $V_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_i(U_i \cap U_j) \subseteq V_i$ y que $(U_i \times U_j) \cap \Delta_X \cong U_i \cap U_j$. Además, para $x \in V_{ij}$ tenemos que

$$(x, \psi_{ji}(x)) \stackrel{\text{def}}{=} (x, \alpha_j(\alpha_i^{-1}(x)) = (\alpha_i(y), \alpha_j(y)) \text{ donde } y := \alpha_i^{-1}(x) \in U_i \cap U_j.$$

Así, la imagen de $(U_i \times U_j) \cap \Delta_X$ por la función $\alpha_i \times \alpha_j$ es precisamente el grafo Γ_{ji} de $\psi_{ji} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$ en $V_i \times V_j$. Por lo tanto, X es separada si y sólo si $\Gamma_{ji} \subseteq V_i \times V_j$ es cerrado para todo $i, j \in I$.

Finalmente, notamos que basta considerar el caso $i \neq j$ puesto que si $i = j$ entonces $\Gamma_{ii} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\mathrm{Id}_{V_i}} = \Delta_{V_i} \subseteq V_i \times V_i$ es cerrado (pues por hipótesis cada V_i es una variedad algebraica separada). $\square$

Ejemplo importante 2.6.13. — Recordemos (cf. Ejemplo 2.5.5) que $\mathbb{P}^1$ se obtiene a partir del atlas algebraico dado por

$$\begin{aligned} \alpha_0 : U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{[x, y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tal que } x \neq 0\} &\xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{A}^1 \\ [x, y] &\longmapsto \frac{y}{x} \end{aligned}$$

y por

$$\begin{aligned} \alpha_1 : U_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{[x, y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tal que } y \neq 0\} &\xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{A}^1 \\ [x, y] &\longmapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Además, si z es una coordenada en $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \alpha_0(U_0 \cap U_1) = \alpha_1(U_0 \cap U_1)$, entonces el cambio de cartas $\psi := \psi_{01} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 \circ \alpha_0^{-1}$ está dado por $\psi(z) = \frac{1}{z}$.

Luego, el grafo de ψ está dado por

$$\Gamma_\psi = \{(z, w) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \text{ tales que } zw = 1\},$$

que es un cerrado de Zariski de $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^2$. Así, la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ es una variedad algebraica separada.

Lo anterior se generaliza en el siguiente ejercicio útil, que utilizaremos indirectamente en muchas ocasiones.

Ejercicio 2.6.14. —

(1) Probar que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica separada.
(2) Sea X una variedad algebraica separada. Probar que todo *abierto* $U \subseteq X$ y todo *cerrado* $Y \subseteq X$ es una variedad algebraica separada.
(3) Deducir que todo abierto y todo cerrado de $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica separada.

¡Atención! — Debido a la gran importancia de la noción de separación:

> ⚠ En todo lo que sigue del curso, supodremos que **todas** las variedades algebraicas serán separadas.

Cabe mencionar que históricamente las variedades algebraicas definidas en §2.3 se les conocía como *prevariedades*, y se utilizaba la palabra *variedad* para referirse a una prevariedad algebraica separada. En otras palabras, en todo lo que sigue del curso adoptaremos dicha convención:

> *"Una variedad algebraica es un esquema reducido y separado de tipo finito sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k".*

2.7. Variedades algebraicas proyectivas

En esta sección discutiremos sobre una de las clases más importantes de variedades algebraicas, las *variedades algebraicas proyectivas*.

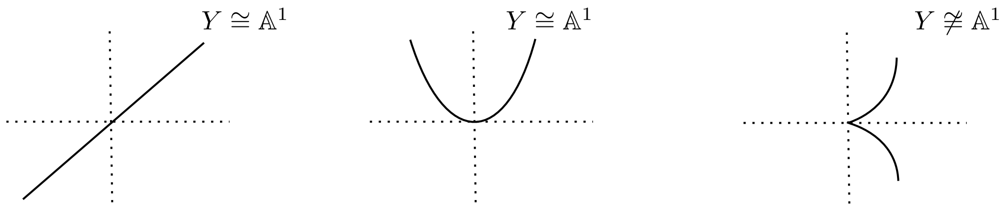
Definición 2.7.1. — Una **subvariedad cerrada** de una variedad algebraica $(X, \mathscr{O}_X)$ es una variedad algebraica $(Y, \mathscr{O}_Y)$ tal que $Y \subseteq X$ es un cerrado y tal que $\mathscr{O}_Y \cong (\mathscr{O}_X / \mathcal{I}_Y)|_Y$, donde $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathscr{O}_X$ es el haz de ideales de funciones regulares que se anulan en Y.

Más generalmente, si $f : Z \to X$ es un morfismo regular entre variedades algebraicas, decimos que f es una **incrustación cerrada**[(11)] si f se factoriza como

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\cong", "\text{morfismo birregular}"'] & & X \\ & Y \arrow[ur, hook, "\iota", "\text{subvariedad cerrada}"'] & \end{tikzcd}$$

i.e., $Y := f(Z) \subseteq X$ es una subvariedad cerrada y además $Z \cong f(Z)$.

Ejemplo 2.7.2. — Sea $Z = \mathbb{A}^1$ y $X = \mathbb{A}^2$. Consideremos los morfismos regulares $f_i : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ dados por



$f_1(t) = (t, t)$ $\qquad$ $f_2(t) = (t, t^2)$ $\qquad$ $f_3(t) = (t^2, t^3)$

Entonces, f_1 y f_2 son incrustaciones cerradas, pero f_3 **no** lo es.

Recuerdo 2.7.3. — Sea $V \cong k^{n+1}$ espacio vectorial. El **espacio proyectivo** $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ es la variedad algebraica cuyos puntos corresponden a rectas vectoriales en V.

En particular, si $W \subseteq V$ es un sub-espacio vectorial no-nulo de dimension $\dim_k(W) = m + 1$, entonces

$$\mathbb{P}^m \cong \Lambda := \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V),$$

y decimos que $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ obtenido de este modo es un **subespacio lineal de dimensión** m de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$.

Ejemplo 2.7.4. — Sean $\Lambda_1 = \mathbb{P}(W_1) \cong \mathbb{P}^{m_1}$ y $\Lambda_2 = \mathbb{P}(W_2) \cong \mathbb{P}^{m_2}$ subespacios lineales de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. Entonces, si $m_1 + m_2 \geq n$ tenemos que

$$\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \cong \mathbb{P}^d$$

es no-vacío de dimensión $d \geq m_1 + m_2 - n$.

(11) En inglés, *closed immersion*.

Por ejemplo, las rectas afines $\{x = 1\}$ y $\{x = 2\}$ en $\mathbb{A}^2_{(x,y)}$ **no** se intersectan. Sin embargo, las rectas proyectivas $\{x = z\}$ y $\{x = 2z\}$ obtenidas al considerar la clausura de las rectas afines en $\mathbb{P}^2$ mediante

$$\mathbb{A}^2 \cong U_2 \overset{\text{def}}{=} \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } z \neq 0\} \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{[x,y,z]}, \ (x, y) \longmapsto [x, y, 1]$$

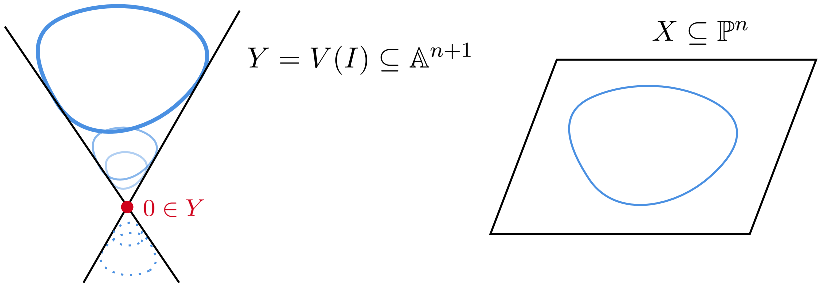
se intersectan en el punto $[0, 1, 0]$.

Recuerdo 2.7.5. — Sea $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1}) = k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ un ideal. Decimos que I es un **ideal homogéneo** si está generado por polinomios homogéneos, i.e., si

$I = \langle p_1, \ldots, p_r\rangle$ con $p_i(\lambda x) = \lambda^{d_i} p_i(x)$ para todo $\lambda \in k^*$, donde $d_i = \deg(p_i) \in \mathbb{N}$.

En otras palabras, I es homogéneo si y sólo si $I = I^{\mathbb{G}_m}$, i.e., es invariante por la acción del grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m \overset{\text{def}}{=} (k^*, \times)$. Explícitamente, si $p(x) \in I$ entonces $p(\lambda x) \in I$ para todo $\lambda \in k^*$.

Observación importante 2.7.6. — Sea $I \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ un ideal homogéneo. Entonces, la subvariedad afín $Y = V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ es $\mathbb{G}_m$-invariante. En términos geométricos, tenemos que $Y = V(I)$ es un **cono afín**



y en particular podemos considerar el cociente $X := (Y \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$, que puede ser pensado por lo tanto como un subconjunto $X \subseteq \mathbb{P}^n$ del espacio proyectivo, y para el cual tenemos una proyección canónica

$$\pi : Y \setminus \{0\} \longrightarrow X, \ (x_0, \ldots, x_n) \longmapsto [x_0, \ldots, x_n].$$

Dotamos a X de la topología de Zariski cociente y del haz en k-álgebras dado por $\mathscr{O}_X := \pi_*((\mathscr{O}_{Y\setminus\{0\}})^{\mathbb{G}_m})$, i.e., el haz de funciones regulares $\mathbb{G}_m$-invariantes. Entonces:

(1) El espacio anillado $(X, \mathscr{O}_X)$ es una subvariedad *cerrada* del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$, y escribiremos simplemente $X := V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$. Explícitamente, si $I = \langle f_1, \ldots, f_r\rangle \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ con f_i polinomio homogéneo

de grado d_i, entonces

$$V(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{x = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\}.$$

(2) Recíprocamente, debido a la construcción de $\mathbb{P}^n$ como cociente de $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$, tenemos que **toda** subvariedad cerrada de $\mathbb{P}^n$ es de la forma $X = V(I)$ para cierto $I \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ ideal homogéneo.

(3) Sea $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ polinomio homogéneo no-nulo de grado $d \geq 1$. Decimos que

$$V(f) = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } f(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

es una **hipersuperficie** de grado d en $\mathbb{P}^n$. Cuando $d = 1$ (resp. $d = 2$, resp. $d = 3$, resp. $d = 4$, etc.) decimos que $V(f) = H$ es un **hiperplano** (resp. $V(f) = Q$ es una hipersuperficie **cuádrica**, resp. una hipersuperficie **cúbica**, resp. una hipersuperficie **cuártica**, etc.). Por ejemplo,

$$X_F := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } x_0^d + x_1^d + \ldots + x_n^d = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$$

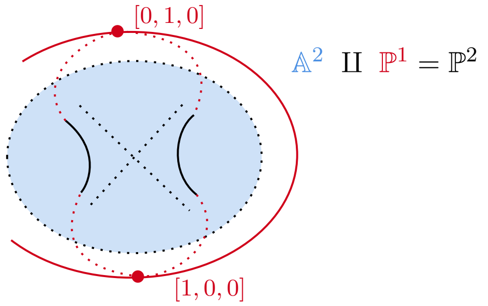
es la *hipersuperficie de Fermat* de grado d, mientras que

$$X_K := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } x_0^{d-1}x_1 + x_1^{d-1}x_2 + \ldots + x_n^{d-1}x_0 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$$

es la *hipersuperficie de Klein* de grado d.

(4) Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n$ un subconjunto arbitrario. Entonces, definimos el **ideal de** V como el *ideal homogéneo* $\mathcal{I}(V) \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ generado por los polinomios homogéneos que se anulan en V. Tal como en el caso afín, $V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}^{\mathrm{Zar}} \subseteq \mathbb{P}^n$ es la adherencia de Zariski de X. Por ejemplo:

(a) La curva afín $C \subseteq \mathbb{A}^2$ dada por la ecuación $xy = 1$ puede verse dentro de $\mathbb{P}^2$ (con coordenadas homogéneas $[x, y, z]$) al identificar $\mathbb{A}^2$ con $U_2 = \{z \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$.
Entonces, $\overline{C} := \overline{C}^{\mathrm{Zar}} \subseteq \mathbb{P}^2$ es la curva proyectiva dada por la ecuación $xy = z^2$ obtenida al *homogeneizar* la ecuación original.



En particular, obtenemos $\overline{C}$ a partir de C agregando los puntos $[1,0,0]$ y $[0,1,0]$ "*al infinito*", i.e., contenidos en la recta proyectiva $\mathbb{P}^1 \cong V(z) \subseteq \mathbb{P}^2$.

(b) Sea $A = k[X_0,\dots,X_n]$. Entonces, el conjunto vacío $\emptyset \subseteq \mathbb{P}^n$ verifica por definición

$$\mathcal{I}(\emptyset) = \langle X_0,\dots,X_n \rangle.$$

Geométricamente, lo anterior hace referencia al hecho que $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$ **no** se proyecta a $\mathbb{P}^n$. Usualmente se utiliza la notación $A^+ := \langle X_0,\dots,X_n \rangle$ y se dice que A^+ es el **ideal irrelevante** del anillo A.

(5) La *version proyectiva* del Hilbert Nullstellensatz puede ser deducida de la versión afín. Más precisamente, si $I \subseteq k[X_0,\dots,X_n]$ es un *ideal homogéneo*, entonces:
  (a) $V(I) = \emptyset$ en $\mathbb{P}^n$ si y sólo si I contiene una potencia del ideal irrelevante $A^+ \stackrel{\text{def}}{=} \langle X_0,\dots,X_n \rangle$.
  (b) Si $V(I) \neq \emptyset$ en $\mathbb{P}^n$, entonces $\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$.

(6) Supongamos que $k = \mathbb{C}$ y que consideramos al espacio afín $\mathbb{A}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ dotado de la topología euclideana. Entonces, podemos dotar al espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de la topología euclideana cociente, y notamos (e.g. considerando vectores de norma unitaria) que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es un espacio compacto, a diferencia de $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ que **no** lo es.

La siguiente definición será central en toda la discusión de esta sección.

Definición 2.7.7. — Sea X una variedad algebraica. Diremos que X es una **variedad algebraica proyectiva** si es isomorfa a una subvariedad cerrada de algún espacio proyectivo, i.e., si existe

$$\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

incrustación cerrada para algún $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Más generalmente, una variedad algebraica **quasi-proyectiva** es una variedad algebraica isomorfa a un *abierto* de Zariski de una variedad algebraica proyectiva.

Ejemplo importante 2.7.8. — Toda variedad algebraica quasi-proyectiva es separada y quasi-compacta. Más aún, las variedades afines, variedades quasi-afines y variedades proyectivas son ejemplos de variedades quasi-proyectivas.

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 2.7.9. — *Sea X una variedad algebraica proyectiva. Entonces, para* toda *variedad algebraica Y la proyección*

$$\mathrm{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y,\ (x, y) \longmapsto y$$

es una función **cerrada** *(i.e., la imagen de un cerrado es un cerrado).*

Demostración. — Dado que $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica proyectiva, todo cerrado de X es un cerrado de $\mathbb{P}^n$ y luego basta analizar el caso $X = \mathbb{P}^n$. Más aún, el resultado es *local* en Y por lo que podemos asumir que Y es afín, y por el mismo razonamiento anterior basta considerar $Y = \mathbb{A}^m$.

Sea $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n$ la proyección canónica, y consideremos $Z \subseteq X \times Y = \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ cerrado de Zariski dado por ecuaciones polinomiales

$$p_1([x], y) = \ldots = p_\ell([x], y) = 0 \text{ en } \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$$

que son homogéneas en las variables $[x] = [x_0, \ldots, x_n]$. Veamos que $\mathrm{pr}_Y(Z)$ es cerrado en $Y = \mathbb{A}^m$:

Para ello, consideremos $y_0 \notin \mathrm{pr}_Y(Z)$. Entonces, los polinomios $p_i(x, y_0)$ homogéneos en las variables $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$ sólo poseen al origen $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$ como cero común. Así, el Hilbert Nullstellensatz implica que

$$(\star) \qquad \mathfrak{m}_0^r \subseteq \langle p_1(x, y_0), \ldots, p_\ell(x, y_0)\rangle \text{ para cierto } r \in \mathbb{N}^{\geq 1},$$

donde $\mathfrak{m}_0 = \langle x_0, \ldots, x_n\rangle$ es el ideal irrelevante.

Por otra parte, notemos que el ideal $\mathfrak{m}_0^r \overset{\mathsf{def}}{=} \langle x_0, \ldots, x_n\rangle^r$ contiene al k-espacio vectorial $A_r := k[x_0, \ldots, x_n]_r$ de polinomios homogéneos de grado r. Luego, la condición $(\star)$ implica que la aplicación k-lineal

$$\begin{aligned} \varphi : A_{r-d_1} \oplus \cdots \oplus A_{r-d_\ell} &\twoheadrightarrow A_r \\ (q_1, \ldots, q_\ell) &\longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} q_i(x) p_i(x, y_0) \end{aligned}$$

es sobreyectiva, donde $d_i := \deg_x(p_i)$.

Finalmente, notamos que el hecho que φ sea sobreyectiva es una condición *abierta* para la topología de Zariski (pues equivale a que el determinante de una submatriz de tamaño maximal sea no-nulo). Luego, existe $V \subseteq \mathbb{A}^m$ vecindad abierta de y_0 tal que para todo $y \in V$ *fijo*, el conjunto de soluciones de

$$p_1([x], y) = \ldots = p_\ell([x], y) = 0$$

es vacío en $\mathbb{P}^n$, i.e., $y \notin \mathrm{pr}_Y(Z)$. Dado que el complemento de $\mathrm{pr}_Y(Z)$ es abierto, deducimos que $\mathrm{pr}_Y(Z)$ es cerrado. $\square$

Corolario 2.7.10. — *Sea X una variedad algebraica proyectiva. Entonces, para toda variedad algebraica Y y para todo morfismo regular $f : X \to Y$, se tiene que $f(X)$ es un* **cerrado** *de Y.*

Demostración. — Primero que todo, notamos que el grafo del morfismo f,

$$\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)),\ x \in X\},$$

es la preimagen de la diagonal $\Delta_Y \subseteq Y \times Y$ por

$$(f \times \mathrm{Id}_Y) : X \times Y \longrightarrow Y \times Y,\ (x, y) \longmapsto (f(x), y).$$

Luego, el hecho que Y es una variedad algebraica *separada* implica que Γ_f es cerrado en $X \times Y$. Finalmente, concluímos del Teorema anterior que $\mathrm{pr}_Y(\Gamma_f) \stackrel{\text{def}}{=} f(X)$ es un cerrado de Y. □

Observación importante 2.7.11. —

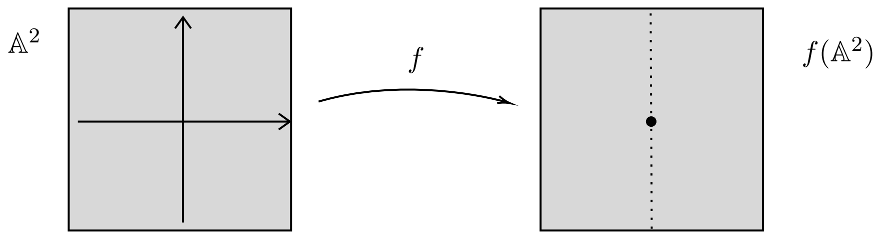
(1) El Corolario anterior nos dice que toda "realización" de una variedad proyectiva en un espacio proyectivo es *siempre cerrada*, contrariamente al caso de variedades afines (donde sabemos, por ejemplo, que algunas de ellas corresponden a abiertos principales).

(2) Los resultados anteriores fallan si no suponemos que nuestras variedades sean *proyectivas*. Por ejemplo, si

$$f : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2,\ (x, y) \longmapsto (x, xy)$$

entonces

$$f(\mathbb{A}^2) = \{(u, v) \in \mathbb{A}^2 \text{ tales que "}u = 0 \text{ implica que } v = 0\text{"}\}$$



no es un cerrado de Zariski.

Corolario 2.7.12. — *Sea X una variedad algebraica proyectiva y sea $f : X \to k$ una función regular. Entonces, $f(X)$ es un conjunto finito.*

Demostración. — Consideremos la composición $F : X \to \mathbb{P}^1$ dada por

$$F : X \xrightarrow{f} k = \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1,\ x \longmapsto [f(x), 1].$$

Entonces, $F(X)$ es un cerrado de Zariski de $\mathbb{P}^1$, que es diferente de $\mathbb{P}^1$ puesto que $F(X) = f(X) \subseteq \mathbb{A}^1$. Luego, $f(X)$ es un conjunto finito de puntos. □

Observación importante 2.7.13. — Más adelante veremos que si X es una variedad algebraica proyectiva e irreducible, entonces

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k,$$

i.e., toda función regular definida globalmente es constante.

Ejercicio 2.7.14. — Sea X una variedad algebraica proyectiva, y supongamos que existe una incrustación cerrada $X \hookrightarrow Y$, donde Y es una variedad algebraica *afín.* Probar que X es un conjunto finito de puntos.

Observación importante 2.7.15. — El producto de espacios afines cumple que $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{n+m}$. Sin embargo, tenemos que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \ncong \mathbb{P}^{n+m}$.

Por ejemplo, en $\mathbb{P}^2$ *todo* par de rectas (i.e., subespacios lineales $\ell \cong \mathbb{P}^1$ de dimensión 1) se intersectan, mientras que en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ **no** es así.

Corrado Segre (1863-1924) fue uno de los principales contribuyentes al desarrollo inicial de la geometría algebraica clásica, y uno de los fundadores de la escuela italiana de geometría.

***Proposición 2.7.16* (Segre).** — *La variedad producto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es isomorfa a una variedad algebraica proyectiva*

$$\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N \text{ donde } N = (n+1)(m+1) - 1,$$

llamada la **variedad de Segre**.

Demostración. — Sean $V \cong k^{n+1}$ y $W \cong k^{m+1}$ espacios vectoriales, donde $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ y $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^m$.

Entonces, $V \otimes W \cong k^{(n+1)(m+1)}$, y la aplicación natural

$$V \times W \longrightarrow V \otimes W, \ (v, w) \longmapsto v \otimes w$$

induce una aplicación entre los cocientes respectivos, llamada la *incrustación de Segre*, y dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) &\longrightarrow \mathbb{P}(V \otimes W) \cong \mathbb{P}^N \\ ([v], [w]) &\longmapsto [v \otimes w] \end{aligned}$$

donde $N = (n+1)(m+1) - 1 = mn + m + n$.

Si elegimos bases $(e_0, \dots, e_n)$ y $(f_0, \dots, f_m)$ de V y W, y escribimos $v = \sum_{i=0}^n x_i e_i$ y $w = \sum_{j=0}^m y_j f_j$, entonces $\{e_i \otimes f_j\}_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}}$ es una base de $V \otimes W$, y además $v \otimes w = \sum_{i,j} x_i y_j e_i \otimes f_j$. En particular,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ ([x_0, \dots, x_n], [y_0, \dots, y_m]) &\longmapsto [x_0y_0, x_0y_1, \dots, x_iy_j, \dots, x_ny_m] \end{aligned}$$

es un morfismo regular. Veamos que $\Sigma_{n,m} := \varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subseteq \mathbb{P}^N$ es un cerrado de Zariski y que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \cong \Sigma_{n,m}$ (i.e., φ es un incrustamiento cerrado).

Para esto último, notemos que mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} V \otimes W &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(V^\vee, W) \\ T = v_1 \otimes w_1 + \ldots + v_r \otimes w_r &\longmapsto \psi_T : V^\vee \to W \\ &\qquad\qquad \ell \mapsto \ell(v_1)w_1 + \ldots + \ell(v_r)w_r \end{aligned}$$

tenemos que la imagen de φ, dada por los *tensores simples* de $V \otimes W$, corresponde a aplicaciones lineales de rango 1. Explícitamente, si consideramos coordenadas homogéneas $z = \sum_{k,l} z_{kl} e_k \otimes f_l$ de $\mathbb{P}(V \otimes W) \cong \mathbb{P}^N$ y consideramos los abiertos estándar

$$W_{ij} = \{[z] \in \mathbb{P}^N \text{ tal que } z_{ij} \neq 0\} \cong \mathbb{A}^N,$$

entonces $\varphi^{-1}(W_{ij}) = U_i \times V_j$, con

$$U_i = \{[x] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } x_i \neq 0\} \text{ y } V_j = \{[y] \in \mathbb{P}^m \text{ tal que } y_j \neq 0\}.$$

En particular, si $i = j = 0$ tenemos que $\varphi|_{U_0 \times V_0} : U_0 \times V_0 \to W_{0,0}$ está dada por

$$([1, x_1, \dots, x_n], [1, y_1, \dots, y_m]) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & x_1y_1 & \cdots & x_ny_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_m & x_1y_m & \cdots & x_ny_m \end{pmatrix}$$

que es un morfismo regular, y que define un isomorfismo entre $U_0 \times V_0$ y el conjunto *cerrado* dado por las matrices en $W_{0,0}$ de rango ≤ 1.

El mismo argumento es válido para índices (i, j) arbitrarios, y obtenemos así un isomorfismo entre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ y la subvariedad cerrada $\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N$ dada por la condición

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0n} \\ z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m0} & z_{m1} & \cdots & z_{mn} \end{pmatrix} \leq 1,$$

que a su vez equivale a

$$\det\begin{pmatrix} z_{ik} & z_{il} \\ z_{jk} & z_{jl} \end{pmatrix} = z_{ik}z_{jl} - z_{il}z_{jl} = 0$$

para todos $i, j \in \{0, \ldots, m\}$ y $k, l \in \{0, \ldots, n\}$. □

Corolario 2.7.17. — *El producto (finito) de variedades algebraicas proyectivas es una variedad algebraica proyectiva.*

Demostración. — Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ son cerrados de Zariski, entonces la imagen de

$$X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^{mn+m+n}$$

es un cerrado de $\Sigma_{n,m}$. □

Ejemplo 2.7.18. — La incrustación de Segre

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$([x_0, x_1], [y_0, y_1]) \longmapsto [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1]$$

permite identificar $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con la superficie cuádrica $S \subseteq \mathbb{P}^3$ dada por

$$\det\begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = z_0z_3 - z_1z_2 = 0.$$

Notar además que la forma cuadrática

$$Q : k^4 \longrightarrow k, \ (z_0, z_1, z_2, z_3) \longmapsto z_0z_3 - z_1z_2$$

es *no-degenerada*. Más generalmente, si $\operatorname{car}(k) \neq 2$ entonces toda forma cuadrática no-degenerada $Q : k^4 \to k$ puede ser diagonalizada y luego

$$S = \{[z] \in \mathbb{P}^3 \text{ tal que } Q(z) = 0\} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

en ese caso.

Ejercicio 2.7.19. — Una **cónica** es una hipersuperficie cuádrica de $\mathbb{P}^2$, i.e., $C = V(f) \subseteq \mathbb{P}^2$ donde $f \in k[X, Y, Z]$ es un polinomio homogéneo no-constante de grado 2. Probar que si $\mathrm{car}(k) \neq 2$ entonces, en una base conveniente, podemos escribir

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } ax^2 + by^2 + cz^2 = 0\}$$

para ciertos $a, b, c \in k$. Deducir que si $abc \neq 0$ entonces $C \cong \mathbb{P}^1$.

Terminemos la sección mencionando dos variantes importantes del inscrustamiento de Segre. La primera de ellas fue considerada por Giuseppe Veronese (1854-1917).

Ejemplo importante 2.7.20. — Recordemos que si $V \cong k^{n+1}$ es un espacio vectorial y si $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, entonces la d-ésima *potencia simétrica* S^dV es un k-espacio vectorial de dimensión $\dim_k S^dV = \binom{n+d}{d}$. Además, podemos identificar el dual $(S^dV)^\vee \cong k[X_0, \ldots, X_n]_d$ con el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado d en $n + 1$ variables.

Cabe notar que si adicionalmente suponemos que $\mathrm{car}(k) = 0$, entonces S^dV se identifica con el sub-espacio vectorial de

$$T^dV \stackrel{\mathsf{def}}{=} V^{\otimes d} = V \otimes \stackrel{d \text{ veces}}{\cdots} \otimes V$$

de tensores simétricos[12].

Definimos la **incrustación de Veronese** como la aplicación

$$\begin{aligned} \nu_d : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(S^dV) \cong \mathbb{P}^N \\ [v] &\longmapsto [\mathrm{ev}_v] \end{aligned}$$

donde $\mathrm{ev}_v \in (S^dV^\vee)^\vee \cong S^dV$ es el funcional lineal que asocia a cada polinomio $f \in (S^dV)^\vee$ su valor $\mathrm{ev}_v(f) = f(v)$ en $v \in V$, y donde $N = \binom{n+d}{d} - 1$.

Concretamente, en coordenadas homogéneas tenemos que

$$\begin{aligned} \nu_d : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ [x_0, \ldots, x_n] &\longmapsto [x_0^d, x_0^{d-1}x_1, \ldots, x_n^d] \end{aligned}$$

donde $N = \binom{n+d}{d} - 1$, y donde intervienen *todos*[13] los monomios homogéneos de grado d en las variables $x_0, \ldots, x_n$.

---

(12) i.e., aquellos que son invariantes por la acción de permutación del grupo simétrico $\mathfrak{S}_d$.

(13) En ocasiones, conviene escoger un *orden monomial* para agrupar dichos polinomios.

Ejercicio 2.7.21. — Sea $V_{n,d} := \nu_d(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$ la **variedad de Veronese**. Probar que:

(1) La variedad $V_{n,d} \subseteq \mathbb{P}^N$ es un cerrado de Zariski dado por las ecuaciones $z_i z_j = z_k z_l$, donde los índices $i, j, k, l \in \{0, \dots, N\}$ verifican $i+j = k+l$.
(2) Probar que ν_d induce un isomorfismo $\mathbb{P}^n \cong V_{n,d}$ (i.e., el morfismo ν_d es un incrustamiento cerrado).

Ejemplo importante 2.7.22. — Probablemente las variedades proyectivas más emblemáticas que se obtienen mediante incrustaciones de Veronese son las siguientes:

(1) La imagen de
$$\nu_3 : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3,\ [x, y] \longmapsto [x^3, x^2y, xy^2, y^3]$$
es la curva $C \subseteq \mathbb{P}^3$ que está dada por las ecuaciones
$$z_0z_3 = z_1z_2,\ z_1^2 = z_0z_2,\ z_2^2 = z_1z_3$$
en $\mathbb{P}^3$ con coordenadas homogéneas $[z_0, \dots, z_3]$. Dicha curva es llamada la **cúbica torcida** (o *twisted cubic*) en $\mathbb{P}^3$.
(2) La imagen de
$$\nu_2 : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5,\ [x, y, z] \longmapsto [x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2]$$
es conocida como la **superficie de Veronese** en $\mathbb{P}^5$.

Proposición 2.7.23. — *Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie de grado d. Entonces, X es isomorfa a la intersección de la variedad de Veronese $V_{n,d} \subseteq \mathbb{P}^N$ y un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{N-1}$, donde $N = \binom{n+d}{d} - 1$. En particular, $\mathbb{P}^n \setminus X$ es una variedad algebraica* afín.

Demostración. — Utilizando la notación multi-índice, supongamos que $f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{|\mathbf{k}|=d} a_{\mathbf{k}} x^{\mathbf{k}}$, donde $x^{\mathbf{k}} := x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n}$.

Así, si denotamos por $z_{\mathbf{k}}$ la coordenada de $\mathbb{P}^N$ correspondiente al monomio $x^{\mathbf{k}}$, entonces $\nu_d(X) \overset{\text{def}}{=} \nu_d(\mathbb{P}^n) \cap H \subseteq \mathbb{P}^N$, donde
$$H = \left\{ [z] \in \mathbb{P}^N \text{ tal que } \sum_{|\mathbf{k}|=d} a_{\mathbf{k}} z_{\mathbf{k}} = 0 \right\} \cong \mathbb{P}^{N-1}$$
es un hiperplano. En particular, dado que $\mathbb{P}^N \setminus H \cong \mathbb{A}^N$, tenemos que $\mathbb{P}^n \setminus X$ es isomorfa al cerrado $\nu_d(X) \cap (\mathbb{P}^N \setminus H)$ de $\mathbb{A}^N$, y luego $\mathbb{P}^n \setminus X$ es una variedad algebraica afín. $\square$

Ejercicio 2.7.24. — Probar que el grupo cociente

$$\mathrm{PGL}_n(k) := \mathrm{GL}_n(k)/\mathbb{G}_m$$

es una variedad algebraica afín, donde $\mathbb{G}_m \cong \{\lambda\,\mathrm{I}_n,\ \lambda \in k^*\}$ se identifica con el centro del grupo $\mathrm{GL}_n(k)$.

Las variedades grassmannianas, nombradas en honor al matemático alemán Hermann Grassmann (1809-1877), son generalizaciones naturales y muy importantes del espacio proyectivo.

Sea $V \cong k^n$ un k-espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 2$ y sea $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Definimos

$$\mathrm{Gr}(m, V) := \{W \subseteq V \text{ sub-espacio vectorial tal que } \dim_k(W) = m\}.$$

Observación importante 2.7.25. — Por definición de $\mathrm{Gr}(m, V)$ tenemos:

(1) El caso $m = 1$ se traduce en $\mathbb{P}(V) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{Gr}(1, V)$.

(2) Dado que un sub-espacio vectorial $W \cong k^m$ en $V \cong k^n$ es *lo mismo* que $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{m-1}$ subespacio lineal en $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{n-1}$, podemos pensar $\mathrm{Gr}(k, V)$ como el conjunto de todos los subespacios lineales $\Lambda \cong \mathbb{P}^{m-1}$ de $\mathbb{P}(V)$. Para distinguirlo del caso afín, escribimos

$$\mathbb{G}(m-1, \mathbb{P}(V)) := \{\Lambda \subseteq \mathbb{P}(V) \text{ sub-espacio lineal tal que } \Lambda \cong \mathbb{P}^{m-1}\}$$

en lugar de $\mathrm{Gr}(m, V)$.

(3) Sea $W \subseteq V$ sub-espacio vectorial y consideremos

$$W^\circ = \{f \in V^\vee \text{ tal que } f(w) = 0 \text{ para todo } w \in W\} \subseteq V^\vee.$$

Entonces, $\dim(W) + \dim(W^\circ) = \dim(V) = \dim(V^\vee) = n$ y luego

$$\mathrm{Gr}(m, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}(n-m, V^\vee),\ [W] \longmapsto [W^\circ]$$

es una biyección.

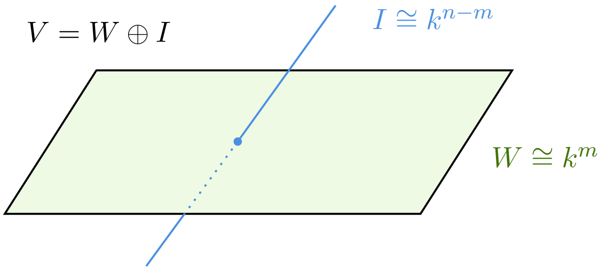
(4) Frecuentemente sólo nos interesará la dimensión del k-espacio vectorial $V \cong k^n$. En tal caso, escribimos $\mathrm{Gr}(m, n)$ (resp. $\mathbb{G}(m-1, n-1)$) en lugar de $\mathrm{Gr}(m, V)$ (resp. $\mathbb{G}(m-1, \mathbb{P}(V))$). En particular, tenemos que $\mathrm{Gr}(m, n) \cong \mathrm{Gr}(n-m, n)$.

Teorema 2.7.26. — *Sea $V \cong k^n$ un espacio vectorial y sea $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Entonces, existe un atlas algebraico en $\mathrm{Gr}(m, V)$ que la dota de estructura de variedad algebraica* proyectiva. *Dicha variedad es llamada* **grassmannianna**.

Demostración. — Para definir el atlas algebraico en $\mathrm{Gr}(m, V)$ consideremos un sub-espacio vectoria $I \subseteq V$ de codimensión m (i.e., $\dim_k(I) = n - m$) y consideremos el conjunto

$$U_I := \{[W] \in \mathrm{Gr}(m, V) \text{ tal que } W \cap I = \{0\}\}$$

i.e., los sub-espacios que intersectan transversalmente a I.



Notar que U_I se identifica naturalmente al cerrado algebraico de

$$\mathrm{Hom}_k(V, I) \cong M_{(n-m)\times n}(k) \cong \mathbb{A}^{n(n-m)}$$

dado por las proyecciones $p_W : V \to I$ con $\ker(p_W) = W$. Explícitamente,

$$U_I \longrightarrow \{p \in \mathrm{Hom}_k(V, I) \text{ tal que } p|_I = \mathrm{Id}_I\},\ W \longmapsto p_W$$

tiene inversa $p \longmapsto \ker(p) \in U_I$.

Por otro lado, notamos que (en coordenadas) la descomposición en suma directa $V = W_0 \oplus I$ corresponde a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \quad W_0 \quad & & \quad I \quad \end{array} \\ P = & \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 1 & & 0 \\ \vdots & * & \vdots & & \ddots & \\ * & \cdots & * & 0 & & 1 \end{array}\right) I \end{array}$$

y por ende $U_I \cong \mathbb{A}^{m(n-m)}$ es un espacio afín[14]. Dado que los conjuntos $\{U_I\}_{I \in \mathrm{Gr}(n-m,V)}$ cubren $\mathrm{Gr}(m, V)$, podemos usarlos para definir una topología (de Zariski):

> Un subconjunto $S \subseteq \mathrm{Gr}(m, V)$ es *abierto* si $S \cap U_I$ es un abierto de Zariski en $U_I \cong \mathbb{A}^{m(n-m)}$ para todo I.

[14] Más adelante, esto nos dirá que $\dim(\mathrm{Gr}(m, n)) = m(n - m)$.

Más aún, considerando una base $(e_1, \dots, e_n)$ de V y sub-espacios de la forma $I = \mathrm{Vect}_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}})$, obtenemos un cubrimiento *finito* de $\mathrm{Gr}(m, V)$. De esto se deduce que $\mathrm{Gr}(m, V)$ es un espacio topológico noetheriano.

Para analizar el cambio de cartas, consideramos $I, J \subseteq V$ sub-espacios de dimensión $n - m$, y notamos que la intersección $U_I \cap U_J \subseteq U_I$ se identifica con el conjunto de proyecciones $p_W : V \to I$ tales que $W \cap J \overset{\mathsf{def}}{=} \ker(p_W) \cap J = \{0\}$, i.e., tales que

$$p_W|_J : J \xrightarrow{\sim} I \text{ es inyectiva (y luego un isomorfismo).}$$

En coordenadas, esto define un abierto de Zariski de $U_I \cong \mathbb{A}^{m(n-m)}$ (dado por $\det(M) \neq 0$ para cierta submatriz M). Más aún, si $p \in U_I \cap U_j \subseteq U_I$ entonces $p' := (p|_J)^{-1} \circ p \in \mathrm{Hom}_k(V, J)$ pertenece a $U_I \cap U_J \subseteq U_J$, y la aplicación $p \longmapsto p'$ es un isomorfismo birregular al ser lineal. Así, $\mathrm{Gr}(m, V)$ es una variedad algebraica.

Para ver que $\mathrm{Gr}(m, V)$ es una variedad algebraica *proyectiva* separaremos la demostración en pasos independientes. Además, será importante recordar que si $V \cong k^n$ es un espacio vectorial y $d \in \{1, \dots, n\}$, entonces la d-ésima *potencia exterior* $\bigwedge^d V$ es un espacio vectorial de dimensión $\dim_k(\bigwedge^d V) = \binom{n}{d}$. Explícitamente, si $(e_1, \dots, e_n)$ es una base de V entonces

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n} \text{ es una base de } \bigwedge^d V.$$

Además, para toda $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ se tiene que $v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(d)} = \varepsilon(\sigma)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d)$ en $\bigwedge^d V$.

El paso crucial es comenzar por considerar la **incrustación de Plücker**[15] dada por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Gr}(m, V) &\longrightarrow \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^m V) \cong \mathbb{P}^N \\ [W] &\longmapsto [\textstyle\bigwedge^m W] \end{aligned}$$

que a cada sub-espacio $W \subseteq V$ de $\dim_k(W) = m$ le asocia la recta vectorial $k \cong \bigwedge^m W \subseteq \bigwedge^m V$, y donde $N = \binom{n}{m} - 1$.

Notar que si $(w_1, \dots, w_m)$ es una base de W, entonces la recta $\bigwedge^m W$ está generada por el *tensor simple* $w_1 \wedge \cdots \wedge w_m$. Recíprocamente, *toda* recta en $\bigwedge^m V$ generada por un tensor simple $w_1 \wedge \cdots \wedge w_m \neq 0$ define un sub-espacio vectorial $W := \mathrm{Vect}_k(w_1, \dots, w_m)$ de dimensión m de V, i.e., φ es biyectiva sobre su imagen. Con esto en mente, veamos que $\varphi : \mathrm{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ es un incrustamiento cerrado:

[15]En honor al matemático alemán Julius Plücker (1801-1868).

Paso 1. *El morfismo φ es regular*: Si fijamos una base de V y, tal como antes, representamos a $W = \mathrm{Vect}_k(w_1, \ldots, w_m) \in \mathrm{Gr}(m, V)$ usando filas de una matríz (no única):

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

donde la i-ésima fila corresponde a w_i. Luego,

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_m = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} p_{i_1,\ldots,i_m} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m})$$

donde $p_{i_1,\ldots,i_m} = \det(p_{j,i_\ell})_{1 \leq j,\ell \leq m}$ es el sub-determinante $m \times m$ de la matriz obtenida a partir de las columnas $i_1, \ldots, i_m$. En particular, φ es regular pues cada $p_{i_1,\ldots,i_m}$ lo es[(16)].

Paso 2. *El morfismo φ es un isomorfismo sobre su imagen*: Basta verificarlo para cada abierto U_I. Sea $I \in \mathrm{Gr}(n-m, V)$ y consideremos una base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V tal que se tiene $I = \mathrm{Vect}_k(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ y sea $W \in U_I$. Tal como antes, consideramos la matriz

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} p_{11} & \cdots & p_{1,m-n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ p_{m1} & \cdots & p_{m,m-n} & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

y notamos que cada p_{ij} se obtiene un como sub-determinante $m \times m$ de P. Así,

$$\varphi|_{U_I} : U_I \xrightarrow{\sim} \varphi(U_I) \subseteq \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^m V)$$

es un isomorfismo sobre su imagen para todo I.

Paso 3. *La imagen $G := \varphi(\mathrm{Gr}(m, V)) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ es un cerrado*: Sea $v \neq 0$ en V y sea $\omega \neq 0$ tensor no-nulo en $\bigwedge^m V$. Si completamos $e_1 = v$ en una base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V, notamos que $\omega \wedge v = 0$ en $\bigwedge^{m+1} V$ si y sólo si[(17)] $\omega = v \wedge \eta$ para cierta $\eta \in \bigwedge^{m-1} V$.

Repitiendo el argumento, notamos que $\omega \in \bigwedge^m V$ es un *tensor simple* (i.e., de la forma $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$ con $v_i \in V$) si y sólo si el kernel de la aplicación lineal

$$\psi_\omega : V \longrightarrow \bigwedge^{m+1} V, \ v \longmapsto \omega \wedge v$$

---

(16) Los $\{p_{i_1,\ldots,i_m}\}$ son llamadas **coordenadas de Plücker** de W en $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$.

(17) Explícitamente, si escribimos $\omega = \sum \lambda_{i_1,\ldots,i_m} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ entonces $\omega \wedge e_1 = 0$ si y sólo si cada sumando $\lambda_{i_1,\ldots,i_m} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ contiene a e_1 (i.e., $e_{i_\ell} = e_1$ para algún ℓ).

verifica $\dim_k(\ker \psi_\omega) \geq m$ (puesto que elementos linealmente independientes del kernel pueden ser usado en el argumento anterior para escribir $\omega = v_1 \wedge \eta_1$, y luego $\eta_1 = v_2 \wedge \eta_2$, etc.), i.e., $\mathrm{rg}(\psi_\omega) \leq n - m$. Esto último es una condición *cerrada* en $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$, pues se expresa en coordenadas como la anulación de todos los sub-determinantes $(n-m+1) \times (n-m+1)$ de la matriz de ψ_ω. $\square$

Ejercicio 2.7.27. — El objetivo de este ejercicio es analizar más de cerca el caso $m = 2$. Para ello, sea $V \cong k^n$ un espacio vectorial. Probar que:

(1) El tensor $\omega \in \bigwedge^2 V$ es simple si y sólo si $\omega \wedge \omega = 0$ en $\bigwedge^4 V$.

(2) Deducir que la imagen
$$G := \varphi(\mathrm{Gr}(2, V)) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^2 V)$$
está dada por la intersección de hipersuperficies cuádricas.

(3) Probar que $\mathrm{Gr}(2, 4) \cong \mathbb{G}(1, 3)$ es isomorfa a la **cuádrica de Plücker** en $\mathbb{P}(\bigwedge^2 k^4) \cong \mathbb{P}^5$ dada por
$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

2.8. Componentes irreducibles

Recuerdo 2.8.1. — Un espacio topológico X es **irreducible** si cada vez que tenemos que $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 cerrados, entonces $X = X_1$ o bien $X = X_2$.

Esto a su vez es equivalente a cualquiera de las condiciones siguientes:

(1) Todo par de abiertos no-vacíos de X se intersectan.

(2) Todo abierto no-vacío de X es *denso* en X.

Ejemplo 2.8.2. — El espacio afín $\mathbb{A}^n$ es irreducible. Más generalmente, una subvariedad afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ (ver Teorema 2.2.5).

Observación importante 2.8.3. — En topología, los espacios topológicos irreducibles también se conocen como **espacios hiperconexos**. No es difícil verificar las siguientes propiedades que son púramente topológicas (y cuyas demostraciones se dejan como ejercicio[18]): Sea X un espacio topológico, entonces

(1) Si X es irreducible, entonces X es *conexo*.
(2) Si X es irreducible e Y un espacio topológico arbitrario, entonces para toda función continua $f : X \to Y$ se tiene que $f(X) \subseteq Y$ es irreducible.
(3) Si X es irreducible y $U \subseteq X$ es un abierto no-vacío, entonces U es irreducible.
(4) Sea $A \subseteq X$ un sub-conjunto irreducible en X, entonces la adherencia $\overline{A}$ es irreducible.
(5) Sean $U, V \subseteq X$ abiertos irreducibles en X tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces la unión $U \cup V$ es irreducible.

Como consecuencia de las propiedades anteriores, podemos deducir varias propiedades interesantes en el caso de variedades algebraicas.

Ejemplo importante 2.8.4. —

(1) El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es irreducible, pues es cubierto por los abiertos estándar $U_i \cong \mathbb{A}^n$ que son irreducibles. Del mismo modo, la variedad grassmannianana $\mathrm{Gr}(m, n)$ es irreducible.
(2) Sea X una variedad algebraica proyectiva *irreducible*, entonces toda función regular $f : X \to k$ es <u>constante</u>, i.e.,

$$\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k.$$

En efecto, en este caso $f(X)$ es un conjunto finito e irreducible, y por lo tanto reducido a un elemento.
(3) Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad algebraica proyectiva irreducible que es diferente de un punto (veremos más adelante que esto es equivalente a que $\dim(X) \geq 1$). Entonces, $X \cap Y \neq \emptyset$ para *toda* hipersuperficie $Y \subseteq \mathbb{P}^n$.

En efecto, sabemos que $\mathbb{P}^n \setminus Y$ es una variedad algebraica afín (ver Proposición 2.7.23). Por otro lado, si $X \cap Y = \emptyset$ entonces tendríamos que $X \subseteq \mathbb{P}^n \setminus Y$ es una subvariedad proyectiva de una variedad algebraica afín, y por ende X debería ser un punto (ver Ejercicio 2.7.14).

[18]Indicaciones: Para (2) basta notar que la demostración del hecho que *la imagen por una función continua de un conexo es conexo* sigue funcionando. Para (3) notar que la intersección vacía de abiertos en U es vacía también en X. Para (4) notar que si $\overline{A} = A_1 \cup A_2$ es unión de cerrados, entonces $A = B_1 \cup B_2$ con $B_i = A_i \cap A$. Para (5) probar que si $W \subseteq U \cup V$ abierto no-vacío entonces $W \cap U \neq \emptyset$ y $W \cap V \neq \emptyset$, y deducir que W es denso en $U \cup V$.

Proposición 2.8.5. — *Sean X e Y dos variedades algebraicas irreducibles. Entonces, $X \times Y$ es irreducible.*

Demostración. — Si escribimos $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ con Z_1 y Z_2 cerrados no-vacíos, entonces (por definición de la topología de Zariski en el producto $X \times Y$) el conjunto

$$Y_i := \{y \in Y \text{ tal que } X \times \{y\} \subseteq Z_i\}$$

es un cerrado de Y. Más aún, $Y = Y_1 \cup Y_2$ por hipótesis. Luego, tenemos que $Y = Y_1$ o bien $Y = Y_2$ dado que Y es irreducible. Así, $Z_1 = X \times Y$ o bién $Z_2 = X \times Y$. □

La definición principal de esta sección es la siguiente.

Definición 2.8.6. — Sea X un espacio topológico. Una **componente irreducible** de X es un subconjunto irreducible maximal respecto a la inclusión, i.e., no está contenido estrictamente en ningún conjunto irreducible de X.

Observación 2.8.7. — Sabemos que si $S \subseteq X$ es un subconjunto irreducible, entonces su adherencia $\overline{S} \subseteq X$ es irreducible. En particular, las componentes irreducibles de X son necesariamente *conjuntos cerrados.*

Recuerdo 2.8.8. — Un espacio topológico X es **noetheriano** si toda sucesión decreciente de *cerrados*

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$$

es eventualmente constante, i.e, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_m = F_{m+1}$ para todo $m \geq N$.

La técnica utilizada para la prueba del siguiente resultado es conocida usualmente como **inducción noetheriana**.

Teorema 2.8.9. — *Sea X un espacio topológico noetheriano (e.g. una variedad algebraica). Entonces:*

(1) *El conjunto de componentes irreducibles $X_1, \ldots, X_m$ de X es* finito.
(2) *Tenemos que*
$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$$
y todo cerrado irreducible de X está contenido en alguna de las componentes irreducibles.

En particular, todo cerrado no-vacío $Y \subseteq X$ se escribe de manera única *(módulo permutación) como unión finita*

$$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$$

de cerrados irreducibles, no contenidos uno en el otro.

Demostración. — Sea $\mathscr{F}$ la familia de *todos* los cerrados no-vacíos de X que **no** se escriben como unión finita de cerrados irreducibles, y veamos que $\mathscr{F} = \emptyset$:

Si $\mathscr{F} \neq \emptyset$, consideramos Y_1 en $\mathscr{F}$. Si Y_1 contiene estrictamente otro elemento de $\mathscr{F}$, entonces escogemos uno y lo llamamos $Y_2 \subsetneq Y_1$. Podemos hacernos la misma pregunta para Y_2 y continuar inductivamente hasta obtener, por noetherianidad, un elemento minimal $Y = Y_m$ de $\mathscr{F}$.

Dado que Y pertenece a $\mathscr{F}$ se tiene que Y **no** es irreducible, i.e., $Y = Z_1 \cup Z_2$ con $Z_i \subsetneq Y$ cerrado propio. Por minimalidad, Z_1 y Z_2 se escriben como unión finita de cerrados irreducibles, y luego Y también. Esto es una contradicción.

Así, todo cerrado no-vacío $Y \subseteq X$ se escribe como unión finita de cerrados irreducibles, y podemos asumir sin pérdida de generalidad que ninguno está contenido en el otro (quitando aquellos que estén contenidos en intersecciones si fuese necesario). En particular, deducimos (1) y que

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$$

es la unión de sus componentes irreducibles. Más aún, si $Y \subseteq X$ es irreducible entonces

$$Y = (Y \cap X_1) \cup \cdots \cup (Y \cap X_m)$$

y luego $Y = Y \cap X_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$, i.e., $Y \subseteq X_i$.

Finalmente, la unicidad (módulo permutación) se deduce al considerar $Y \subseteq X$ cerrado no-vacío y dos escrituras

$$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r = Y_1' \cup \cdots \cup Y_s',$$

con $Y_1, \ldots, Y_r$ e $Y_1', \ldots, Y_s'$ cerrados irreducibles. En particular, tenemos que $Y_1 \subseteq Y_1' \cup \cdots \cup Y_s'$ y la discusión anterior implica que $Y_1 \subseteq Y_j'$ para algún $j \in \{1, \ldots, s\}$. De manera similar, $Y_j' \subseteq Y_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, r\}$, de donde decumos que $Y_1 \subseteq Y_j' \subseteq Y_i$. Dado que ningún Y_i está contenido dentro de otro, deducimos así que $Y_1 = Y_j'$. Así, cada elemento de la lista de los Y_i es *igual* a un elemento de la lista de los Y_j', y viceversa. □

Ejemplo 2.8.10. —

(1) Un caso particular importante es cuando la variedad $X = V(f)$ es una **hipersuperficie** afín en $\mathbb{A}^n$ (resp. proyectiva en $\mathbb{P}^n$) dada por los ceros

de un polinomio f no-nulo en $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \ldots, X_n]$ (resp. homogéneo en $\mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1}) = k[X_0, \ldots, X_n]$):

Dado que el anillo de polinomio en varias variables es un *dominio de factorización única*, podemos escribir f de manera única (módulo permutación y multiplicación por k^*)

$$f = f_1 \cdots f_r \text{ con } f_1, \ldots, f_r \text{ polinomios irreducibles.}$$

Así, $V(f) = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_r)$ es la descomposición en componentes irreducibles.

(2) De manera más general, si $X = V(I)$ es una variedad algebraica afín en $\mathbb{A}^n$ (resp. proyectiva en $\mathbb{P}^n$), entonces $\sqrt{I} = \mathcal{I}(X) = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{I}(X_i)$, donde los $\mathcal{I}(X_i)$ son ideales primos.

Estos ejemplos son casos particulares de la **descomposición primaria** probada por Emanuel Lasker (1905) y Emmy Noether (1921).

Ejercicio 2.8.11. — Determinar las componentes irreducibles de la variedad algebraica afín

$$X = V(X^2 + Y^2 + Z^2 - 4, Y^2 + Z^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^3.$$

2.9. Funciones racionales y aplicaciones racionales

Una generalización importante de las funciones regulares son las llamadas *funciones racionales*, para las cuales permitimos que no estén definidas globalmente.

Definición 2.9.1. — Sea X una variedad algebraica. Consideremos el conjunto de pares (f, U) donde $U \subseteq X$ es un abierto *denso* de X y $f : U \to k$ es una función regular, y definamos la relación de equivalencia

$$(f, U) \sim (g, V) \text{ si } f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}.$$

Denotamos por $k(X)$ (o por $\mathrm{Rat}(X)$) al k-álgebra de clases de equivalencia de dichos pares, y diremos que la clase $[(f, U)] \in k(X)$ es una **función racional** en X y será denotada por el símbolo

$$f : X \dashrightarrow k.$$

Observación importante 2.9.2. —

(1) A pesar de que una función racional <u>**no es**</u> una función (pues a priori puede no estar definida en todo X), podemos considerar su **dominio**

de definición como el *abierto maximal* donde está definida. Explícitamente, para $f : X \dashrightarrow k$ función racional en $k(X)$ definimos

$$\mathrm{Dom}(f) := \bigcup_{[(g,U)]=f} U.$$

(2) Por definición, si $V \subseteq X$ es un abierto denso de X, entonces la restricción

$$k(X) \xrightarrow{\sim} k(V),\ [(f,U)] \longmapsto [(f|_{U\cap V}, U \cap V)]$$

es un isomorfismo de k-álgebras.

(3) Si X es una variedad algebraica *irreducible*, entonces $k(X)$ es un cuerpo. En efecto, si (f,U) representa la función racional $\varphi : X \dashrightarrow k$ no-nula, entonces

$$V = \{x \in U \text{ tal que } f(x) \neq 0\}$$

es denso en X (pues X es irreducible), y luego podemos considerar $\frac{1}{\varphi} : X \dashrightarrow k$ dada por la clase de $(\frac{1}{f}, V)$.

En general, si $X_1, \ldots, X_m$ son componentes irreducibles de X se tiene

$$k(X) \cong k(X_1) \times \cdots \times k(X_m).$$

Proposición 2.9.3. — *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín* irreducible. *Entonces $k(X)$ es isomorfo al cuerpo de fracciones* $\mathrm{Fr}(\mathscr{O}(X))$ *del anillo $\mathscr{O}(X)$ de funciones regulares en X (que es un dominio entero en este caso).*

Demostración. — Si $\frac{f}{g}$ es un elemento de $\mathrm{Fr}(\mathscr{O}(X))$, le asociamos la función racional dada por $[(\frac{f}{g}, U_g)]$, donde

$$U_g = \{x \in X \text{ tal que } g(x) \neq 0\}$$

es un abierto principal afín en X. Recíprocamente, si $\varphi : X \dashrightarrow k$ está definida por la función $f : U \to k$ entonces $Y = X \setminus U$ es un cerrado de Zariski de X, y en particular existe $g \in \mathscr{O}(X)$ no-nula tal que $U_g \subseteq U$.

Reemplazando U por U_g, y usando que $\mathscr{O}(U_g) \cong \mathscr{O}(X)_g$ está dado por la localización en g, tenemos que existen $u \in \mathscr{O}(X)$ y $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $f = \frac{u}{g^N}$. Así, podemos asociarle a φ el elemento $\frac{u}{g^N}$ de $\mathrm{Fr}(\mathscr{O}(X))$. □

Ejemplo importante 2.9.4. — La proposición anterior implica que

$$k(\mathbb{A}^n) \cong k(X_1, \ldots, X_n)$$

es el cuerpo de funciones racionales. En particular, dado que los abiertos estándar $U_i \cong \mathbb{A}^n$ de $\mathbb{P}^n$ son densos, tenemos que $k(\mathbb{P}^n) \cong k(X_1, \ldots, X_n)$.

Ejercicio 2.9.5. — Determinar el cuerpo de funciones racionales de la variedad grassmanniana $\mathrm{Gr}(m,n)$.

Así como las funciones regulares permiten definir la noción de morfismo regular, las funciones racionales permiten definir la noción de *aplicación racional*.

Definición 2.9.6. — Sean X e Y variedades algebraicas. Consideremos el conjunto de pares (f,U) donde $U \subseteq X$ es un abierto *denso* de X y $f : U \to Y$ es un morfismo regular, y definamos la relación de equivalencia

$$(f,U) \sim (g,V) \text{ si } f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}.$$

La clase de equivalencia $[(f,U)]$, que será denotada $f : X \dashrightarrow Y$, es llamada una **aplicación racional** de X a Y.

Observación 2.9.7. —

(1) Por definición, tenemos que
$$k(X) = \{f : X \dashrightarrow \mathbb{A}^1 \text{ aplicación racional}\}.$$
(2) El dominio de definición de una aplicación racional $\varphi : X \dashrightarrow Y$ se define del mismo modo que antes. En particular, tenemos que φ es un *morfismo regular* si y sólo si $\mathrm{Dom}(\varphi) = X$.
(3) Dada $\varphi : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional. Definimos su **imagen** como $\mathrm{Im}(\varphi) := \varphi(\mathrm{Dom}(\varphi))$, i.e., la imagen del dominio de φ.

Terminología 2.9.8. — Sea $\varphi : X \dashrightarrow Y$ una aplicación racional. Decimos que φ es:

(1) Una **aplicación birracional** posee inversa racional. Explicitamente, si existe $\psi : Y \dashrightarrow X$ aplicación racional tal que:
  (a) $\overline{\mathrm{Im}(\varphi)} \cap \mathrm{Dom}(\psi) \neq \emptyset$ y $\overline{\mathrm{Im}(\psi)} \cap \mathrm{Dom}(\varphi) \neq \emptyset$, y
  (b) $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$ y $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$, en los dominios respectivos.

  En otras palabras, las identidades $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$ y $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$ deben ser entendidas como igualdades entre clases de equivalencias de aplicaciones racionales. En tal caso, escribimos $\psi =: \varphi^{-1} : Y \dashrightarrow X$.
(2) Un **morfismo birracional** si es una aplicación birracional con $\mathrm{Dom}(\varphi) = X$. En otras palabras, $\varphi : X \to Y$ es un morfismo regular, pero $\varphi^{-1} : Y \dashrightarrow X$ puede no ser regular.

En general, definimos el **grupo de automorfismos birracionales** como

$$\mathrm{Bir}(X) := \{f : X \dashrightarrow X \text{ aplicación birracional}\}.$$

En particular, el **grupo de automorfismos birregulares**

$$\mathrm{Aut}(X) := \{f : X \to X \text{ isomorfismo regular}\}$$

es un sub-grupo de $\mathrm{Bir}(X)$.

Ejemplo 2.9.9. — La **involución de Cremona** es la aplicación racional dada por

$$f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2,\ [x_0, x_1, x_2] \longmapsto \left[\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right].$$

Notar que $f(x_0, x_1, x_2) = [x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1]$ y luego $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{P}^2 \setminus \{p_0, p_1, p_2\}$, donde $p_0 = [1, 0, 0]$, $p_1 = [0, 1, 0]$ y $p_2 = [0, 0, 1]$. Además, $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

Observación 2.9.10. — El grupo $\mathrm{Cr}_n(k) := \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n(k))$ es llamado el **grupo de Cremona** (y fue introducido al rededor de 1863), y es un grupo difícil de estudiar en general. Un resultado importante de M. Noether y Castelnuovo afirma que $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ está generado por $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ y la involución de Cremona.

Ejercicio 2.9.11. — Sea

$$f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,\ [x_0, x_1, x_2, x_3] \longmapsto [x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_0^2 - x_1x_2].$$

Determinar $\mathrm{Dom}(f)$, probar que $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ y calcular $f^{-1} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$.

La siguiente definición es fundamental en *geometría birracional*.

Definición 2.9.12. — Sea $f : X \dashrightarrow Y$ una aplicación racional entre variedades algebraicas. Decimos que f es **dominante** si $\mathrm{Im}(f) \overset{\text{def}}{=} f(\mathrm{Dom}(f))$ es densa en Y. En particular, si $g : Y \dashrightarrow Z$ es una aplicación racional arbitraria, entonces la composición

$$g \circ f : X \dashrightarrow Z$$

está bien definida en este caso.

En el caso de variedades afines, los morfismos dominantes pueden ser caracterizados en términos de sus pullbacks.

Lema 2.9.13. — *Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas afines, y sea $f : X \to Y$ un morfismo regular. Entonces, f es dominante si y sólo si $f^* : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X)$ es inyectivo.*

Demostración. — Supongamos que f es dominante y sea $u \in \ker(f^*)$, i.e., $f^*(u) \overset{\text{def}}{=} u \circ f = 0$ en $\mathscr{O}(X)$. Entonces, $u = 0$ en $f(X) \subseteq Y$ y luego $u = 0$ en $\overline{f(X)}^{\mathrm{Zar}} = Y$.

Recíprocamente, si f **no** es dominante entonces $Z := \overline{f(X)}^{\mathrm{Zar}} \subsetneq Y$ es un cerrado propio, y luego existe $u : Y \to k$ función regular tal que $u|_Z = 0$ pero $u \neq 0$ en $\mathscr{O}(Y)$, i.e., $u \in \ker(f^*)$ es no-trivial. Así, f^* no es inyectivo. □

Ejemplo importante 2.9.14. — Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular *dominante* entre variedades algebraicas afines. Entonces, si X es irreducible entonces Y es irreducible también.

En efecto, $f^* : \mathscr{O}(Y) \hookrightarrow \mathscr{O}(X)$ identifica $\mathscr{O}(Y)$ con una sub-álgebra del dominio entero $\mathscr{O}(X)$, y luego $\mathscr{O}(Y)$ es un dominio entero también. Esto último equivale a que Y sea irreducible.

Ejercicio 2.9.15. — Probar, usando lo anterior, que la variedad algebraica afín

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^3\}$$

es irreducible.

Observación importante 2.9.16. — Un argumento completamente análogo al lema anterior muestra que si $f : X \dashrightarrow Y$ es una aplicación racional *dominante* entre variedades algebraicas arbitrarias, entonces el pullback de funciones racionales (que está bien definido pues f es dominante)

$$f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X),\ u \longmapsto u \circ f$$

es un morfismo inyectivo de k-álgebras. Notar además que $f^*|_k = \mathrm{Id}_k$ a nivel de funciones constantes.

Proposición 2.9.17. — *Sean X e Y variedades algebraicas* irreducibles*, y sea*

$$\varphi : k(Y) \hookrightarrow k(X)$$

un morfismo de k-extensiones de cuerpo (i.e., un morfismo de cuerpos que verifica $\varphi|_k = \mathrm{Id}_k$ a nivel de funciones constantes). Entonces, existe una única aplicación racional dominante *$f : X \dashrightarrow Y$ tal que $\varphi = f^*$.*

Demostración. — Sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos afines no-vacíos, y en particular densos. Entonces, $k(X) \cong k(U)$ y $k(Y) \cong k(V)$, por lo que podemos suponer que X e Y son afines.

En particular, si escribimos $B = \mathscr{O}(Y) \cong k[Y_1, \ldots, Y_m]/\mathcal{I}(Y)$ con generadores $y_1, \ldots, y_m \in \mathscr{O}(Y)$, entonces tenemos que $k(Y) \cong \mathrm{Fr}(B)$.

Luego, si escribimos $\varphi(y_i) = \frac{u_i}{g_i} \in k(X)$ y consideramos

$$U := U_{g_1} \cap \cdots \cap U_{g_m} \subseteq X$$

el abierto afín donde cada $\varphi(y_i)$ es regular, entonces tenemos que la restricción $\varphi|_B : \mathscr{O}(Y) \to k(X)$ se factoriza en $\widetilde{\varphi} : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(U)$. Así, dado que todo morfismo de álgebras de funciones regulares es geométrico (ver Teorema 2.2.18), existe $f : U \to Y$ morfismo regular tal que $\widetilde{\varphi} = f^*$. En particular, la clase $[(f, U)]$ define una aplicación racional $f : X \dashrightarrow Y$.

Para ver que f es dominante consideremos el siguiente diagrama conmutativo con flechas verticales *inyectivas*:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}(Y) \arrow[r, "\widetilde{\varphi}=f^*"] \arrow[d, hook] & \mathscr{O}(U) \arrow[d, hook] \\ k(Y) \arrow[r, hook, "\varphi"] & k(X) \end{tikzcd}$$

Luego, $\widetilde{\varphi} = f^* : \mathscr{O}(Y) \hookrightarrow \mathscr{O}(U)$ es inyectiva, i.e., $f : U \to Y$ es dominante. Más aún, $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ coincide con φ. Finalmente, la unicidad de f se obtiene del hecho que si $g^* = \varphi$ para otra aplicación racional dominante $g : X \dashrightarrow Y$, entonces $f^*(y_i) = g^*(y_i)$ en $k(X)$ y luego f y g coinciden en el abierto denso $U \subseteq X$. $\square$

Definición 2.9.18. — Decimos que dos variedades algebraicas X e Y son **birracionalmente equivalentes**, o que son **birracionales**, si existen abiertos densos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ tales que $U \cong V$. En tal caso, escribimos $X \sim_{\text{bir}} Y$.

Observación importante 2.9.19. — La **geometría birracional** es un área de la geometría algebraica que busca estudiar variedades algebraicas módulo equivalencia birracional. En otras palabras, dada una variedad algebraica X, se busca Y "*lo más simple posible*" tal que $X \sim_{\text{bir}} Y$.

Teorema 2.9.20. — *Sean X e Y variedades algebraicas* irreducibles. *Entonces, X e Y son birracionales si y sólo si las extensiones $k(X) \cong k(Y)$ son k-isomorfas.*

Demostración. — Sea $\varphi : k(Y) \xrightarrow{\sim} k(X)$ un k-isomorfismo de cuerpos, y sea $f : X \dashrightarrow Y$ (resp. $g : Y \dashrightarrow X$) aplicación racional dominante tal que $f^* = \varphi$ (resp. $g^* = \varphi^{-1}$). Consideremos $U = \mathrm{Dom}(f) \subseteq X$ y $V = \mathrm{Dom}(g) \subseteq Y$ y notemos que, achicando U si fuera necesario, podemos suponer que $f(U) \subseteq V$.

Por unicidad de f y g, tenemos que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in U$. Del mismo modo, si consideramos el abierto denso $W := g^{-1}(U) \subseteq Y$, entonces $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$ y $f(U) \subseteq W$. Así, $f|_U : U \to W$ y $g|_W : W \to U$ son morfismos regulares y son inversos uno del otro. $\square$

Definición 2.9.21. — Una variedad algebraica irreducible X es llamada una **variedad racional** si $X \sim_{\mathrm{bir}} \mathbb{A}^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, i.e., los cuerpos de funciones racionales

$$k(X) \cong k(T_1, \ldots, T_n)$$

son k-isomorfos. Equivalentemente, existe $U \subseteq X$ abierto denso que es isomorfo a un abierto denso de un espacio afín.

Ejemplo 2.9.22. —

(1) El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ y la grassmanniana $\mathrm{Gr}(m, n)$ son variedades racionales, pues contienen un abierto denso isomorfo al espacio afín.

(2) Supongamos que $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 = 1\}$. La aplicación racional

$$\mathbb{A}^1 \dashrightarrow C,\ t \longmapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

es birracional.

(3) Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^3\}$. El morfismo dominante

$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow C,\ t \longmapsto (t^2, t^3)$$

es birracional, con inversa racional dada por

$$C \dashrightarrow \mathbb{A}^1,\ (x, y) \longmapsto \frac{y}{x}.$$

En particular, $C \sim_{\mathrm{bir}} \mathbb{A}^1$ pero $C \not\cong \mathbb{A}^1$.

Ejercicio 2.9.23. —

(1) Probar que

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^3 - 1\}$$

no es birracional a $\mathbb{A}^1$.

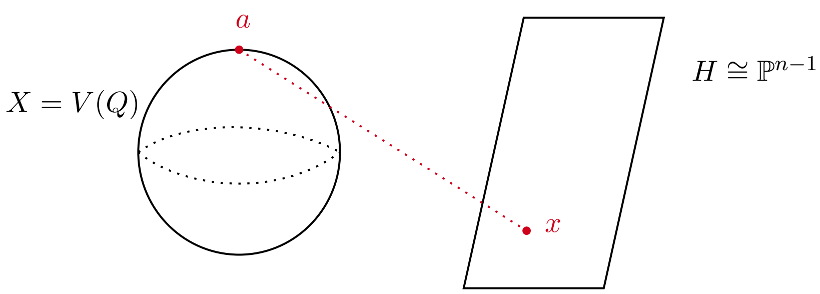
Indicación: Suponer por el contrario que existe una aplicación birracional $\mathbb{A}^1 \dashrightarrow C,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ *con* $x(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, $y(t) = \frac{r(t)}{s(t)}$ *funciones racionales, donde* $(p, q) = (r, s) = 1$ *en* $k[t]$, *y llegar a una contradicción.*

(2) Supongamos que $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Probar que toda hipersuperficie cuádrica

$$X = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } Q(x_0, \ldots, x_n) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$$

es racional.

Indicación: Sea $a \in \mathbb{P}^n$ *tal que* $Q(a) = 0$, *y sea* $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ *hiperplano tal que* $a \notin H$. *Considerar la recta* $a + tx$, *con* $t \in k$ *variable y* $x \in H$ *fijo, y resolver* $Q(a + tx) = 0$ *para* $t \neq 0$.



Observación importante 2.9.24. — De manera más general, una variedad algebraica X es **unirracional** si existe una aplicación *dominante* (no necesariamente birracional)

$$\mathbb{A}^n \dashrightarrow X \text{ para cierto } n \in \mathbb{N}^{\geq 1},$$

i.e., existe una inclusión $k(X) \subseteq k(T_1, \dots, T_n)$.

Cabe destacar que recién en los años 1970 se descubrieron los primeros ejemplos de variedades algebraicas que son unirracionales pero que **no** son racionales (gracias a los trabajos de Artin-Mumford, de Clemens-Griffiths, y de Iskovskikh-Manin). Por ejemplo, la hipersuperficie cúbica

$$X = \{[x_0, \dots, x_4] \in \mathbb{P}^4 \text{ tal que } x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^4$$

es unirracional pero no es racional. Hoy en día, no conocemos ninguna hipersuperficie cúbica *suave* de $\mathbb{P}^5$ que sea irracional, a pesar de que se conjetura que la mayor parte de dichas cúbicas no es racional.

2.10. Blow-up de una variedad afín

En esta sección discutiremos uno de los ejemplos más importantes de morfismos birracionales.

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín irreducible, y consideremos $f_1, \dots, f_r \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ polinomios que **no** se anulan simultaneamente en X (i.e., $\langle f_1, \dots, f_r \rangle \not\subseteq \mathcal{I}(X)$). En particular, $U := X \setminus V(f_1, \dots, f_r)$ es un abierto denso de X, y la aplicación

$$f : U \longmapsto \mathbb{P}^{r-1}, \ x \longmapsto [f_1(x), \dots, f_r(x)]$$

es un morfismo regular, cuyo grafo

$$\Gamma_f \overset{\text{def}}{=} \{(x, f(x)), \ x \in U\} \subseteq U \times \mathbb{P}^{r-1}$$

es isomorfo a U.

Definición 2.10.1. — $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín irreducible, y sean $f_1, \dots, f_r \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$ polinomios que no se anulan simultaneamente en X. Definimos el **blow-up** de X en $f_1, \dots, f_r$ como

$$\widetilde{X} := \overline{\Gamma_f}^{\mathrm{Zar}} \subseteq X \times \mathbb{P}^{r-1},$$

la adherencia de Zariski de Γ_f en $X \times \mathbb{P}^{r-1}$. En particular, la primera proyección del producto $X \times \mathbb{P}^{r-1}$ induce un morfismo desde $\widetilde{X}$ hacia X, usualmente denotado

$$\varepsilon : \widetilde{X} \longrightarrow X,$$

y muy frecuentemente se dice que ε es el blow-up de X en $f_1, \dots, f_r$.

Observación importante 2.10.2. — Con la notación anterior, tenemos que:

(1) La restricción

$$\varepsilon|_{\Gamma_f} : \Gamma_f \xrightarrow{\sim} U$$

es un isomorfismo. Luego, $\varepsilon : \widetilde{X} \to X$ es un morfismo *birracional.*

(2) Dado que $U \cong \Gamma_f$ es irreducible, tenemos que $\widetilde{X} \overset{\mathsf{def}}{=} \overline{\Gamma_f}^{\mathrm{Zar}}$ es irreducible.

(3) El conjunto

$$\mathrm{Exc}(\varepsilon) := \widetilde{X} \setminus \Gamma_f \overset{\mathsf{def}}{=} \varepsilon^{-1}(V(f_1, \dots, f_r)),$$

donde usualmente ε **no** es un isomorfismo, es llamado el **conjunto excepcional** del blow-up. También es común usar la notación $E = \mathrm{Exc}(\varepsilon) \subseteq \widetilde{X}$ si no hay confusión dado el contexto.

(4) Sea $Y \subseteq X$ un cerrado, y sea $\widetilde{Y}$ el blow-up de Y en $f_1, \dots, f_r$. Entonces, tenemos que

$$\widetilde{Y} \subseteq Y \times \mathbb{P}^{r-1} \subseteq X \times \mathbb{P}^{r-1}$$

es una subvariedad cerrada de $\widetilde{X}$. Explícitamente, $\widetilde{Y}$ está dada por la clausura de $Y \cap U$ en $\widetilde{X}$ (donde U puede ser visto en $\widetilde{X}$ mediante el isomorfismo $\Gamma_f \cong U$), y decimos que $\widetilde{Y} \subseteq \widetilde{X}$ es la **transformada estricta** de Y en el blow-up de X.

Veamos algunos ejemplos que permiten ilustrar la geometría detrás del blow-up.

Ejemplo importante 2.10.3. —

(1) Si $r = 1$, entonces tenemos que $\widetilde{X} \subseteq X \times \mathbb{P}^0 \cong X$ y luego $X \cong \widetilde{X}$.

(2) En $X = \mathbb{A}^2$ con coordenadas (x, y) consideramos $f_1 = x, f_2 = y \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^2)$. Luego, el blow-up de $\widetilde{X}$ en (x, y) es una subvariedad de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$. Explícitamente, la aplicación

$$U \longrightarrow \mathbb{P}^1,\ (x, y) \longmapsto [x, y]$$

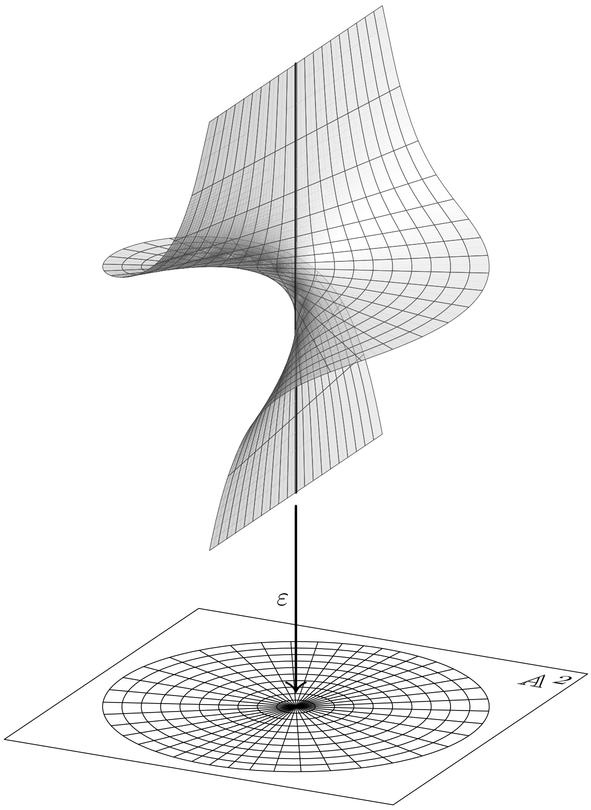
está bien definida en $U = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y en dicho abierto el grafo está dado por

$$\Gamma = \left\{ ((x, y), [u, v]) \in U \times \mathbb{P}^1 \text{ tal que } \det \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = xv - yu = 0 \right\}.$$

Luego,

$$\widetilde{X} = \{((x, y), [u, v]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \text{ tal que } xv - yu = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$$

es el blow-up de $\mathbb{A}^2$ en (x, y). Además, el morfismo $\varepsilon : \widetilde{X} \to \mathbb{A}^2$ está dado por $\varepsilon((x, y), [u, v]) \overset{\mathsf{def}}{=} (x, y)$ y en particular $E = \varepsilon^{-1}((0, 0)) \cong \mathbb{P}^1$ es el conjunto excepcional.



Notar que las rectas vectoriales $L \subseteq \mathbb{A}^2$ intersectan $(0,0)$ y luego la correspondiente transformada estricta $\widetilde{L}$ es una recta en $\widetilde{X}$ que intersecta $E \cong \mathbb{P}^1$ exactamente en el punto $[L]$ de $\mathbb{P}^1$. En particular, si L_1 y L_2 son dos rectas vectoriales entonces $\widetilde{L}_1 \cap \widetilde{L}_2 = \emptyset$.

Ejercicio 2.10.4. — Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín irreducible y sean $f_1, \dots, f_r \in \mathscr{O}(X)$ no-nulos.

(1) Probar que el blow-up de X en $f_1, \dots, f_r$ verifica

$$\widetilde{X} \subseteq \{(x,[y]) \in X \times \mathbb{P}^{r-1} \text{ tal que } y_i f_j(x) = y_j f_i(x) \text{ para todos } i,j \in \{1,\dots,r\}\}.$$

(2) Sean $g_1, \dots, g_s \in \mathscr{O}(X)$ no-nulos tales que $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ y sea $\varepsilon : \widetilde{X} \to X$ (resp. $\varepsilon' : \widetilde{X}' \to X$) el blow-up de X en $(f_1, \dots, f_r)$ (resp. en $(g_1, \dots, g_s)$). Probar que existe un isomorfismo $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ tal que $\varepsilon' \circ \varphi = \varepsilon$, i.e., tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \widetilde{X}' \arrow[dl, "\varepsilon'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(3) Consideremos la *cúbica nodal*

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^2(x+1)\} \subseteq \mathbb{A}^2.$$

Calcular la transformada estricta $\widetilde{C}$ en el blow-up de $\mathbb{A}^2$ en (x,y).

Una consecuencia importante del Ejercicio 2.10.4 (2) es que la definición de blow-up sólo depende realmente del ideal generado por $f_1, \dots, f_r$.

Definición 2.10.5. — Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín irreducible, y sea $I \subseteq \mathscr{O}(X)$ un ideal no-nulo definiendo $Z := V(I) \subseteq X$ subvariedad cerrada. El **blow-up de X a lo largo de Z**, denotado por

$$\varepsilon : \mathrm{Bl}_Z(X) \longrightarrow X,$$

es el blow-up $\widetilde{X}$ en cualquier conjunto de generadores $(f_1, \dots, f_r)$ del ideal I.

La subvariedad $Z \subseteq X$ es llamada el **centro** del blow-up, y se tiene que $\mathrm{Exc}(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(Z)$ es el conjunto excepcional.

2.11. Dimensión y morfismos finitos

El objetivo de esta sección es definir el concepto de *dimensión* formalmente, que intuitivamente mide cuantos "grados de libertad" tenemos en una variedad algebraica.

Recuerdo 2.11.1. — Sea k un cuerpo fijo. Dada una extensión de cuerpos $k \subseteq K$ (i.e., k es un sub-cuerpo de K), decimos que un conjunto $B \subseteq K$ es una **base de trascendencia** del cuerpo K sobre k si:

(1) Los elementos de B son *algebraicamente independientes* sobre k (i.e., los elementos de B no verifican ninguna ecuación polinomial no-trivial con coeficientes en k).
(2) La extensión de cuerpos $k(B) \subseteq K$ es *algebraica* (i.e., todo elemento de K es la raíz de algún polinomio no-nulo con coeficientes en $k(B)$).

Más aún, si $K = k(x_1, \dots, x_r)$ es una extensión de k *finitamente generada* (i.e., K se obtiene al agregar a k finitos elementos $x_1, \dots, x_r \in K$), entonces:

(i) El cuerpo K posee una base de trascendencia *finita*.
(ii) Dos bases de trascendencia poseen la misma cantidad de elementos. Dicho cardinal se llama el **grado de trascendencia** de K sobre k, y se denota $\operatorname{tr.deg}_k(K)$.

En otras palabras, el grado de trascendencia mide la cantidad minimal de elementos independientes $x_1, \dots, x_d$ que se deben agregar a k de tal suerte que todo elemento en K se algebraico sobre este nuevo cuerpo $k(x_1, \dots, x_d)$.

Definición 2.11.2. — Sea X una variedad algebraica. Si X es irreducible, entonces definimos su **dimensión** mediante

$$\dim(X) := \operatorname{tr.deg}_k(k(X)),$$

i.e., el grado de trascendencia del *cuerpo* de funciones racionales de X sobre k. En general, si $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ son las componentes irreducibles de X, definimos

$$\dim(X) := \max_{1 \leq i \leq m} \{\dim(X_i)\}.$$

En particular, decimos que X es de **dimensión pura** d si $\dim(X_i) = d$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Ejemplo importante 2.11.3. —

(1) Si $U \subseteq X$ es un abierto denso, entonces $k(X) \cong k(U)$. En particular, $\dim(U) = \dim(X)$. Luego, la dimensión es un *invariante birracional.*
(2) Dado que $k(\mathbb{A}^n) \cong k(T_1, \dots, T_n)$, tenemos que $\dim(\mathbb{A}^n) = n$.

(3) Por (1) y (2), tenemos que $\dim(\mathbb{P}^n) = n$ y $\dim(\mathrm{Gr}(m, n)) = m(n - m)$.

Existe otra definición importante de dimensión, inspirada por el álgebra conmutativa.

Definición 2.11.4. — Sea X un espacio topológico. La **dimensión de Krull** es el supremo $\dim_{\mathrm{Krull}}(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de todos los $d \in \mathbb{N}$ tal que existen cerrados irreducibles $X_0, X_1, \ldots, X_d$ tales que

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d.$$

Ejemplo importante 2.11.5. —

(1) Dado que

$$\mathbb{A}^n \supsetneq \mathbb{A}^{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathbb{A}^1 \supsetneq \mathbb{A}^0 = \{\mathrm{pt}\},$$

tenemos que $\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^n) \geq n$.

(2) Sea $Y \subseteq X$ un subconjunto, y sean $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_d$ cerrados en Y (que por definición son de la forma $Y_i = Z_i \cap Y$ con $Z_i \subseteq X$ cerrado). Luego, la adherencia de los cerrados Y_i son cerrados distintos en X, por lo que deducimos que $\dim_{\mathrm{Krull}}(Y) \leq \dim_{\mathrm{Krull}}(X)$.

Como vimos en los ejemplos anteriores, cada una de las definiciones de dimensión tiene sus ventajas y desventajas. Nos gustaría entonces probar que ambas nociones coinciden, para lo cual necesitaremos del *Teorema de normalización de Noether* (1926) que afirma que una variedad algebraica afín irreducible es de $\dim(X) = n$ si y sólo si existe $f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ morfismo regular sobreyectivo que es *finito*.

Recuerdo 2.11.6. — Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos conmutativos con unidad, que permite dotar a B de estructura de A-módulo (definiendo $a \cdot b := \varphi(a)b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$). Decimos que $x \in B$ es **entero** sobre A (respecto a φ) si existe una relación polinomial *mónica*

$$x^n + \varphi(a_1)x^{n-1} + \cdots + \varphi(a_{n-1})x + \varphi(a_n) = 0.$$

En particular, decimos que B es **entero** sobre A (respecto a φ) si todo elemento $x \in B$ es entero.

Más aún, se puede probar que en el caso (de nuestro interés) en que A y B son k-álgebras finitamente generadas, se tiene que B es entero sobre A si y sólo si B es un A-módulo finitamente generado.

Definición 2.11.7. — Sean X e Y variedades algebraicas *afines*. Decimos que un morfismo regular $f : X \to Y$ es un **morfismo finito** si $\mathscr{O}(X)$ es entero sobre $\mathscr{O}(Y)$ respecto al pullback

$$f^* : \mathscr{O}(Y) \to \mathscr{O}(X).$$

En otras palabras, el morfismo de k-álgebras f^* hace que $\mathscr{O}(X)$ sea un $\mathscr{O}(Y)$-módulo finitamente generado.

Veamos algunos ejemplos concretos para aterrizar el concepto anterior. Más adelante veremos otras consecuencias geométricas, que justificarán el adjetivo *finito*.

Ejemplo 2.11.8. —

(1) Sea $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y consideremos
$$f : \mathbb{A}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^1,\ t \longmapsto t^d.$$
Entonces, f es un morfismo finito. En efecto, el pullback de f está dado por
$$f^* : k[T] \hookrightarrow k[T],\ u \longmapsto u \circ f$$
y corresponde a la inclusión de $A := k[T^d]$ en $B = k[T]$. Finalmente, notemos que $B = k[T]$ está generado como A-módulo por $\{1, T, T^2, \ldots, T^{d-1}\}$ (y luego todo elemento de B es entero sobre A).

(2) La proyección $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$, $(x, y) \mapsto x$ **no** es un morfismo finito, pues $k[X, Y]$ **no** es finitamente generado como $k[X]$-módulo. Sin embargo, $k[X, Y]$ está generado como $k[X]$-*álgebra* por $\{1, Y\}$.

Ejercicio 2.11.9. — Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 = 1\}$, y sea
$$f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1,\ (x, y) \longmapsto x.$$
Probar que f es un morfismo finito.

La definición principal de esta sección es la siguiente.

Definición 2.11.10. — Sean X e Y variedades algebraicas. Decimos que un morfismo regular $f : X \to Y$ es un **morfismo finito** si *existe* un cubrimiento de Y por abiertos afines $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ tal que:

(1) La preimagen $U_i := f^{-1}(V_i)$ es un abierto *afín* de X.

(2) El morfismo entre variedades algebraicas afines (obtenido por restricción) $f : U_i \to V_i$ es finito en sentido de la Definición 2.11.7.

Ejemplo importante 2.11.11. — Sea $Z \subseteq X$ una subvariedad cerrada. Entonces, el morfismo de inclusión $\iota : Z \hookrightarrow X$ es un morfismo finito.

El siguiente lema técnico será muy útil para simplificar la definición de morfismo finito.

Lema 2.11.12. — *Sea Y una variedad algebraica* afín*, y sea $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ un cubrimiento por abiertos afines tal que cada $V_i = V_{g_i}$ es un abierto principal de la forma*

$$V_{g_i} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{y \in Y \text{ tal que } g_i(y) \neq 0\}$$

para cierta $g_i \in \mathscr{O}(Y)$.

Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular, donde X es una variedad algebraica arbitraria*, y definamos $U_i := f^{-1}(V_i)$. Si verifica que:*

(1) *Cada $U_i \subseteq X$ es un abierto* afín.

(2) *El morfismo $f : U_i \to V_i$ es finito.*

Entonces, X es una variedad algebraica afín *y $f : X \to Y$ es un morfismo finito.*

Demostración. — Sean $A = \mathscr{O}(X) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ y $B = \mathscr{O}(Y)$ las k-álgebras de funciones regulares (globales). Entonces, el pullback de funciones regulares $f^* : B \to A$ permite ver A como un B-módulo.

Más aún, si escribimos $f_i := f^*(g_i) \in \mathscr{O}(X)$, entonces tenemos que $\mathscr{O}(V_i) = B_{g_i}$ y $\mathscr{O}(U_i) = A_{f_i}$ están dadas por las localizaciones respectivas. Notar que, por hipótesis, A_{f_i} es un B_{g_i}-módulo finitamente generado por (finitos) elementos de la forma

$$a_{ij} = \frac{u_{ij}}{f_i^{N_{ij}}} \text{ donde } u_{ij} \in A,\ N_{ij} \in \mathbb{N}, \text{ y } j \in J \text{ un conjunto finito.}$$

Reescalando por $f_i^{N_{ij}} \stackrel{\mathsf{def}}{=} f^*(g_i)^{N_{ij}}$ (usando la estructura de B_{g_i}-módulo), podemos suponer que $a_{ij} \in A$, i.e., $A_{f_i} = \langle a_{ij} \rangle_{j \in J}$ como B_{g_i}-módulo.

Veamos que A es de hecho un B-módulo finitamente generado:

Sea $v \in A$. Dado que su imagen en A_{f_i} está generada por los a_{ij}, existen $n_i \in \mathbb{N}$ y elementos $v_{ij} \in B$ tales que

$$f_i^{n_i} v = \sum_{j \in J} f^*(v_{ij}) a_{ij} \text{ en } A. \qquad (\star)$$

Por otro lado, dado que $Y = \bigcup_{i \in I} V_{g_i} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \bigcup_{i \in I} V_{g_i^{n_i}}$ es una variedad algebraica afín, el Hilbert Nullstellensatz implica que existen $u_i \in B$ tales que $1 = \sum_{i \in I} u_i g_i^{n_i}$ en B. Aplicando f^* a la última identidad obtenemos que

$$1 = \sum_{i \in I} f^*(u_i) f_i^{n_i} \text{ en } A. \qquad (\star\star)$$

Así, ($\star$) y ($\star\star$) implican que $v = \sum_{i,j} f^*(u_i v_{ij}) a_{ij}$, i.e., $A = \langle a_{ij} \rangle$ es un B-módulo finitamente generado.

Para concluir, notamos que A es una B-álgebra finitamente generada y luego (dado que B es una k-álgebra finitamente generada), tenemos que $A = \mathscr{O}(X)$ es una k-álgebra finitamente generada y reducida. Luego,

$$X' := \operatorname{Specm}(A)$$

es una variedad algebraica afín que cumple $\mathscr{O}(X') \cong \mathscr{O}(X)$. Entonces, obtenemos

$$f : X \xrightarrow{\varphi} X' \xrightarrow{f'} Y,$$

donde f' es el morfismo regular que corresponde a $f^* : B = \mathscr{O}(Y) \to A \cong \mathscr{O}(X')$, y donde $\varphi : X \to X'$, $x \longmapsto \mathfrak{m}_x$. Dado que A es entero sobre B, tenemos que $f' : X' \to Y$ es un morfismo finito.

Finalmente, el Nullstellensatz débil implica que

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(U_i')} : U_i \overset{\mathsf{def}}{=} \varphi^{-1}(U_i') \xrightarrow{\sim} U_i' := (f')^{-1}(V_i)$$

pues U_i' es afín (pues V_i es un abierto principal). Así, $X \cong X'$ y f es un morfismo finito. $\square$

Gracias al resultado anterior, obtenemos la siguiente simplicación importante.

Proposición 2.11.13. — *Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito entre variedades algebraicas* arbitrarias. *Entonces, para <u>todo</u> abierto afín $V \subseteq Y$ se tiene que $U := f^{-1}(V)$ es un abierto* afín *de X, y además la restricción $f : U \to V$ es un morfismo finito.*

Demostración. — En el caso particular donde $X = \operatorname{Specm}(A)$ e $Y = \operatorname{Specm}(B)$ son variedades algebraicas afines, tenemos que el pullback $f^* : B \to A$ permite ver A como un B-módulo finitamente generado.

Si $V = V_g \subseteq Y$ es un abierto principal, definido a partir de $g \in \mathscr{O}(Y)$, entonces $U = f^{-1}(V) = \operatorname{Specm}(A_h)$ es afín (donde $h \overset{\mathsf{def}}{=} f^*(g) \in \mathscr{O}(X)$). Además, A_h es un B_g-módulo finitamente generado (pues A es entero sobre B, y luego A_h es entero sobre B_g).

Si $V \subseteq Y$ es un abierto afín arbitrario, basta cubrirlo por $V_i = V_{g_i} \subseteq V$ abiertos principales, y notar que $U_i = f^{-1}(V_i)$ es afín y la restricción $f : U_i \to V_i$ es un morfismo finito. Luego, el Lema anterior implica que $U = f^{-1}(V)$ es un abierto afín y $f : U \to V$ un morfismo finito.

En el *caso general* (de variedades arbitrarias), por definición de morfismo finito, *existe* un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i \subseteq Y$ tal que $U_i = f^{-1}(V_i) \subseteq X$ es un abierto afín y la restricción $f : U_i \to V_i$ es un morfismo finito.

Si consideramos ahora un abierto afín arbitrario $V \subseteq Y$, entonces cada $W_i := V_i \cap V$ es un abierto afín (¡pues Y es una variedad separada!). Además, podemos cubrir V por abiertos principales V_{ij} de tal suerte que $V_{ij} \subseteq W_i$ esté dado por la condición $g_{ij} \neq 0$.

El caso particular anterior implica que $U_{ij} := f^{-1}(V_{ij}) \subseteq U = f^{-1}(V)$ es un abierto afín, y la restricción $f : U_{ij} \to V_{ij}$ es un morfismo finito. Nuevamente, el Lema anterior permite concluir que U es afín y que $f : U \to V$ es un morfismo finito. □

Corolario 2.11.14. — *La composición de morfismos finitos, es también un morfismo finito.*

Demostración. — Ejercicio al lector. □

El siguiente resultado discute algunas de las consecuencias geométricas de la finitud, y que son en particular condiciones *necesarias* para que un morfismo sea finito.

Proposición 2.11.15. — *Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito entre variedades algebraicas. Entonces:*

(1) *Todo todo $y \in Y$, la* **fibra**

$$f^{-1}(y) \overset{\mathsf{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}$$

es un conjunto finito.

(2) *La imagen* $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$ *es un conjunto cerrado.*

Demostración. — Ambas afirmaciones son locales, por lo que podemos suponer que X e Y son variedades algebraicas afines. Sean entonces $A = \mathscr{O}(X)$ y $B = \mathscr{O}(Y)$ las k-álgebras de funciones regulares, y $f^* : B \to A$ el pullback de f.

Para ver (1), elegimos generadores $x_1, \ldots, x_n$ de la k-álgebra A (que determinan la incrustación $X \subseteq \mathbb{A}^n$). Cada x_i es entero sobre B y luego hay una relación mónica

$$x_i^{d_i} + \sum_{j=1}^{d_i} f^*(b_{ij}) x_i^{d_i - j} = 0 \text{ en } A. \qquad (\star)$$

Luego, si $x \in f^{-1}(y)$ entonces $(f^*(b_{ij}))(x) \stackrel{\text{def}}{=} b_{ij}(f(x)) = b_{ij}(y)$ depende sólo de $y \in Y$. Así, al fijar $y \in Y$ se obtienen finitas soluciones para x_i en $(\star)$, y luego finitas para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Para ver (2), consideremos el ideal $I := \ker(f^*) \subseteq B$, y probemos que $\operatorname{Im}(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(X) = V(I)$ es un cerrado en Y.

Para ello, recordemos que si $x \in X$ y $\mathfrak{m}_x \subseteq A$ es el ideal maximal correspondiente, entonces $(f^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \eta_y$ es el ideal maximal correspondiente a $y = f(x) \in Y$. En particular, dado que $0 \in \mathfrak{m}_x \subseteq A$, tenemos que $I \stackrel{\text{def}}{=} \ker(f^*) \subseteq (f^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \eta_y$, i.e., $y = f(x) \in V(I)$. Así, $\operatorname{Im}(f) \subseteq V(I)$.

Para la otra inclusión, notamos primero que si $y \in Y$ y $\eta_y \subseteq B$ es el ideal maximal correspondiente, entonces los puntos de la fibra $f^{-1}(y)$ corresponden a ideales maximales $\mathfrak{m} \subseteq A$ tales que $f^*(\eta_y) \subseteq \mathfrak{m}$. Luego, $y \notin \operatorname{Im}(f)$ si y sólo si $\langle f^*(\eta_y) \rangle = A$.

Así, para probar que $V(I) \subseteq \operatorname{Im}(f)$, consideramos un ideal maximal $\eta = \eta_y \subseteq B$ tal que $I \subseteq \eta$, y suponemos por contradicción que $\langle f^*(\eta) \rangle = A$: Sean $a_1, \ldots, a_m \in A$ generadores de A como B-módulo. Entonces, la condición $\langle f^*(\eta) \rangle = A$ implica que existen $b_{ij} \in \eta$ tales que $a_i = \sum_{j=1}^m f^*(b_{ij}) a_j$ en A. Lo anterior puede ser escrito matricialmente como

$$(\mathrm{I}_m - f^*(b_{ij})\, \mathrm{I}_m) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = 0,$$

de donde deducimos que $\det(\mathrm{I}_m - f^*(b_{ij})\, \mathrm{I}_m) = 0$ en A, y de donde se obtiene directamente que $1_A \in f^*(\eta)$. Dado que $(f^*)^{-1}(1_A) = 1_B \subseteq \eta + I$, y dado que $I \subseteq \eta$, concluímos que $\langle 1_B \rangle \stackrel{\text{def}}{=} B = \eta$, una contradicción. $\square$

Ejemplo importante 2.11.16. — Sea $p \in \mathbb{A}^n$ un punto. El blow-up

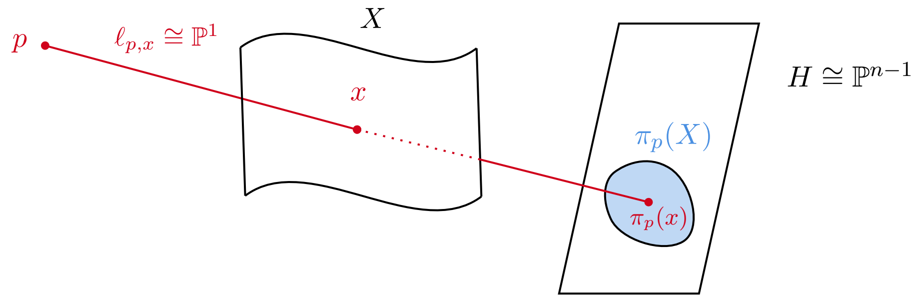
$$\varepsilon : \mathrm{Bl}_p(\mathbb{A}^n) \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

no es un morfismo finito, puesto que el conjunto excepcional $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ tiene cardinal infinito.

Definición 2.11.17. — Sea $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ un cerrado propio, y sea $p \in \mathbb{P}^n$ tal que $p \notin X$. Dado un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ tal que $p \notin H$, definimos la **proyección de** p **a** H como el morfismo

$$\pi_p : X \longrightarrow H \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

que asocia a cada $x \in X$ el único punto $\pi_p(x) \in H$ obtenido como la intersección de la recta $\ell_{p,x} := \langle p, x\rangle \cong \mathbb{P}^1$, que pasa por p y x, con el hiperplano H (i.e., $\ell_{p,x} \cap H = \{\pi_p(x)\}$).



Observación importante 2.11.18. — Siempre podemos escoger coordenadas de $\mathbb{P}^n$ de tal suerte que $p = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{P}^n$ y que $H = \{x_0 = 0\}$.

En tal caso, $\pi_p([x_0, \dots, x_n]) = [0, x_1, \dots, x_n]$. Más aún, $\pi_p(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ no depende de H (módulo cambio de coordenadas).

Proposición 2.11.19. — *Sea $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ un cerrado propio, y sea $p \in \mathbb{P}^n$ tal que $p \notin X$. Entonces, dado un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ tal que $p \notin H$, la proyección*

$$\pi_p : X \longrightarrow H \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

es un morfismo finito.

Demostración. — Dado que $X = V(f_1, \dots, f_r) \overset{\text{def}}{=} V(f_1) \cap \cdots V(f_r) \subseteq \mathbb{P}^n$, basta suponer que $X = V(f)$ es una hipersuperficie[19] definida por $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ polinomio homogéneo de grado d. Además, podemos suponer que $p = [1, 0, \dots, 0]$ y que $H = \{x_0 = 0\}$. Así, dado que $f(p) \neq 0$, tenemos que f es de la forma

$$f = x_0^d + \sum_{i=1}^{d} g_i(x_1, \dots, x_n) x_0^{d-i}.$$

En particular, si nos restringimos al abierto afín estándar $U_n = \{x_n \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ con coordenadas $y_0, \dots, y_{n-1}$ dadas por $y_i \overset{\text{def}}{=} \frac{x_i}{x_n}$, entonces $\pi^{-1}(H \cap U_n) \overset{\text{def}}{=} X \cap U_n$ y además

$$\pi_p|_{U_n} : X \cap U_n \longmapsto H \cap U_n \cong \mathbb{A}^{n-1}, \ (y_0, \dots, y_{n-1}) \longmapsto (0, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

[19] Pues X es un cerrado dentro de una hipersuperficie, la inclusión de cerrados es un morfismo finito, y la composición de morfismos finitos es un morfismo finito.

Por otra parte, notamos que $\mathscr{O}(X \cap U_n)$ es entero sobre $\mathscr{O}(H \cap U_n) \cong k[y_1, \ldots, y_{n-1}]$ puesto que

$$y_0^d + \sum_{i=1}^{d} a_i y_0^{d-1} = 0 \text{ donde } a_i := g_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, 1) \in \mathscr{O}(H \cap U_n)$$

implica que y_0 es entero sobre $\mathscr{O}(H \cap U_n)$. El mismo argumento, reemplazando U_n por U_i con $i \in \{0, \ldots, n\}$, nos permite concluir que $\pi_p : X \to H$ es un morfismo finito. $\square$

Como consecuencia, obtenemos el siguiente resultado de Emmy Noether (1926), conocido como el **Teorema de Normalización de Noether**.

Teorema 2.11.20 **(Noether).** — *Sea X una variedad algebraica afín. Entonces, existe un morfismo finito sobreyectivo*

$$f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$$

para cierto $d \in \mathbb{N}$.

Demostración. — Supongamos que $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Si $X = \mathbb{A}^n$ el resultado es automático, por lo que podemos asumir que $X \subsetneq \mathbb{A}^n \cong U_0 = \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ es un cerrado propio, y podemos considerar $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ la clausura proyectiva de X. En particular, $X \cong \overline{X} \cap U_0$.

Luego, si escogemos $p \notin U_0$ tal que $p \notin \overline{X}$ y escogemos $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ un hiperplano tal que $p \notin H$, entonces la proyección

$$\pi_p : \overline{X} \longmapsto \mathbb{P}^{n-1} \cong H$$

es un morfismo finito que se restringe a $\pi_p|_X : X \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}$, que por ende también es un morfismo finito. Si la restricción $\pi_p|_X$ es sobreyectiva entonces obtenemos el resultado deseado, mientras que si no es sobreyectiva podemos continuar proyectando hasta obtener $X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$ finito y sobreyectivo. $\square$

Observación 2.11.21. — Notar que la demostración anterior nos dice más precisamente que si $X \subsetneq \mathbb{A}^n$ es un cerrado propio, entonces existe

$$f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^d$$

morfismo finito sobreyectivo, y además se puede asumir $d < n$.

Para concluir esta sección, usaremos este resultado para comparar las diferentes nociones de dimensión. Además de lo anterior, necesitaremos el siguiente resultado que es conocido en álgebra conmutativa como *going-up* y *going-down*:

***Lema 2.11.22* (Cohen-Seidenberg, 1946).** — *Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito sobreyectivo entre variedades algebraicas. Entonces,*

(1) *Para todo $Y' \subseteq Y$ cerrado irreducible, existe $X' \subseteq X$ cerrado irreducible tal que $f(X') = Y'$.*
(2) *Si $X', X'' \subseteq X$ son cerrados irreducibles* distintos *tales que $f(X') = f(X'')$, entonces X' y X''* no son comparables *(i.e., $X' \not\subseteq X''$ y $X'' \not\subseteq X'$).*

Demostración. — Para probar (1), escribimos

$$f^{-1}(Y') = X_1 \cup \cdots \cup X_m, \text{ donde cada } X_i \text{ es un cerrado irreducible.}$$

Luego, aplicando f, obtenemos $Y' = f(X_1) \cup \cdots \cup f(X_m)$, donde cada $f(X_i)$ es cerrado pues f es un morfismo finito. Dado que Y' es irreducible, tenemos que $Y' = f(X_i)$ para cierto $X_i =: X'$.

Para probar (2), supongamos por contradicción que $X' \subsetneq X''$ y consideremos $x \in X'' \setminus X'$. Sea U una vecindad *afín* del punto x en X''. Luego, $X' \cap U \subsetneq X'' \cap U$ es un cerrado propio de la variedad afín $X'' \cap U$, y por ende existe una función regular $u \in \mathscr{O}(X'' \cap U)$ tal que $u(x) \neq 0$ pero $u|_{X' \cap U} = 0$.

Consideremos $V = f(U)$, que podemos asumir afín pues f es un morfismo finito. Entonces, $f|_U : U \to V$ es un morfismo finito que verifica por hipótesis

$$f(X') \cap V \overset{\mathsf{def}}{=} f(X' \cap U) = f(X'' \cap U).$$

En particular, el elemento $u \in \mathscr{O}(X'' \cap U)$ es entero sobre el anillo $\mathscr{O}(W)$, donde $W := f(X'' \cap U)$, y por ende hay una relación mónica

$$u^d + f^*(v_1)u^{d-1} + \cdots + f^*(v_d) = 0 \text{ en } \mathscr{O}(X'' \cap U), \qquad (\star)$$

donde $v_i \in \mathscr{O}(W) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}(f(X'' \cap U))$ y $d \in \mathbb{N}$ puede suponerse minimal.

Finalmente, dado que $u \neq 0$ en $X'' \cap U$ y d es minimal, tenemos que $f^*(v_d) \overset{\mathsf{def}}{=} v_d \circ f \neq 0$. Sin embargo, la función u se anula en $X' \cap U$ y por ende $(\star)$ implica que $f^*(v_d)|_{X' \cap U} = 0$, de donde deducimos que $f^*(v_d) = 0$ puesto que $f(X') = f(X'')$, una contradicción. $\square$

Como consecuencia de lo anterior, tenemos que:

Proposición 2.11.23. — *Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito sobreyectivo entre variedades algebraicas* irreducibles*. Entonces,*

(1) $\dim(X) = \dim(Y)$.
(2) $\dim_{\mathrm{Krull}}(X) = \dim_{\mathrm{Krull}}(Y)$.

Demostración. — En (1), podemos suponer que X e Y son afines, dado que la dimensión es un invariante birracional. Luego, $\mathscr{O}(X)$ es entero sobre $\mathscr{O}(Y)$

via el pullback $f^* : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X)$, de donde se deduce que $k(X)$ es una extensión algebraica[(20)] de $k(Y)$. En particular,

$$\operatorname{tr.deg}_k(k(X)) = \operatorname{tr.deg}_k(k(Y)), \text{ i.e., } \dim(X) = \dim(Y).$$

En (2), consideramos $X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d$ cadena estríctamente creciente de cerrados irreducibles en X. Al aplicar f obtenemos una cadena $Y_0 \subseteq \cdots \subseteq Y_d$ en Y, donde cada $Y_i := f(X_i)$ es irreducible y cerrado dado que f es un morfismo finito. El Lema de Cohen-Seidenberg implica entonces que $Y_i \neq Y_{i+1}$ y luego $\dim_{\mathrm{Krull}}(Y) \geq \dim_{\mathrm{Krull}}(X)$.

Por otro lado, si consideramos $Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_d$ cadena estríctamente creciente de cerrados irreducibles en Y, entonces el Lema de Cohen-Seidenberg permite encontrar $X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d$ cadena estríctamente creciente de cerrados irreducibles en X, i.e., $\dim_{\mathrm{Krull}}(X) \geq \dim_{\mathrm{Krull}}(Y)$. □

Estamos listos para probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.11.24. — *Sea X una variedad algebraica irreducible. Entonces,*

$$\dim(X) = \dim_{\mathrm{Krull}}(X).$$

Demostración. — Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica afín, y usar inducción en $n \in \mathbb{N}$, siendo el resultado cierto para $n = 0$.

Caso 1. Si $X \subsetneq \mathbb{A}^n$ es un cerrado propio, el Teorema de normalización de Noether implica que existe $f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ morfismo finito sobreyectivo, donde $m < n$. Luego, aplicando la proposición anterior, la hipótesis de inducción, y la proposición anterior nuevamente, obtenemos:

$$\dim_{\mathrm{Krull}}(X) = \dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^m) = \dim(\mathbb{A}^m) = \dim(X),$$

de donde se obtiene el resultado.

Caso 2. Si $X = \mathbb{A}^n$ es el espacio afín, sabemos que $\dim(\mathbb{A}^n) = n$ y que $\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^n) \geq n$. Consideremos entonces $X_0 \subsetneq \cdots \subsetneq X_d = \mathbb{A}^n$ cadena estríctamente creciente de cerrados irreducibles en $\mathbb{A}^n$, y notemos que por definición tenemos que $\dim_{\mathrm{Krull}}(X_{d-1}) \geq d - 1$.

Dado que $X_{d-1} \subsetneq \mathbb{A}^n$ es un cerrado propio, podemos argumentar como en el caso (1) para obtener $f : X_{d-1} \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ morfismo finito sobreyectivo, donde

[(20)] Si $\varphi : A \hookrightarrow B$ es una extensión entera de dominios enteros, entonces $\mathrm{Fr}(A) \hookrightarrow \mathrm{Fr}(B)$ es una extensión de cuerpos algebraica.

$m < n$. Luego, aplicando la proposición anterior y la hipótesis de inducción, obtenemos que:

$$d - 1 \leq \dim_{\mathrm{Krull}}(X_{d-1}) = \dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^m) = m \leq n - 1,$$

de donde deducimos que $d \leq n$, y así $\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{A}^n) = n$. $\square$

Ejercicio 2.11.25. — Sea X variedad algebraica irreducible. Probar que si $Z \subsetneq X$ es un cerrado propio, entonces $\dim(Z) < \dim(X)$.
Indicación: Utilizar la Observación 2.11.21.

Para terminar esta sección, mencionamos el siguiente resultado importante de Wolfgang Krull (1899-1971), que admitiremos y usaremos líbremente sin demostración (para más detalles, ver [**Eis95**, §8.2.2] y [**Eis95**, Theorem 10.1]).

Observación importante 2.11.26. — En Álgebra conmutativa, el famoso **Teorema del ideal principal de Krull** (también conocido usualmente como **Krull Hauptidealsatz**) establece que

> En un anillo noetheriano, todo ideal principal $I = \langle f \rangle$ verifica que cada ideal primo *minimal* sobre I tiene a lo más altura 1.

Lo anterior, se traduce geométricamente en el siguiente resultado:

***Teorema 2.11.27* (Krull, 1928).** — *Sea X una variedad algebraica afín e irreducible, y $f \in \mathscr{O}(X)$ una función regular no-nula y no-invertible. Entonces, toda componente irreducible de $V(f) \subseteq X$ es de dimensión* $\dim(X) - 1$.

Ejercicio 2.11.28. — Sea $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ un polinomio homogéneo no-constante, y sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ la hipersuperficie definida por f. Probar que $\dim(X) = n - 1$.

Terminología 2.11.29. — Sea X una variedad algebraica irreducible de $\dim(X) = n$. Decimos que X es una

(1) **curva** si $n = 1$,
(2) **superficie** si $n = 2$,
(3) **threefold** si $n = 3$,
(4) **fourfold** si $n = 4$, etc.

Es común de hablar de *curvas algebraicas*, *superficies algebraicas*, *threefolds algebraicos*, etc. para referirse a una variedad algebraica de dichas dimensiones.

2.12. Dimensión de morfismos y aplicaciones

En esta sección discutiremos algunas propiedades y aplicaciones importantes relacionadas al concepto de dimensión. Comencemos por una extensión del Teorema de Krull.

Teorema 2.12.1. — *Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ variedad quasi-proyectiva irreducible de $\dim(X) = n$, y sean $f_1, \dots, f_r \in k[X_0, \dots, X_n]$ polinomios homogéneos no-constantes. Sea*

$$Y := X \cap V(f_1, \dots, f_r) \subseteq X,$$

entonces cada componente irreducible de Y es de dimensión $\geq n - r$.

Demostración. — Sea Z una componente irreducible de Y, y veamos por inducción en r que $\dim(Z) \geq n - r$. El caso $r = 1$ corresponde exactamente al Teorema de Krull, por lo que podemos suponer que $r \geq 2$. Notar que por definición, tenemos que

$$Z \subseteq X \cap V(f_1, \dots, f_{r-1}),$$

por lo que $Z \subseteq W$ para cierta componente irreducible W de $X \cap V(f_1, \dots, f_{r-1})$.

Por otro lado, la hipótesis inductiva nos dice que $\dim(W) \geq n - r + 1$. En particular, si f_r se anula en W (i.e. $f_r|_W = 0$) entonces tenemos que $\dim(Z) = \dim(W) \geq n - r + 1 \geq n - r$, por lo que podemos suponer que f_r no es idénticamente nula en W.

En tal caso, consideramos $x \in Z$ y $U \subseteq W$ una vecindad abierta afín de x. Dado que Z y W son irreducibles, tenemos que U es un abierto denso y luego $\dim(Z) = \dim(Z \cap U)$ y $\dim(W) = \dim(U)$. En otras palabras, podemos reducirnos al caso afín y considerar $g_r := f_r|_U \neq 0$, donde $Z \cap U$ es una componente irreducible de $V(g_r)$. El Teorema de Krull implica que

$$\dim(Z \cap U) = \dim(U) - 1 \geq (n - r + 1) - 1 = n - r$$

y luego $\dim(Z) \geq n - r$. □

Observación importante 2.12.2. — Es importante destacar que la desigualdad $\dim(Y) \geq n - r$ puede ser **estrícta**. Por ejemplo, la cúbica torcida (ver Ejemplo 2.7.22) $C = \nu_3(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^1$ está dada por 3 ecuaciones en $\mathbb{P}^3$, por lo que $\dim(C) = 1 > 3 - 3 = 0$.

Definición 2.12.3. — Sea X una variedad algebraica de dimensión pura n, y sea $Y \subseteq X$ una subvariedad cerrada. La **codimensión** de Y en X es

$$\operatorname{codim}_X(Y) := \dim(X) - \dim(Y) = n - \dim(Y).$$

En caso que la variedad X sea clara en el contexto, escribiremos símplemente $\operatorname{codim}(Y)$ en lugar de $\operatorname{codim}_X(Y)$.

En particular, decimos que una variedad (quasi-)proyectiva de dimensión n en $\mathbb{P}^N$ es una **intersección completa** si puede ser definida por $c = N - n$ ecuaciones.

La siguiente conjetura fue propuesta por Hartshorne en 1974. Hoy en día, incluso el caso $N = n + 2$ está abierto.

***Conjetura 2.12.4* (Hartshorne). —** *Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva* suave *de dimensión n tal que $3n > 2N$. Entonces, X es una intersección completa.*

***Ejemplo importante 2.12.5.* —** Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles de $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$. Entonces:

(1) $\dim(X \times Y) = n + m$. En efecto, podemos suponer que X e Y son afines y considerar, gracias al Teorema de normalización de Noether, morfismos sobreyectivos finitos
$$f : X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n \text{ y } g : Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m.$$
El morfismo
$$f \times g : X \times Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^{n+m}$$
es sobreyectivo finito, y luego $\dim(X \times Y) = n + m$.

(2) Sea $X = V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad algebraica proyectiva, y consideremos $C(X) := V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ el **cono afín** de X (cf. Observación 2.7.6).

***Ejercicio 2.12.6.* —** Probar que $\dim(C(X)) = \dim(X) + 1$.
Indicación: Notar que si $U_i = \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$, entonces se tiene que $C(X) \cap \pi^{-1}(U_i) \cong (X \cap U_i) \times \mathbb{A}^1$.

(3) Supongamos que $X, Y \subseteq \mathbb{A}^N$ son variedades algebraicas afines, y que $X \cap Y \neq \emptyset$. Entonces, toda componente irreducible de $X \cap Y$ es de dimensión $\geq \dim(X) + \dim(Y) - N \overset{\text{def}}{=} n + m - N$. En otras palabras,
$$\operatorname{codim}(X \cap Y) \leq \operatorname{codim}(X) + \operatorname{codim}(Y).$$
En efecto, $X \cap Y \cong (X \times Y) \cap \Delta_{\mathbb{A}^N}$ está dado en $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^N$ por las N ecuaciones $x_i = y_i$ con $i \in \{1, \ldots, N\}$. Luego, el Teorema anterior implica que la dimensión de cada componente irreducible de $X \cap Y$ es $\geq \dim(X \times Y) - N \overset{\text{def}}{=} n + m - N$.

(4) Supongamos que $X, Y \subseteq \mathbb{P}^N$ son variedades algebraicas proyectivas, y que $\dim(X) + \dim(Y) \geq N$. Entonces, $X \cap Y \neq \emptyset$.

En efecto, los conos afines $C(X), C(Y) \subseteq \mathbb{A}^{N+1}$ son de dimensión $n+1$ y $m+1$ respectivamente (por (2)). Además, $0 \in C(X) \cap C(Y) \neq \emptyset$, y luego (3) implica que cada componente de $C(X) \cap C(Y)$ es de dimensión $\geq (n+1) + (m+1) - (N+1) = n + m - N + 1 \geq 1$.

(5) El punto (4) implica en particular que todo par de curvas proyectivas planas $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ se intersectan.

Recuerdo 2.12.7. — Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas, y sea $y \in Y$. Entonces, la **fibra**

$$f^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}$$

es un cerrado de Zariski de X, i.e., una subvariedad cerrada de X.

Observación importante 2.12.8. — Usando *productos fibrados* se puede definir la **fibra esquemática** (cf. Ejemplo 2.4.5), que detecta multiplicidades. Nosotros consideraremos la **fibra conjuntista** dada por $f^{-1}(y)_{\text{red}}$.

El siguiente resultado describe precisamente la dimensión de las fibras.

Teorema 2.12.9. — *Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles de $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$. Entonces, para todo*

$$f : X \twoheadrightarrow Y \text{ morfismo regular sobreyectivo}$$

se tiene que:

(1) *Para todo $y \in Y$, toda componente irreducible de $f^{-1}(y)$ es de dimensión $\geq n - m$.*

(2) *Existe un abierto denso $V \subseteq Y$ tal que $f^{-1}(y)$ es de dimensión pura $n - m$ para todo $y \in V$.*

(3) *Para todo $r \in \mathbb{N}$, el conjunto*

$$X_r := \{x \in X \text{ tal que } \dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq r\}$$

es cerrado en X. Equivalentemente, la función

$$\delta : X \longrightarrow \mathbb{N},\ x \longmapsto \dim_x(f^{-1}(f(x))$$

es **semi-continua superior**.

Aquí, para cada $Z \subseteq X$ cerrado, definimos

$$\dim_x(Z) := \max_{x \in Z_i}\{\dim(Z_i)\}$$

donde $Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_s$ son las componentes irreducibles de Z.

Demostración. — En (1) podemos suponer que Y es afín. Luego, el Teorema de normalización de Noether nos permite encontrar $g : Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ morfismo finito y sobreyectivo. Consideremos la composición

$$u : X \xrightarrow{f} \!\!\!\!\rightarrow Y \xrightarrow{g} \!\!\!\!\rightarrow \mathbb{A}^m$$

y sea $p := g(y) \in \mathbb{A}^m$. Entonces, $g^{-1}(p) = \{y, z_1, \ldots, z_N\}$ es un conjunto finito, y además

$$u^{-1}(p) \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(y) \amalg f^{-1}(z_1) \amalg \cdots \amalg f^{-1}(z_n)$$

es la unión disjunta de cerrados de X. En particular, las componentes irreducibles de $f^{-1}(y)$ son componentes irreducibles de $u^{-1}(p)$.

Dado que $p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{A}^m$ está definido por las m ecuaciones $x_i - p_i = 0$, tenemos que $u^{-1}(p)$ está definido (en un abierto afín) por las m ecuaciones $x_i \circ u - p_i = 0$ en X. Luego, toda componente irreducible de $u^{-1}(p)$ es de dimensión $\geq \dim(X) - m \overset{\text{def}}{=} n - m$, de donde deducimos (1).

En (2) podemos suponer que X e Y son afines. Dado que $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$, la extensión de cuerpos

$$f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$$

nos permite deducir que $k(X)$ tiene grado de trascendencia $n - m$ sobre $k(Y)$. Sean $u_1, \ldots, u_{n-m} \in k(X)$ elementos algebraicamente independientes sobre $k(Y)$ y sea $U \subseteq X$ abierto denso afín tal que $u_1, \ldots, u_{n-m} \in \mathscr{O}(U)$ sean regulares. Completamos con elementos $u_{n-m+1}, \ldots, u_N$ hasta generar la k-álgebra $\mathscr{O}(U)$ (y así obtener un incrustamiento $U \subseteq \mathbb{A}^N$), y en particular (las restricciones de) los elementos $u_1, \ldots, u_N$ también generan $\mathscr{O}(f^{-1}(y) \cap U)$.

Restringiéndose a cada componente irreducible si fuese necesario, podemos suponer que $f^{-1}(y)$ es irreducible y luego $k(Z)$ es un cuerpo, donde $Z := f^{-1}(y) \cap U$. Veamos que, restringiéndose a un abierto denso $V \subseteq Y$ si fuese necesario, los $u_{n-m+1}, \ldots, u_N$ son algebraicamente *dependientes* en $k(Z)$ sobre k (lo que implica que $\dim(Z) = \dim(f^{-1}(y)) \leq n - m$ y con ello deducimos (2)):

Dado que $k(X)$ tiene grado de trascendencia $n - m$ sobre $k(Y)$, para cada $i \in \{n - m + 1, \ldots, N\}$ sabemos que hay una relación polinomial

$$F_i(u_i, u_1, \ldots, u_{n-m}) = 0 \text{ en } k(X), \text{ con } F_i \in K[T_1, \ldots, T_{n-m+1}] \text{ y } K := k(Y).$$

Además, en la fibra $f^{-1}(y)$ los coeficientes de la función racional F_i son constantes (cf. Proposición 2.11.15). Luego, restringiéndonos al abierto denso $V \subseteq Y$ donde los denominadores y numeradores de cada F_i no se anulan, obtenemos que si $y \in V$ entonces cada $u_i|_{f^{-1}(y)}$ es algebraicamente *dependiente* de $u_1|_{f^{-1}(y)}, \ldots, u_{n-m}|_{f^{-1}(y)}$, de donde deducimos (2).

Finalmente, probaremos (3) por inducción en $\dim(X)$: Sea $r \in \mathbb{N}$, y notar que si $r \leq n-m$ entonces el punto (1) implica que $X_r = X$ es cerrado. Además, el punto (2) implica que para todo $r > n-m$ existe $Z \subsetneq X$ cerrado propio tal que $X_r \subseteq Z$. Luego, la restricción

$$g := f|_Z : Z \twoheadrightarrow W$$

es sobreyectiva sobre $W := f(Z) \subseteq Y$, y además $X_r = Z_r$ si $r > n-m$. Dado que $\dim(Z) < \dim(X)$, la hipótesis de inducción implica que $X_r \subseteq Z$ es un cerrado, y por ende $X_r \subseteq X$ es cerrado. □

Uno de los casos particulares más usados del teorema anterior es el siguiente.

Corolario 2.12.10. — *Sea $f : X \twoheadrightarrow Y$ un morfismo regular sobreyectivo entre variedades algebraicas irreducibles. Si f es un morfismo* **cerrado** *(e.g. si X es proyectiva) entonces la función*

$$Y \longmapsto \mathbb{N},\ y \longmapsto \dim(f^{-1}(y))$$

es semi-continua superior, i.e., para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$Y_r := \{y \in Y \text{ tal que } \dim(f^{-1}(y)) \geq r\}$$

es cerrado en Y.

Demostración. — Por definición, tenemos que $Y_r \overset{\text{def}}{=} f(X_r)$. Dado que el conjunto $X_r \subseteq X$ es cerrado (por el Teorema anterior) y f es un morfismo cerrado (por hipótesis), tenemos que $Y_r \subseteq Y$ es cerrado. □

El siguiente ejercicio muestra que la hipótesis adicional en el Corolario anterior es realmente necesaria[21].

Ejercicio 2.12.11. — Consideremos el morfismo regular dado por

$$f : \mathbb{A}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (x, (xy-1)y, (xy-1)z).$$

Probar que f es sobreyectivo y que $\{y \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } \dim(f^{-1}(y)) \geq 1\}$ **no** es un conjunto cerrado.

[21] Este ejemplo fue encontrado por Nicușor Dan, el actual alcalde de Bucharest (Rumania).

Terminología 2.12.12. — Sea $f : X \twoheadrightarrow Y$ un morfismo regular sobreyectivo entre variedades algebraicas irreducibles. La **dimensión relativa** de f en $y \in Y$ es $\dim(f^{-1}(y))$.

En particular, si tenemos que $\dim(f^{-1}(y)) = d$ para todo $y \in Y$, decimos que f es de **dimensión relativa** d, y escribimos

$$\dim(f) := \dim(X/Y) := d$$

en tal caso.

Una de las aplicaciones más interesantes de lo anterior es el siguiente criterio de irreducibilidad.

Teorema 2.12.13. — *Sea $f : X \twoheadrightarrow Y$ morfismo regular sobreyectivo y* **cerrado** *entre variedades algebraicas. Supogamos que*

(1) *Y es irreducible, y que*

(2) *Todas las fibras de f son irreducibles de la misma dimensión $d \in \mathbb{N}$.*

Entonces, X es irreducible y $\dim(X) = \dim(Y) + d$.

Demostración. — Sean $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ las componentes irreducibles de X. Para $y \in Y$, definamos

$$d_i(y) := \dim(f_i^{-1}(y)) \text{ donde } f_i := f|_{X_i} : X_i \to Y.$$

Sabemos que $d \overset{\text{def}}{=} \max_{i=1,\dots,r}\{d_i(y)\}$ para todo $y \in Y$, y luego

$$Y = \bigcup_{i=1}^{r} \{y \in Y \text{ tal que } d_i(y) \geq d\}$$

es unión de cerrados. Dado que Y es irreducible, esto implica que existe $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ tal que $d_{i_0}(y) = d$ para todo $y \in Y$.

Por otro lado, la fibra $f_{i_0}^{-1}(y)$ está contenida en el cerrado irreducible $f^{-1}(y)$, y como $\dim(f^{-1}(y)) = \dim(f_{i_0}^{-1}(y))$, concluímos que $f_{i_0}^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ para todo $y \in Y$. Finalmente, deducimos que

$$X \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) = \bigcup_{y \in Y} f_{i_0}^{-1}(y) \overset{\text{def}}{=} X_{i_0}$$

y por ende X es irreducible. Además, se tiene por el Teorema anterior que $d = \dim(X) - \dim(Y)$ en este caso. □

Veamos a continuación algunas aplicaciones notables de lo anterior.

Ejemplo importante 2.12.14. —

(1) **Familias de hipersuperficies.** Sea X una variedad proyectiva y $f : X \twoheadrightarrow C$ morfismo no-constante, donde C es una curva algebraica irreducible. Entonces, f es sobreyectivo y además

$$X_t := f^{-1}(t) \text{ es una } \textbf{hipersuperficie} \text{ para todo } t \in C,$$

i.e., $\dim(X_t) = \dim(X) - 1$.

(2) **Variedades abelianas.** Sea G un *grupo algebraico*[22], y supongamos que G es **proyectivo e irreducible**. Entonces, G es un grupo abeliano.

En efecto, consideremos el morfismo regular

$$f : G \times G \longrightarrow G,\ (g,h) \longmapsto ghg^{-1}$$

y consideremos su grafo

$$\Gamma_f \overset{\mathsf{def}}{=} \{(g,h,ghg^{-1}),\ g,h \in G\} \subseteq G \times G \times G.$$

Nos gustaría probar que $h = ghg^{-1}$ para todos $g,h \in G$, i.e., la imagen $\mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f) = \Delta_G \subseteq G \times G$ es la diagonal de $G \times G$.

Notar que $G \cong \Delta_G$, y que si consideramos $g = e$ tenemos que $\Delta_G \subseteq \mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f)$. Veamos que en realidad coinciden:

Primero que todo, notemos que el hecho que G sea proyectivo e irreducible implica que $G \times G \cong \Gamma_f$ y $\mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f)$ también. Además, si consideramos

$$\mathrm{pr}_2 : \mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f) \longrightarrow G,\ (h, ghg^{-1}) \longmapsto ghg^{-1},$$

tenemos que $\mathrm{pr}_2^{-1}(e) \overset{\mathsf{def}}{=} \{(e,e)\}$ es de dimensión 0. Luego, por semicontinuidad superior tenemos que la *fibra general* $\mathrm{pr}_2^{-1}(y)$ tiene dimensión 0, y por ende $\dim(\mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f)) = \dim(G) + 0 = \dim(G)$. Así, $\dim(\Delta_G) = \dim(\mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f))$ y luego $\mathrm{pr}_{23}(\Gamma_f) = \Delta_G$.

Debido al resultado anterior, decimos que un grupo algebraico proyectivo e irreducible A es una **variedad abeliana**. Además, decimos que una variedad abeliana de dimensión 1 es una **curva elíptica**. Cabe destacar que si $k = \mathbb{C}$, entonces toda variedad abeliana es de la forma

$$A = \mathbb{C}^g/\Lambda \text{ donde } \Lambda \cong \mathbb{Z}^{2g} \text{ es un reticulado,}$$

y donde $g = \dim(A)$.

---

[22] i.e., una variedad algebraica que es un grupo, y donde la multiplicación e inversión son morfismos regulares.

(3) **Blow-up.** Sean $W \subseteq V$ k-espacios vectoriales no-nulos, sea $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ la proyectivización de V, y $\Lambda := \mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{k-1}$ el sub-espacio lineal asociado a W.

Dadas ecuaciones lineales $\{f_0 = \cdots = f_{n-k} = 0\}$ definiendo a W en V, la función regular

$$f : U \longrightarrow \mathbb{P}^{n-k},\ x \longmapsto [f_0(x), \ldots, f_{n-k}(x)]$$

está bien definida en $U = \mathbb{P}^n \backslash V(f_0, \ldots, f_{n-k})$. Tal como en §2.10, definimos el **blow-up** $\mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ como la clausura del grafo Γ_f en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-k}$. Explícitamente,

$$\mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n) = \{(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-k} \text{ tal que } y_i f_j(x) = y_j f_i(x) \text{ para todos } i, j = 0, \ldots, n-k\}$$

donde $\varepsilon := \mathrm{pr}_1 : \mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{P}^n$ es el blow-up, y donde

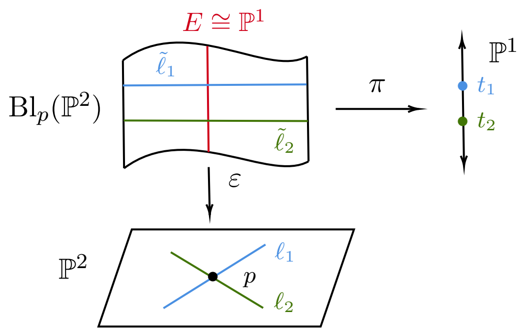
$$\pi := \mathrm{pr}_2 : \mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \mathbb{P}^{n-k}$$

es la segunda proyección. Si consideramos $E := \varepsilon^{-1}(\Lambda)$ el conjunto excepcional, entonces para todo $x \in \Lambda$ tenemos que $\varepsilon^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-k}$ es una variedad irreducible de dimensión $n - k$. Luego, la restricción

$$\varepsilon|_E : E \longrightarrow \Lambda \cong \mathbb{P}^{k-1}$$

cumple las hipótesis del criterio de irreducibilidad, de donde deducimos que $\dim(E) = (k - 1) + (n - k) = n - 1$, i.e., $E \subseteq \mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ es una *hipersuperficie*.

Ejercicio 2.12.15. — Usando la misma notación del Ejemplo 2.12.14 (3), probar que $\pi^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^k$ para todo $y \in \mathbb{P}^{n-k}$ y deducir que $\mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ es irreducible de dimensión n.



En particular, para todo $p \in \mathbb{P}^2$, la superficie $S = \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$ posee un morfismo regular sobreyectivo $\pi : S \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $\pi^{-1}(t) \cong \mathbb{P}^1$ para todo $t \in \mathbb{P}^1$.

Ejercicio 2.12.16. — Sea $V = M_{m\times n}(k)$ y definamos $\mathscr{M} := \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{nm-1}$. Sea $\mathscr{M}_r$ el sub-conjunto de matrices de A con $\mathrm{rg}(A) \leq r$. Demostrar que $\mathscr{M}_r \subseteq \mathscr{M}$ es una sub-variedad cerrada irreducible de dimensión $r(m+n-r)-1$. *Indicación: Considerar la* variedad de incidencia *dada por*

$$I := \{(A, \Lambda) \in \mathscr{M} \times \mathrm{Gr}(n-r, n) \text{ tal que } \Lambda \subseteq \ker(A)\}$$

y analizar las proyecciones canónicas.

2.13. Espacio tangente de Zariski, variedades suaves y singulares

Sea X una variedad algebraica y $x \in X$ un punto. Recordemos que el tallo $\mathscr{O}_{X,x}$ de gérmenes de funciones regulares en $x \in X$ es una k-álgebra que posee un *único* ideal maximal

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathscr{O}_{X,x} \text{ tal que } f(x) = 0\},$$

i.e., $\mathscr{O}_{X,x}$ es un anillo local, donde $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$ (ver §2.3).

Definición 2.13.1. — Un **vector tangente** en x es una aplicación k-lineal $D : \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow k$ que cumple la regla de Leibniz

$$D(fg) = f(x)D(g) + g(x)D(f) \text{ para todos } f, g \in \mathscr{O}_{X,x}.$$

Además, definimos el **espacio tangente de Zariski** en el punto $x \in X$ como el k-espacio vectorial dado por

$$T_xX := \{D : \mathscr{O}_{X,x} \longrightarrow k \text{ vector tangente en } x \in X\}.$$

La siguiente descripción algebraica es sumamente útil.

Proposición 2.13.2. — *Para todo $x \in X$ hay un isomorfismo canónico de k-espacios vectoriales*

$$T_xX \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee.$$

En particular, T_xX es un k-espacio vectorial de dimensión finita.

Demostración. — Sea $D : \mathscr{O}_{X,x} \to k$ un vector tangente. Notar que

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1) = 0,$$

y en particular $D(\lambda) = \lambda D(1) = 0$ para todo $\lambda \in k$. Además, si consideramos la restricción $D|_{\mathfrak{m}_x} : \mathfrak{m}_x \to k$ tenemos que la regla de Leibniz implica que si $f, g \in \mathfrak{m}_x$ entonces $D(fg) = 0$, i.e., $\mathfrak{m}_x^2 \subseteq \ker(D|_{\mathfrak{m}_x})$. Luego, la propiedad universal del cociente nos permite considerar la aplicación lineal inducida

$$\overline{D} : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow k,\ [f] \longmapsto D(f)$$

en el espacio dual $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$. Así, basta verificar que la aplicación lineal

$$\varphi : T_xX \longrightarrow (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee,\ D \longmapsto \overline{D}$$

es un isomorfismo.

Para la inyectividad de φ, notamos que todo $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ se escribe como $f = f(x) + f_0$, donde $f_0 \in \mathfrak{m}_x$. Luego, si $\varphi(D) \overset{\text{def}}{=} \overline{D} = 0$ entonces se tiene que $D(f) \overset{\text{def}}{=} D(f(x)) + \overline{D}(f_0) = 0$, pues $f(x) \in k$ y $\overline{D} = 0$.

Para la sobreyectividad de φ, consideramos $\nabla : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to k$ aplicación lineal y definamos para $f \in \mathscr{O}_{X,x}$ con $f_0 := f - f(x) \in \mathfrak{m}_x$

$$D(f) := \nabla([f_0]),\ \text{donde } [f_0] \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$

Luego, tenemos que para todos $f, g \in \mathscr{O}_{X,x}$

$$\begin{aligned} 0 = \nabla([f_0g_0]) &\overset{\text{def}}{=} D(f_0g_0) \overset{\text{def}}{=} \nabla([fg - f(x)g - g(x)f + f(x)g(x)) \\ &= D(fg) - f(x)D(g) - g(x)D(f), \end{aligned}$$

i.e., $D \in T_xX$. Más aún, tenemos que $\varphi(D) = \nabla$ por definición, de donde se deduce el isomorfismo deseado.

Finalmente, dado que $\mathscr{O}_{X,x}$ es un anillo noetheriano(23), tenemos que $\mathfrak{m}_x$ es un ideal finitamente generado por ciertos elementos $u_1, \ldots, u_N \in \mathfrak{m}_x$, por lo que sus imagenes en el cociente $[u_1], \ldots, [u_N] \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ son generadoras como $k \cong \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$-módulo, i.e., como k-espacio vectorial. □

Ejercicio 2.13.3. — Sean X e Y dos variedades algebraicas. Probar que para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ se tiene que

$$T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_xX \oplus T_yY.$$

Notar que la construcción del espacio tangente de Zariski es functorial (covariante). Más precisamente:

Definición 2.13.4. — Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas, y sea $x \in X$. Entonces, el morfismo de k-álgebras $f^* : \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x},\ u \longmapsto u \circ f$ induce una aplicación k-lineal

$$\begin{aligned} d_xf : T_xX &\longmapsto T_{f(x)}Y \\ D &\longmapsto D \circ f^* \end{aligned}$$

llamada el **diferencial de** f en $x \in X$.

(23)En efecto, si U es una vecindad abierta afín de $x \in X$, tenemos que $\mathscr{O}_{X,x}$ es la localización en $\mathfrak{m}_x$ del anillo noetheriano $\mathscr{O}(U)$, y luego noetheriano.

Ejemplo importante 2.13.5. — Sea $X = \mathbb{A}^n$, y $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{A}^n$ punto correspondiente al ideal maximal $\mathfrak{m}_p = \langle X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n \rangle$. Entonces:

(1) El espacio tangente de Zariski $T_p\mathbb{A}^n \cong k^n$ posee como base canónica las derivaciones usuales $D_i(f) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(p)$, i.e., todo vector tangente en p es de la forma
$$f \longmapsto a_1 \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) + \cdots + a_n \frac{\partial f}{\partial X_n}(p)$$
para ciertos $a_1, \ldots, a_n \in k$.

(2) Sea
$$f : \mathbb{A}^n \longmapsto \mathbb{A}^m,\ x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$
morfismo regular. Entonces, la matriz del diferencial
$$d_p f : T_p\mathbb{A}^n \cong k^n \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{A}^m \cong k^m$$
respecto a las bases canónicas del Ejemplo (1) es la **matriz jacobiana**
$$J_f(p) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(p) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m \times n}(k).$$

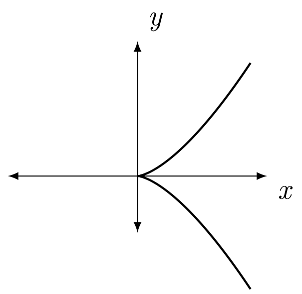
Aquí, y en todo el resto del texto, las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial X_i}$ se *definen formalmente* en un anillo de polinomios *imponiendo* que se cumplan las reglas usuales de cálculo (e.g. $\frac{\partial}{\partial X_i}(X_i^n) := nX_i^{n-1}$ y $\frac{\partial}{\partial X_i}(X_j) := 0$ si $i \neq j$).

Dado que la definición del espacio tangente de Zariski es de naturaleza *local*, es importante comprender en detalle el caso de variedades afines.

Proposición 2.13.6. — *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín, donde $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$, y sea $x \in X$. Entonces*
$$T_x X \cong \ker(d_x f),$$
donde $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m,\ p \mapsto (f_1(p), \ldots, f_m(p))$.

Demostración. — El isomorfismo $\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$ implica que $\mathscr{O}_{X,x} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,x}/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Así, un vector tangente de X en x se identifica naturalmente a un vector tangente de $\mathbb{A}^n$ en x que se anula en $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, i.e.,
$$T_x X \cong \{D \in T_x\mathbb{A}^n \cong k^n \text{ tal que } D(f_i) = 0 \text{ para todo } i\} \overset{\mathsf{def}}{=} \ker(d_x f),$$
de donde se obtiene el resultado. $\square$

Ejemplo 2.13.7. — Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^3\}$ cúbica cuspidal, con $\mathcal{I}(C) = \langle Y^2 - X^3 \rangle$.



Si consideramos $f(x, y) = y^2 - x^3$ y $p = (a, b) \in C$, entonces el diferencial está dado por el vector fila

$$d_p f = (-3x^2 \;\; 2y)|_{(x,y)=(a,b)} = (-3a^2 \;\; 2b).$$

Luego, obtenemos que

$$\dim_k(T_p C) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } p = (0,0) \end{cases}$$

al calcular $\dim_k(\ker(d_p f))$.

Corolario 2.13.8. — *Sea X una variedad algebraica. Entonces, la función*

$$X \longrightarrow \mathbb{N}, \; x \longmapsto \dim_k(T_x X)$$

es semi-continua superior, i.e., para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\{x \in X \text{ tal que } \dim_k(T_x X) \geq r\}$$

es cerrado *en X. En particular, el conjunto donde la dimensión* $\dim_k(T_x X)$ *es* <u>*minimal*</u> *es un* abierto *de X.*

Demostración. — La afirmación es local en X, por lo que podemos suponer que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica afín, donde $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. La proposición anterior y el teorema del rango implican que para todo $x \in X$ se tiene que

$$\dim_k(T_x X) = n - \operatorname{rg}\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} n - \operatorname{rg}(J_f(x)).$$

Por otra parte, la función $x \mapsto \mathrm{rg}(J_f(x))$ es semi-continua *inferior*, pues la condición $\mathrm{rg}(J_f(x)) \geq s$ equivale a la existencia de un sub-determinante de tamaño $s \times s$ no-nulo, una condición *abierta* para la topología de Zariski. $\square$

Para determinar el valor minimal de $\dim_k(T_x X)$ necesitaremos algunos resultados de teoría de cuerpos.

Recuerdo 2.13.9. — Sea K un cuerpo, y $K \subseteq L$ una extensión algebraica de cuerpos (i.e., para todo $a \in L$, existe $P \in K[X]$ tal que $P(a) = 0$ en L). Decimos que $K \subseteq L$ es una **extensión separable** si para todo $a \in L$ el polinomio minimal $P_a \in K[X]$ **no** posee raíces múltiples en la clausura algebraica $\overline{K}$. Tenemos que:

(1) La última condición equivale a que la derivada (formal) $P'_a \in K[X]$ **no** es identicamente cero. En particular, si $\mathrm{car}(K) = 0$ se tiene que toda extensión algebraica de K es separable.

(2) Si k es algebraicamente cerrado y $k \subseteq K$ es una extensión generada por finitos elementos (cf. Recuerdo 2.11.1), entonces K posee una base de trascendencia $B = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq K$ tal que la extensión algebraica $k(B) \subseteq K$ es separable.

Más aún, tenemos el siguiente resultado fundamental de teoría de cuerpos, llamado el **Teorema del elemento primitivo**:

> Sea $K \subseteq L$ una extensión finita (y luego algebraica) separable.
> Entonces, existe un elemento $f \in L$ tal que $L = K(f)$.

El términos geométricos, el teorema del elemento primitivo interpreta de la manera siguiente:

Proposición 2.13.10. — *Sea X una variedad algebraica irreducible de dimensión n. Entonces, X es birracional a una hipersuperficie $V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ definida por un polinomio irreducible $f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$.*

Demostración. — Dado que el enunciado es birracional, podemos suponer que X es una variedad algebraica afín. Como $\mathrm{tr.deg}_k(k(X)) = n$, podemos elegir una base de trascendencia $x_1, \ldots, x_n \in k(X)$ tal que

$$k(\mathbb{A}^n) \cong k(x_1, \ldots, x_n) \subseteq k(X)$$

es una extensión finita y separable. Luego, el teorema del elemento primitivo implica que existe $u \in k(X)$ tal que $k(X) = k(\mathbb{A}^n)(u)$. Sea $F \in k(\mathbb{A}^n)[T]$

el polinomio minimal de u, cuyos coeficientes son funciones racionales en $\mathbb{A}^n$. Despejando denominadores, obtenemos

$$f(T) = a_0 T^r + a_1 T^{r-1} + \cdots + a_r \text{ con } a_i \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^n),$$

i.e., $f \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ polinomio irreducible. Finalmente, tenemos que

$$k(X) \cong k(\mathbb{A}^n)[T]/\langle f \rangle, \text{ i.e., } k(X) \cong k(Z)$$

donde $Z := V(f) \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^{n+1}$. □

Observación 2.13.11. — La proposición anterior implica que toda curva algebraica irreducible es *birracional* (pero no necesariamente isomorfa) a una **curva plana**, i.e., una curva irreducible C en $\mathbb{A}^2$ o $\mathbb{P}^2$.

Teorema 2.13.12. — *Sea X una variedad algebraica. Entonces, para todo $x \in X$ se tiene que*

$$\dim_x(X) \leq \dim_k(T_x X).$$

Más aún, la igualdad se satisface en un abierto denso *de X.*

Demostración. — Supongamos primero que X es irreducible, y veamos que el valor minimal de la función $x \mapsto \dim_k(T_x X)$ es precisamente $\dim(X) := n$. Dado que dicho valor minimal es un invariante birracional, podemos suponer que $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ es una hipersuperficie irreducible. En tal caso, tenemos

$$\dim(T_x X) = \dim_k(\ker d_x f) = n + 1 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial X_{n+1}}(x) \end{pmatrix} = n,$$

excepto si $\frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Luego, debemos verificar que esto último **no** puede ocurrir para todo $x \in X$:

Consideremos el **ideal jacobiano** dado por

$$J := \left\langle \frac{\partial f}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial X_{n+1}} \right\rangle \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1}),$$

y notemos que si $X = V(f) \subseteq V(J)$, entonces $J \subseteq \sqrt{J} \subseteq \langle f \rangle$. En particular, f debe dividir a $\frac{\partial f}{\partial X_i}(x)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, y luego todas las derivadas parciales de f deben ser nulas.

En el caso en que $\operatorname{car}(k) = 0$ esto implica que f es constante, mientras que si $\operatorname{car}(k) = p > 0$ esto implica que f es un polinomio en $X_1^p, \ldots, X_{n+1}^p$, i.e., usando la notación múlti-índice:

$$f = \sum a_{\mathbf{m}} X_{\mathbf{m}}^{p\mathbf{m}} = \sum b_{\mathbf{m}}^p X_{\mathbf{m}}^{p\mathbf{m}} = \left(\sum b_{\mathbf{m}} X^{\mathbf{m}}\right)^p =: g^p,$$

lo cual contradice el hecho que f es irreducible.

En general, consideramos las componentes irreducibles $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ de X, y suponemos que $x \in X_1 \cup \cdots \cup X_k$. Luego, tenemos que

$$\dim(X_i) \leq \dim_k(T_x X_i) \leq \dim(T_x X) \text{ para todo } i,$$

y luego $\dim_x(X) \leq \dim(T_x X)$. Más aún, en cada componente irreducible X_i hay un abierto denso $U_i \subseteq X_i$ donde se verifica que $\dim(X_i) = \dim_k(T_x X_i)$. En particular, en el abierto denso $U := \bigcup_{i=1}^m U_i$ se tiene que $\dim_x(X) = \dim_k(T_x X)$ para todo $x \in U$. □

Lo anterior motiva la siguiente definición, que es una de las más importante del curso.

Definición 2.13.13. — Sea X una variedad algebraica. Decimos que $x \in X$

(1) Es un **punto suave** si $\dim_x(X) = \dim_k(T_x X)$.
(2) Es un **punto singular** si $\dim_x(X) < \dim_k(T_x X)$.

Denotamos por $X_{\text{reg}} \subseteq X$ al abierto *denso* formado por los puntos suaves de X, y denotamos por $X_{\text{sing}} \subsetneq X$ (o por $\text{Sing}(X)$) al cerrado *propio* formado por los puntos singulares de X. Finalmente, decimos que:

(3) X es una **variedad algebraica suave** si $X_{\text{sing}} = \emptyset$.
(4) X es una **variedad algebraica singular** si $X_{\text{sing}} \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.13.14. —

(1) Dado que $T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_x X \oplus T_y Y$, tenemos que $(x, y) \in X \times Y$ es suave si y sólo si $x \in X$ e $y \in Y$ son puntos suaves. En particular, tenemos que
$$(X \times Y)_{\text{sing}} = (X_{\text{sing}} \times Y) \cup (X \times Y_{\text{sing}}).$$
(2) Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ una hipersuperficie afín. Entonces, $X_{\text{sing}} \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ está dado por las ecuaciones
$$f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0 \text{ en } \mathbb{A}^n.$$
En particular, notamos que si $f = f_1 \cdots f_r$ es el producto de polinomios irreducibles, entonces la regla de Leibniz implica que todo punto en $V(f_i) \cap V(f_j)$, con $i \neq j$, es singular.
(3) Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie proyectiva. Entonces, $X_{\text{sing}} \subseteq X \subseteq \mathbb{P}^n$ están dados por
$$f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_0}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0 \text{ en } \mathbb{P}^n.$$

En el caso particular en que $\mathrm{car}(k)$ **no** divide $d = \mathrm{gr}(f)$, tenemos más símplemente que X_{sing} está dado por las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial X_0}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0 \text{ en } \mathbb{P}^n.$$

En efecto, para la primera afirmación consideremos $x = [x_0, \ldots, x_n] \in X$ tal que (por ejemplo, sin pérdida de generalidad) $x_0 \neq 0$, i.e., $x \in U_0 \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$. Dado que $X \cap U_0$ está definida por la ecuación $g(x_1, \ldots, x_n) = f(1, x_1, \ldots, x_n)$, tenemos por un lado que $x \in X_{\mathrm{sing}}$ si y sólo si $\frac{\partial g}{\partial X_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por otro lado, como f es homogéneo de grado d, se tiene que la **fórmula de Euler**[24]

$$d \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(x)$$

implica que si $f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial X_0}(x) = 0$.

Del mismo modo, la segunda afirmación se obtiene gracias a la fórmula de Euler: si $\mathrm{car}(k)$ no divide a d, entonces las ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial X_i}(x) = 0$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ implica que $f(x) = 0$.

Ejercicio 2.13.15. — Sean $a, b \in k$ y consideremos la curva cúbica plana

$$C_{a,b} = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\} \subseteq \mathbb{P}^2.$$

Determinar los valores de $a, b \in k$ de tal suerte que $C_{a,b} \subseteq \mathbb{P}^2$ sea **suave**. *Indicación: Considerar los casos* $\mathrm{car}(k) = 2$ *y* $\mathrm{car}(k) = 3$ *separadamente.*

Ejemplo importante 2.13.16. — Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín, con $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. Entonces, el **criterio jacobiano** establece que

$$x \in X \text{ es suave si y sólo si } \mathrm{rg}(J_f(x)) = n - \dim_x(X) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathrm{codim}_x(X).$$

Aquí, $J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x)\right)_{i,j}$ es la matríz jacobiana. En efecto, se tiene que

$$\dim_k(T_x X) = n - \mathrm{rg}(J_f(x)) \geq \dim_x(X)$$

para todo $x \in X$. En particular:

(1) El mismo análisis del Ejemplo 2.13.14, permite probar que si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva con $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ ideal homogéneo. Entonces, $x \in X$ es suave si y sólo si $\mathrm{rg}(J_f(x)) = n - \dim_x(X)$.

[24] Obtenida al derivar la identidad $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ respecto a λ, y evaluar en $\lambda = 1$.

(2) Si X es una subvariedad cerrada de $\mathbb{A}^n$ o $\mathbb{P}^n$ con ideal $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, entonces $n - m \leq \dim_x(X)$ (ver Teorema 2.12.1). Luego, en el caso particular en que X sea una **intersección completa** de dimensión $d = n - m$ en $\mathbb{A}^n$ o $\mathbb{P}^n$ el criterio jacobiano se reduce a:

> $x \in X$ es suave si y sólo si $\operatorname{rg}(J_f(x)) = m$, donde m es el número de ecuaciones definiendo X.

Ejercicio 2.13.17. — Sea G un grupo algebraico, y sea X un **espacio homogéneo** respecto a G, i.e., una variedad algebraica X dotada de una acción regular $G \times X \to X$ *transitiva.* Demostrar que X es suave.
Indicación: Sea $x_0 \in X_{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ un punto suave. Para $x \in X$ arbitrario, probar (usando la acción transitiva de G) que existen vecindades abiertas $x_0 \in U$ y $x \in U$ tales que $U_0 \cong U$.

Ejemplo importante 2.13.18. — Un caso particular interesante del Ejercicio anterior es el caso $X = G$. En efecto, G es homogéneo respecto a sí mismo, y en particular es suave.

Luego, *toda* variedad abeliana es suave y los grupos de matrices (e.g. $\mathrm{GL}_n(k)$, $\mathrm{PGL}_n(k)$, $\mathrm{SL}_n(k)$, etc.) son suaves.

Además, la variedad grassmanniana $\mathrm{Gr}(m, n)$ es suave, puesto que es una variedad homogénea respecto a la acción natural de $\mathrm{GL}_n(k)$.

A pesar de que no toda variedad es una intersección completa, el siguiente noción importante de álgebra conmutativa nos señala que *toda variedad suave es localmente una intersección completa.* Más precisamente:

Recuerdo 2.13.19. — Sea A un anillo local noetheriano, $\mathfrak{m}$ su único ideal maximal, y $k = A/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual. Entonces, el *lema de Nakayama* implica que

$$\dim_{\mathrm{Krull}}(A) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2),$$

y decimos que $(A, \mathfrak{m})$ es un **anillo regular** si $\dim_{\mathrm{Krull}}(A) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.

En otras palabras, si X es una variedad algebraica y $x \in X$ es un punto *suave*, entonces

$$(\mathscr{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x) \text{ es un anillo regular.}$$

Más aún, tenemos el siguiente importante resultado de Nagata (1958) y Auslander-Buchsbaum (1959):

> Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo regular. Entonces, A es un **dominio de factorización única** (también conocidos como *anillos factoriales*).

En particular, si $x \in X$ es un punto suave de una variedad algebraica, entonces $\mathscr{O}_{X,x}$ es un dominio de factorización única y luego X es *localmente irreducible*. Más precisamente, $x \in X$ suave pertenece a una **única** componente irreducible de X (cf. el caso de hipersuperficies en el Ejemplo 2.13.14 (2)).

Ejercicio 2.13.20. — Sea X una variedad algebraica suave. Probar que X es irreducible si y sólamente si X es conexa.

El siguiente ejercicio muestra que la hipótesis de suavidad es necesaria.

Ejercicio 2.13.21. — Consideremos el cono afín de la cónica $x^2+y^2+z^2=0$ en $\mathbb{P}^2$, i.e.,

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } x^2+y^2+z^2=0\}$$

y sea $p := (0,0,0)$. Probar que

(1) En $\mathscr{O}_{Q,p}$ se cumple que $x(-x) = (y+zi)(y-zi)$, donde $i \in k$ verifica $i^2 = -1$.
(2) Probar que x, $y+zi$, $y-zi$ son irreducibles en $\mathscr{O}_{Q,p}$.
(3) Deducir que el anillo local $\mathscr{O}_{Q,p}$ **no** es factorial.

Veamos que toda variedad suave es *localmente* una intersección completa.

Proposición 2.13.22. — *Sea X una variedad algebraica y $x \in X$ un punto suave tal que $\dim_x(X) = m$. Entonces, existe una vecindad abierta afín $U \subseteq X$ del punto $x \in X$, y un isomorfismo*

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V$$

hacia un abierto $V \subseteq Y$ de una variedad algebraica afín $Y \subseteq \mathbb{A}^n$, donde $Y = V(f_1,\ldots,f_{n-m})$ y donde $\operatorname{rg}\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(y)\right)_{i,j}\right) = n-m$ en $y = \varphi(x)$.

Demostración. — Dado que la afirmación es local, podemos suponer que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica afín, donde $\mathcal{I}(X) = \langle f_1,\ldots,f_r\rangle$. En particular, el criterio jacobiano implica que $\operatorname{rg}\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x)\right)_{i,j}\right) = n-m$. Así, podemos extraer una sub-matriz $(n-m)\times(n-m)$ de dicho rango.

Si suponemos, por ejemplo, que los $f_1,\ldots,f_{m-n}$ tienen una matriz jacobiana de rango $n-m$ en $x \in X$, entonces definimos $Y := V(f_1,\ldots,f_{m-n})$. Por construcción, Y es suave en una vecindad de $x \in X$, $\dim_x(Y) = m$, y además contiene a X que es de la misma dimensión. Dado que X e Y son *localmente irreducibles* en $x \in X$, ambas variedades coinciden en una vecindad de dicho punto, de donde se obtiene el resultado. $\square$

Otra consecuencia importante de las propiedades algebraicas de los puntos suaves, es que podemos dar *localmente* un resultado recíproco al Teorema de Krull (ver Teorema 2.11.27): las hipersuperficies en variedades suaves están definidas localmente por una única ecuación.

Proposición 2.13.23. — *Sea X una variedad algebraica irreducible e $Y \subseteq X$ una subvariedad cerrada de codimensión pura 1. Sea $y \in Y$ tal que $y \in X_{\mathrm{reg}}$ es un punto suave en X. Entonces, existe una vecindad abierta afín $y \in U \subseteq X$ y una función regular $f : U \to k$ tales que $\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle f \rangle$.*

Demostración. — Podemos suponer que X es afín y que $Y = V(\mathfrak{p})$ es irreducible, con $\mathfrak{p} \subseteq \mathscr{O}(X)$ un ideal primo no-nulo. Entonces,

$$\mathfrak{p}_y := \mathfrak{p}\mathscr{O}_{X,y} = \left\{ \frac{f}{g} \text{ tal que } f, g \in \mathscr{O}(X) \text{ con } g(y) \neq 0 \text{ y } f \in \mathfrak{p} \right\}$$

es un ideal primo no-nulo del anillo factorial $\mathscr{O}_{X,y}$. En particular, contiene al menos un elemento irreducible $\frac{f}{g}$, donde $f \in \mathfrak{p}$ es irreducible *al ser visto* en $\mathscr{O}_{X,y}$. Además, $Y \subseteq V(f)$ pues $f \in \mathfrak{p}$.

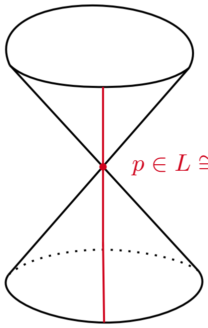
Sin embargo, f podría ser irreducible en $\mathscr{O}(X)$, y la idea será eliminar ese problema al restringirse a un abierto U si fuese necesario:

Sean $f_1, \ldots, f_r$ generadores del ideal $f\mathscr{O}_{X,y} \cap \mathscr{O}(X)$, formado por múltiplos de f que son regulares en X. Entonces, en $\mathscr{O}_{X,y}$ tenemos que cada $f_i = f\frac{h_i}{g_i}$ es un múltiplo de f, donde $g_i, h_i \in \mathscr{O}(X)$ con $g_i(y) \neq 0$. Definamos $g = g_1 \cdots g_r$, y notemos que en el abierto $U := \{x \in X \text{ tal que } g(x) \neq 0\}$ los g_i no se anulan y por ende son invertibles. Así, el ideal primo $f\mathscr{O}_{X,y} \cap \mathscr{O}(U)$ de $\mathscr{O}(U)$ está generado por f, i.e., $U \cap V(f)$ es *irreducible* y contiene a $Y \cap U$ que es de la misma dimensión. En otras palabras, $Y \cap U = V(f) \cap U$ y además $\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle f \rangle$ es un ideal principal. $\square$

Es muy importante notar que lo anterior es **falso** en variedades singulares, tal como lo ejemplifica el siguiente ejercicio (que usaremos varias veces más adelante):

Ejercicio 2.13.24. — Consideremos el cono

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } z^2 = xy\} \subseteq \mathbb{A}^3.$$



(1) Probar que X es singular en $p := (0,0,0)$ y que X contiene la recta $L = \{x = z = 0\} \cong \mathbb{A}^1$.

(2) Probar que el ideal $I = \langle X, Z\rangle$ de $A = k[X,Y,Z]/\langle Z^2 - XY\rangle$ **no** es principal.
Indicación: Probar que $\dim_k(T_pX) = 3$*, pero que* $\dim_k T_pL = 1$*. Lo que contradeciría el Teorema de Krull.*

(3) Deducir que $L \subseteq X$ **no** está definida por una única ecuación en $\mathscr{O}_{X,p}$.

Corolario 2.13.25. — *Sea $f : X \dashrightarrow Y$ una aplicación racional, donde X es una variedad algebraica* irreducible suave *y donde Y es una variedad algebraica* proyectiva*. Entonces, el cerrado*

$$Z := X \setminus \mathrm{Dom}(f) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{Exc}(f) \text{ (i.e., donde } f \text{ no está definida)}$$

es de $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$*. En particular, si X es una* curva *entonces $f : X \to Y$ es un morfismo regular.*

Demostración. — Localmente podemos escribir

$$f(x) \underset{\mathsf{loc}}{=} [f_0(x), \ldots, f_N(x)] \in Y \subseteq \mathbb{P}^N.$$

Si los f_i se anulan en alguna componente irreducible W de Z de codimensión 1, consideramos $z \in W$ y $\{u = 0\}$ una ecuación local de W en z. Entonces, $f_i = ug_i$ en $k(X)$ y por ende $[f_0, \ldots, f_N] = [g_0, \ldots, g_N]$, donde la última expresión está bien definida en $z \in W$. □

Observación importante 2.13.26. — Un caso particular importante de lo anterior es cuando X e Y son curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles. Entonces,

$$X \sim_{\mathrm{bir}} Y \text{ son birracionales si y sólo si } X \cong Y \text{ son isomorfas.}$$

En dimensión superior, esto último no es cierto: el blow-up de $\mathbb{P}^2$ en un punto es birracional a $\mathbb{P}^2$ pero **no** es isomorfo a $\mathbb{P}^2$. En efecto, en $\mathbb{P}^2$ todo par de curvas se intersecta, mientras que en $\mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$ las transformadas estrictas de dos rectas distintas pasando por $p \in \mathbb{P}^2$ **no** se intersectan (ver Ejercicio 2.12.15).

Terminología 2.13.27. — Sea $x \in X$ un punto suave, y sea $n = \dim_x(X)$. Decimos que $u_1, \ldots, u_n \in \mathfrak{m}_x \subseteq \mathscr{O}_{X,x}$ son **coordenadas locales** en $x \in X$ si sus imágenes en el cociente $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ son linealmente independientes.

Equivalentemente, si definimos el **espacio cotangente** de $x \in X$ como el espacio vectorial dual
$$\Omega^1_{X,x} := (T_xX)^\vee,$$
entonces $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{O}_{X,x}$ son coordenadas locales si sus diferenciales $d_xu_1, \ldots, d_xu_n$ son linealmente independientes en $\Omega^1_{X,x}$.

En particular, si $U \subseteq X_{\mathrm{reg}}$ es un abierto afín no-vacío cuyos puntos son suaves y $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{O}(U)$ son funciones regulares, entonces decimos que $u_1, \ldots, u_n$ son **coordenadas locales** (o parámetros locales) en el abierto U si las imágenes de las funciones $u_1, \ldots, u_n$ en $\mathscr{O}_{X,x}$ son coordenadas locales para todo $x \in U$.

Proposición 2.13.28. — *Sea X una variedad algebraica irreducible de* $\dim(X) = n$ *y sea $U \subseteq X_{\mathrm{reg}}$ abierto afín no-vacío. Si $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{O}(U)$ son coordenadas locales en U, entonces para todo $m \in \{1, \ldots, n\}$ la subvariedad*
$$Z_m = \{x \in U \text{ tal que } u_1(x) = \cdots = u_m(x) = 0\} \subseteq U$$
es suave *de dimensión $n - m$.*

Demostración. — El espacio tangente de la hipersuperficie $Z_1 = \{u_1 = 0\}$ está dado por $T_xZ_1 = \ker(d_xu_1)$, el cual es un sub-espacio de dimensión $n-1$ en T_xX. En particular, Z_1 es suave pues $\dim_x(Z_1) = n-1$ para todo $x \in U$. Más aún, las restricciones de $u_2, \ldots, u_n$ a Z_1 son coordenadas locales en Z_1, por lo que el resultado se obtiene por inducción. $\square$

Un ejemplo importante de lo anterior, es la extensión del blow-up a variedades suaves e irreducibles arbitrarias.

Ejemplo importante 2.13.29. — Sea X una variedad algebraica suave e irreducible de $\dim(X) = n$, y sea $Z \subseteq X$ subvariedad cerrada suave e irreducible de $\mathrm{codim}_X(Z) = r$ (i.e., $\dim(Z) = n - r$).

Luego, dado que toda variedad suave es localmente una intersección completa (ver Proposición 2.13.22), tenemos que $Z \underset{\mathsf{loc}}{=} V(u_1, \ldots, u_r)$ está dada, en ciertas coordenadas locales $u_1, \ldots, u_n$ en un abierto afín $U \subseteq X$, por la anulación de r funciones coordenadas.

Así, el blow-up de la variedad algebraica afín U a lo largo de la intersección completa $Z \cap U$ está dado por la subvariedad de $U \times \mathbb{P}^{r-1}$ definida por

$$\widetilde{U} = \{(x, y) \in U \times \mathbb{P}^{r-1} \text{ tal que } u_i(x)y_j = u_j(x)y_j \text{ para todos } i, j = 1, \ldots, r\},$$

y donde la primera proyección $\varepsilon_U : \widetilde{U} \longrightarrow U$ es un morfismo birracional.

Ejercicio 2.13.30. — Probar que $\widetilde{U}$ es suave e irreducible, y que el conjunto excepcional dado por $E_U := \varepsilon_U^{-1}(Z \cap U)$ es suave e irreducible de $\dim(E_U) = n - 1$.

Notar que, tal como se discutió en el Ejercicio 2.10.4 (2), si $V(v_1, \ldots, v_r)$ son otras ecuaciones locales de Z en un abierto afín $V \subseteq X$, entonces

$$\widetilde{U}|_{\varepsilon_U^{-1}(U \cap V)} \cong \widetilde{V}|_{\varepsilon_V^{-1}(U \cap V)}.$$

Luego, obtenemos un *atlas algebraico* que nos permite definir globalmente (!)

$$\varepsilon : \mathrm{Bl}_Z(X) \longrightarrow X,$$

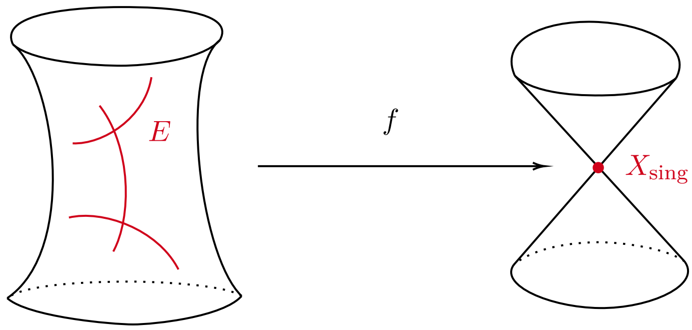
el **blow-up de X a lo largo de Z**. Más aún, $E := \mathrm{Exc}(\varepsilon) := \varepsilon^{-1}(Z)$ es la *hipersuperficie excepcional* que cumple que:

(1) $\mathrm{Bl}_Z(X) \setminus E \cong X \setminus Z$ y además $\varepsilon^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{r-1}$ para todo $x \in Z$.
(2) Localmente, tenemos que $E_U \cong (Z \cap U) \times \mathbb{P}^{r-1}$ (pero **no** globalmente, en general).

Terminemos esta sección con algunos resultados importantes, cuyas demostraciones se escapan de los alcances de este texto.

Ejemplo importante 2.13.31. — Sea X una variedad algebraica proyectiva irreducible. Una **resolución de singularidades** de X es un morfismo birracional $f : Y \longrightarrow X$ tal que:

(1) Y es una variedad algebraica proyectiva **suave** e irreducible.
(2) $f^{-1}(X_{\mathrm{reg}}) \xrightarrow{\sim} X_{\mathrm{reg}}$ es un isomorfismo.
(3) $E := f^{-1}(X_{\mathrm{sing}})$ es una hipersuperficie con **cruces simples normales** (simple normal crossings (SNC), en inglés), i.e., si $E = E_1 \cup \cdots \cup E_r$ son las componentes irreducibles de E, entonces cada E_i es una hipersuperficie *suave* de Y y cada punto $y \in E$ posee coordenadas locales $(u_1, \ldots, u_n)$ tales que $E \underset{\mathsf{loc}}{=} \{u_1 \cdots u_k = 0\}$ para cierto $k \leq n$.



***Teorema 2.13.32* (Hironaka, 1964). —** *Si* $\operatorname{car}(k) = 0$, *entonces* **toda** *variedad proyectiva admite una resolución de singularidades.*

En el caso que $\operatorname{car}(k) = p > 0$, hoy en día sabemos que toda variedad proyectiva de dimensión ≤ 3 admite una resolución de singularidades, gracias a los trabajos de Abhyankar (1956, 1966) y de Cossart y Piltant (2008, 2009).

Otro problema importante en geometría birracional es el factorizar aplicaciones racionales: Sean X e Y variedades algebraicas proyectivas suaves e irreducibles, y sea $f : X \dashrightarrow Y$ una aplicación birracional con $U := \operatorname{Dom}(f) \subseteq X$. Entonces:

(1) Una **factorización débil** de f es una factorización de la forma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & W_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & W_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dl] \arrow[dr] & & W_r \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X =: X_0 & & X_1 & & X_2 \quad \cdots & & X_{r-1} & & X_r := Y \end{tikzcd}$$

donde cada $W_i \to X_i$ y $W_i \to X_{i-1}$ es el blow-up a lo largo de una subvariedad **suave** disjunta de U, y donde cada X_i y W_i es proyectiva suave e irreducible.

(2) Una **factorización fuerte** de f es una factorización de la forma

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[rr, dotted] & & Y \end{tikzcd}$$

donde $W \to X$ y $W \to Y$ son series de blow-ups a lo largo de subvariedades **suaves**.

***Teorema 2.13.33* (Włodarczyk, 1999). —** *Si* $\operatorname{car}(k) = 0$, *entonces* **toda** *aplicación racional* f *posee una factorización débil.*

***Teorema 2.13.34* (Zariski, 1930). —** *Si* $\dim(X) = \dim(Y) = 2$, *entonces* **toda** *aplicación racional posee una factorización fuerte.*

2.14. Morfismos suaves y Teorema de Bertini

Recordemos que si $f : X \to Y$ es un morfismo regular entre variedades algebraicas y si $x \in X$, entonces el pullback de gérmenes $f^* : \mathscr{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,x},\ u \mapsto u \circ f$, donde $y = f(x)$, induce una aplicación k-lineal

$$d_x f : T_x X \longrightarrow T_y Y,\ D \longmapsto D \circ f^*.$$

llamada el *diferencial* de f en $x \in X$. Además, si $g : Y \to Z$ es otro morfismo regular, entonces se tiene que

$$d_x(g \circ f) = (d_y g) \circ (d_x f).$$

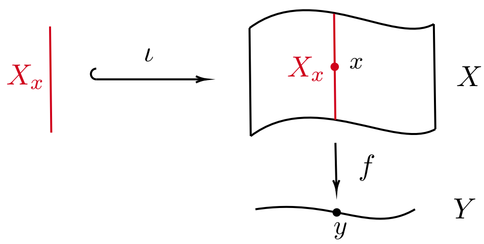
Ejemplo 2.14.1. — Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre variedades suaves e irreducibles, y sea $x \in X$. Si consideramos

$$X_x := f^{-1}(f(x)),\ \text{i.e., la fibra de } f \text{ que pasa por } x \in X,$$

entonces la composición

$$X_x \overset{\iota}{\hookrightarrow} X \overset{f}{\to} Y$$

es una función constante, de valor $f(x) \in Y$.



En particular,

$$0 \overset{\mathsf{def}}{=} d_x(f \circ \iota) = d_x(f) \circ d_x(\iota),\ \text{i.e., } \operatorname{Im}(d_x\iota) \subseteq \ker(d_x f : T_x X \longrightarrow T_y Y),$$

donde $d_x\iota : T_x X_x \hookrightarrow T_x X,\ D \mapsto D \circ \iota^*$ es *inyectiva*, y por ende

$$\operatorname{rg}(d_x\iota) \leq \dim_k(\ker d_x f),\ \text{i.e., } \dim_k(T_x X_x) \leq \dim(X) - \operatorname{rg}(d_x f).$$

Sin embargo, dicha inclusión puede ser estricta en general. Por ejemplo, si suponemos $\operatorname{car}(k) \neq 2$ y consideramos

$$f : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (z, x^2 z + y^2),$$

entonces la matriz del diferencial $d_p f$ está dada por

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2xz & 2y & x^2 \end{pmatrix},\ \text{donde } p = (x, y, z),$$

por lo que d_pf es *sobreyectiva* salvo si $xy = y = 0$, en cuyo caso $\mathrm{rg}(d_pf) = 1$.

Por otro lado, la fibra del punto $(a, b) \in \mathbb{A}^2$ es la curva algebraica

$$X_{(a,b)} := V(ax^2 + y^2 - b) \subseteq \mathbb{A}^2 \cong \{z = a\} \subseteq \mathbb{A}^3$$

Por lo que si $b = 0$ entonces $X_{(a,0)}$ es singular (corresponde a dos rectas que se intersectan) salvo si $a = b = 0$, pues en tal caso $X_{(0,0)} = V(y^2) = V(y)$ es una recta (¡doble!). En particular, la función

$$X \longrightarrow \mathbb{N},\ x \longmapsto \dim_k(T_x(X_x))$$

no es semi-continua superior[25].

Proposición 2.14.2. — *Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Entonces, la función*

$$X \longrightarrow \mathbb{N},\ x \longmapsto \dim_k \ker(d_xf)$$

es semi-continua superior*, i.e., para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto*

$$\{x \in X \text{ tal que } \dim \ker(d_xf) \geq r\}$$

es **cerrado** *en X.*

Demostración. — La afirmación es local, por lo que podemos suponer que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ son afines, con $\mathcal{I}(X) = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ y $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ dado por $f = (f_1, \dots, f_m)$. El conjunto en cuestión está dado por la condición

$$\dim_k \left(\ker(\tfrac{\partial g_i}{\partial X_j}) \cap \ker(\tfrac{\partial f_i}{\partial X_j})\right) \geq r, \text{ i.e., } \mathrm{rg} \begin{pmatrix} (\frac{\partial g_i}{\partial X_j}) \\ (\frac{\partial f_i}{\partial X_j}) \end{pmatrix} \leq n - r$$

que es una condición *cerrada* en X. $\square$

Con lo anterior, podemos dar la definición principal de esta sección.

Definición 2.14.3. — Sean X e Y variedades algebraicas *suaves e irreducibles*. Decimos que un morfismo regular $f : X \to Y$ es **suave en** $x \in X$ si el diferencial

$$d_xf : T_xX \twoheadrightarrow T_{f(x)}Y$$

es sobreyectivo. Más aún, decimos que f es un **morfismo suave** si es suave para todo punto $x \in X$.

(25) El verdadero problema es que la fibra *conjuntista* no percibe multiplicidades, por lo que es mucho mejor la *fibra esquemática*.

Terminología 2.14.4. — Un caso particular muy importante y bastante común de encontrar, es la versión algebraica de los revestimientos (o cubrimientos) topológicos. Más formalmente, un **morfismo étale** es un morfismo suave $f : X \to Y$ de dimensión relativa cero, i.e., tal que $\dim(f^{-1}(y)) = 0$ para todo $y \in Y$.

La Proposición anterior implica que el conjunto de puntos $x \in X$ donde un morfismo regular $f : X \to Y$ es suave es un *abierto*. Los ejemplos siguientes muestran que si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, dicho abierto puede ser vacío eventualmente.

Ejemplo importante 2.14.5. —

(1) La composición de morfismos suaves (resp. étale) es un morfismo suave (resp. étale).
(2) Sean X e Y variedades suaves e irreducibles. Las proyecciones
$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \twoheadrightarrow X \text{ y } \mathrm{pr}_2 : X \times Y \twoheadrightarrow Y$$
son morfismos suaves.
(3) Si $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $x \mapsto x^d$, entonces $f'(x) = dx^{d-1}$. En particular, si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ divide a d, entonces f **no** es suave en ningún punto. Del mismo modo, si $\mathrm{car}(k)$ **no** divide a d, entonces f es suave para todo $x \neq 0$.
(4) La inclusión $\iota : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ es un morfismo étale, pero **no** es un morfismo finito (pues la imagen no es cerrada).

Veamos algunas propiedades generales de los morfismos suaves.

Proposición 2.14.6. — *Sean X e Y variedades algebraicas suaves e irreducibles, y sea $f : X \to Y$ un morfismo suave. Entonces:*

(1) Toda *fibra no-vacía $f^{-1}(y)$ es de dimensión pura* $\dim(X) - \dim(Y)$.
(2) *Para todo $x \in X$, se tiene que $T_x(X_x) \cong \ker(d_x f)$, donde $X_x := f^{-1}(f(x))$.*
(3) *f es un morfismo dominante.*
(4) *Si $Z \subseteq Y$ es una sub-variedad cerrada* suave, *entonces $f^{-1}(Z)$ es suave.*

En particular, toda fibra no-vacía es suave *y de dimensión pura* $\dim(X) - \dim(Y)$ *(pero no necesariamente irreducible).*

Demostración. — Sea $X_x := f^{-1}(f(x))$ la fibra que pasa por $x \in X$. Luego, la composición
$$X_x \overset{\iota}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{f} Y$$
verifica que
$$\dim_x(X_x) \le \dim_k(T_x X_x) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{rg}(d_x \iota) \le \dim_k \ker(d_x f) = \dim(X) - \dim(Y),$$

donde la última igualdad se obtiene gracias al teorema del rango y al hecho que $d_x f$ es sobreyectiva. Por otra parte, sabemos que gracias al Teorema 2.12.9 que

$$\dim_x(X_x) \geq \dim(X) - \dim(\overline{f(X)}).$$

Así, deducimos que

$$\dim(X) - \dim(Y) \leq \dim(X) - \dim(\overline{f(X)}) \leq \dim_x(X_x) \leq \dim(X) - \dim(Y),$$

de donde deducimos (1), (2) y (3) simultáneamente.

Para ver (4), supongamos que $\operatorname{codim}_Y(Z) = r$ y sea $w \in f^{-1}(Z)$ un punto en la preimagen. Dado que tenemos una aplicación k-lineal

$$d_w(f|_{f^{-1}(Z)}) : T_w f^{-1}(Z) \longrightarrow T_{f(w)}Z,$$

el teorema del rango implica que

$$\dim_k T_w f^{-1}(Z) - \dim_k \ker(d_w f|_{f^{-1}(W)}) = \dim_k (d_w f)(T_w f^{-1}(Z)) \leq \dim_k T_{f(w)}Z,$$

donde $\dim_k T_{f(w)}Z = \dim(Z)$ ya que Z es suave. Además,

$$\dim_k \ker(d_w f|_{f^{-1}(Z)}) \leq \dim_k \ker(d_w f),$$

donde $\dim_k \ker(d_w f) = \dim(X) - \dim(Y)$ ya que f es un morfismo suave. En resumen, tenemos por una parte que

$$\dim_k T_w f^{-1}(Z) \leq \dim(X) - r \qquad (\star).$$

Por otra parte, si consideramos coordenadas locales $u_1, \ldots, u_r$ es una vecindad afín de $f(w) \in V \subseteq Y$, tal que $Z \cap V$ sea irreducible y dado por la intersección completa $Z \cap V = V(u_1, \ldots, u_r)$, entonces

$$f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Z) \stackrel{\mathsf{def}}{=} V(u_1 \circ f, \ldots, u_r \circ f)$$

en $f^{-1}(V) \subseteq X$, por lo que

$$\dim_w(f^{-1}(Z)) \geq \dim(X) - r \qquad (\star\star).$$

Así, las desigualdades $(\star)$ y $(\star\star)$ nos permiten probar (4). $\square$

En geometría diferencial, el Teorema de Sard (1942) afirma que el conjunto de puntos donde una función diferenciable $f : M \to N$ entre variedades diferenciables **no** es suave tiene medida nula. En geometría algebraica, dicho resultado se conoce como *suavidad genérica*. Para probarlo, necesitaremos el lema técnico siguiente:

Lema 2.14.7. — *Supongamos que* $\mathrm{car}(k) = 0$*. Sean* X *e* Y *variedades algebraicas irreducibles y* $f : X \to Y$ *un morfismo regular dominante. Entonces, existen abiertos* no-vacíos *suaves* $V \subseteq Y_{\mathrm{reg}}$ *y* $U \subseteq X_{\mathrm{reg}}$ *tales que* $U \subseteq f^{-1}(V)$*, y tales que el morfismo*

$$f|_U : U \longrightarrow V$$

es suave.

Demostración. — Dado que la afirmación es local, podemos suponer que X e Y son variedades algebraicas afines *suaves*, y considerar la extensión de cuerpos

$$f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X).$$

Sea $u_1, \ldots, u_{n-m} \in k(X)$ una base de trascendencial de $k(X)$ sobre $k(Y)$. Restringiéndose si fuese necesario al abierto donde cada u_i es regular, podemos asumir que $u_1, \ldots, u_{n-m} \in \mathscr{O}(X)$ son funciones regulares. Así, obtenemos inclusiones

$$\mathscr{O}(Y) \hookrightarrow \mathscr{O}(Y)[u_1, \ldots, u_{n-m}] \hookrightarrow \mathscr{O}(X)$$

que se traducen geométricamente en una factorización de f de la forma

$$f : X \xrightarrow{g} Z := Y \times \mathbb{A}^{n-m} \xrightarrow{\pi} Y.$$

Dado que $f = \pi \circ g$ y que π es suave, basta probar que $g : X \to Z$ es suave:

La extensión $g^* : k(Z) \hookrightarrow k(X)$ es finita, y el hecho que $\mathrm{car}(k) = 0$ implica que además es *separable*. Así, el Teorema del elemento primitivo (cf. Recuerdo 2.13.9) implica que existe $t \in k(X)$ tal que $k(X) = k(Z)(t)$.

En particular, existe $P \in k(Z)[T]$ tal que $P(t) = 0$ y, restringiéndonos al abierto de Z donde los coeficientes de P son funciones regulares, podemos suponer que $P \in \mathscr{O}(Z)[T]$ y por ende

$$k(X) \cong \mathrm{Fr}(\mathscr{O}(Z)[T]/\langle P \rangle), \text{ i.e., } X \sim_{\mathrm{bir}} V(P) \subseteq Z \times \mathbb{A}^1.$$

Luego, restringiéndonos a un abierto denso si fuese necesario, podemos suponer que $X = V(P) \subseteq Z \times \mathbb{A}^1$ y con ello obtener una factorización de g de la forma

$$g : X = V(P) \overset{\iota}{\hookrightarrow} Z \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} Z.$$

Para concluir, notamos que en el punto $x = (z, t) \in X \subseteq Z \times \mathbb{A}^1$, el espacio tangente $T_x X \subseteq T_z Z \oplus k$ está dado por el kernel de la aplicación lineal

$$\left((\tfrac{\partial P}{\partial Z_i}(x))_i \quad \tfrac{\partial P}{\partial T}(x) \right).$$

Dado que la aplicación lineal $d_x g : T_x X \to T_z Z$ está inducida (mediante restricción) por la proyección

$$\mathrm{pr}_1 : T_z Z \oplus k \twoheadrightarrow T_z Z, \ \left(\frac{\partial}{\partial Z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial Z_m}, \frac{\partial}{\partial T}\right) \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial Z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial Z_m}\right),$$

tenemos que g es suave en cualquier punto $x = (z,t)$ tal que $\frac{\partial P}{\partial T}(z,t) \neq 0$, lo cual siempre es posible en $\mathrm{car}(k) = 0$. □

***Teorema 2.14.8* (Suavidad genérica).** — *Supongamos que* $\mathrm{car}(k) = 0$. *Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles, y sea $f : X \to Y$ un morfismo dominante. Para todo $r \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto*

$$Z_r := \{x \in X \text{ tal que } \mathrm{rg}(d_x f) \leq r\} \subseteq X.$$

Entonces, se tiene que $\dim(\overline{f(Z_r)}) \leq r$. *En particular, existe un abierto* denso *suave $V \subseteq Y_{\mathrm{reg}}$ tal que*

$$f|_{f^{-1}(V) \cap X_{\mathrm{reg}}} : f^{-1}(V) \cap X_{\mathrm{reg}} \longrightarrow V$$

es un morfismo suave.

Demostración. — Sea Y' una componente irreducible de $\overline{f(Z_r)}$, y sea X' una componente irreducible de $\overline{Z_r} \cap f^{-1}(Y')$ tal que

$$f_r := f|_{X'} : X' \longrightarrow Y'$$

sea dominante. El Lema anterior implica que existe un punto suave $x \in X'$ tal que $f_r(x)$ es suave en Y' y tal que

$$d_x f_r : T_x X' \twoheadrightarrow T_{f_r(x)} Y'$$

es sobreyectivo. Dado que lo anterior es una propiedad abierta, podemos suponer que $x \in Z_r$ y luego:

$$\dim(Y') \leq \dim_k T_{f_r(x)} Y' = \mathrm{rg}(d_x f_r) \leq \mathrm{rg}(d_x f) \leq r,$$

demostrando lo pedido. En particular, basta considerar el cerrado propio

$$Z := Z_{m-1} \subsetneq Y \text{ con } m := \dim(Y)$$

para obtener un abierto denso $V := Y_{\mathrm{reg}} \cap (Y \setminus Z)$ sobre el cual f es suave. □

Observación importante 2.14.9. — Un caso particular importante, que usaremos amenudo, es cuando X es una variedad *suave* e irreducible. En tal caso, si $\mathrm{car}(k) = 0$, la *fibra general* de un morfismo dominante $f : X \to Y$ es suave.

Corolario 2.14.10. — *Supongamos que* $\operatorname{car}(k) = 0$*. Sea* X *una variedad algebraica suave e irreducible, y sea*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

un morfismo regular. Si $[H] \in \mathbb{P}(V^\vee)$ *es un* hiperplano general*, entonces la preimagen* $f^{-1}(H)$ *es suave.*

Demostración. — Podemos suponer que $\dim(X) \geq 1$. Consideremos la *variedad de incidencia*

$$I := \{(x, [H]) \in X \times \mathbb{P}(V^\vee) \text{ tal que } f(x) \in H\}.$$

Si $(x, [H]) \in I$, podemos escoger coordenadas de $V \cong k^{n+1}$ de tal suerte que $f(x) = [0, \ldots, 0, 1]$ y que $H = \{x_0 = 0\}$. Además, existen funciones regulares $f_0, \ldots, f_{n-1}$ en una vecindad $U \subseteq X$ de $x \in X$ de tal suerte que

$$f(x) = [f_0(x), \ldots, f_{n-1}(x), 1] \text{ para todo } x \in U.$$

Del mismo modo, todo hiperplano en una vecindad abierta $W \subseteq \mathbb{P}(V^\vee)$ de $H \in \mathbb{P}(V^\vee)$ tiene ecuación

$$x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Luego, I está definida en una vecindad de $(x, [H])$ por la ecuación

$$\{P := f_0(x) + a_1 f_1(x) + \cdots + a_{n-1} f_{n-1}(x) + a_n = 0\} \subseteq U \times \mathbb{A}^n.$$

En particular, dado que $\frac{\partial P}{\partial a_n} = 1 \neq 0$, el Criterio Jacobiano implica que I es una variedad *suave*.

Para ver que I es una variedad *irreducible*, consideramos la proyección $\pi := \mathrm{pr}_1 : I \to X$ y notamos que para todo $x \in X$

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x) &\overset{\text{def}}{=} \{[H] \in \mathbb{P}(V^\vee) \text{ tal que } f(x) \in H\} \\ &\cong \{[a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } f_0(x) a_0 + \cdots + f_n(x) a_n = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}, \end{aligned}$$

i.e., cada fibra de π es un hiperplano. Así, el Criterio de irreducibilidad implica que I es irreducible de dimensión $\dim(X) + n - 1$.

Finalmente, para concluir consideramos la segunda proyección

$$g := \mathrm{pr}_2 : I \longrightarrow \mathbb{P}(V^\vee)$$

y notamos que $g^{-1}([H]) \overset{\text{def}}{=} f^{-1}(H)$, por lo que la fibra general es vacía o bien g es dominante, y en este último caso tenemos que $f^{-1}(H)$ es suave para H general (gracias al Teorema de suavidad genérica). $\square$

Una consecuencia remarcable de lo anterior es el *Teorema de Bertini*, que a pesar de ser cierto en característica arbitraria (Kleiman, 1974), la demostración en $\mathrm{car}(k) = 0$ es más sencilla.

***Teorema 2.14.11* (Teorema de Bertini).** — *Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad suave e irreducible de* $\dim(X) \geq 1$*, y sea H un hiperplano general de $\mathbb{P}^n$. Entonces, la* sección hiperplana $X \cap H$ *es suave.*

Demostración en $\mathrm{car}(k) = 0$. — Basta aplicar el resultado anterior a la inclusión $f : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, donde $f^{-1}(H) \overset{\mathsf{def}}{=} X \cap H$. □

Observación importante 2.14.12. — En general, los *teoremas tipo Bertini* se refieren a resultados afirmando que cierta propiedad de X (e.g., suavidad, irreducibilidad, conexidad, etc) se preserva al considerar secciones hiperplanas $X \cap H$ (generales o arbitrarias). Por ejemplo, se tiene el siguiente resultado tipo Bertini:

Teorema 2.14.13. — *Sea X una variedad algebraica irreducible, y sea $f : X \to \mathbb{P}^n$ un morfismo regular tal que* $\dim(\overline{f(X)}) \geq 2$*. Entonces, para todo hiperplano general de $\mathbb{P}^n$ se tiene que $f^{-1}(H)$ es irreducible.*

2.15. Normalización y Teorema principal de Zariski

Recuerdo 2.15.1. — Recordemos (cf. Recuerdo 2.11.6) que si $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos conmutativos, entonces $x \in B$ es **entero sobre** A (respecto a φ) si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

(1) Existe una relación polinomial *mónica*

$$x^n + \varphi(a_1)x^{n-1} + \cdots + \varphi(a_{n-1})x + \varphi(a_n) = 0.$$

(2) $A[x] \subseteq B$ es un A-módulo finitamente generado.

En particular, si $x, y \in B$ son enteros sobre A entonces $x \pm y, xy \in B$ también lo son (puesto que $A[x, y]$ es finitamente generado).

Así, obtenemos una A-álgebra

$$\overline{A} := \{b \in B \text{ tal que } b \text{ es entero sobre } A\} \subseteq B,$$

llamada la **clausura integral** de A en B. En particular, decimos que el anillo A es **integralmente cerrado** en B si $\overline{A} = \varphi(A)$ (que se identifica con A si φ es inyectivo), i.e.,

> Todo elemento $b \in B$ que es entero sobre A verifica que $b = \varphi(a)$ para cierto $a \in A$.

Por ejemplo, tenemos que:

(1) El anillo $\mathbb{Z}$ es integralmente cerrado sobre $\mathbb{Q}$. Más generalmente, si K es un *cuerpo de números* (i.e., una extensión finita de los racionales $\mathbb{Q}$) entonces $\overline{\mathbb{Z}} := \mathscr{O}_K$ es el *anillo de enteros* del cuerpo K.

(2) En la curva nodal $X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2$ tal que $y^2 = x^2 + x^3\}$, la función racional $t := \frac{y}{x} \in k(X)$ es entera sobre $\mathscr{O}(X)$, pues $t^2 \overset{\mathsf{def}}{=} 1 + x$, pero $t \notin \mathscr{O}(X)$.

Finalmente, recordemos los siguientes hechos que nos serán de utilidad:

(a) Sea B una A-álgebra y C una B-álgebra. Si $x \in C$, entonces:
   (i) Si $x \in C$ es entero sobre A, entonces $x \in C$ es entero sobre B.
   (ii) Si B es un A-módulo finitamente generado y $x \in C$ entero sobre B, entonces $x \in C$ es entero sobre A.

(b) Tenemos que $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$, i.e., la clausura integral es la sub-álgebra más pequeña conteniendo los elementos enteros de B.

***Terminología 2.15.2* (Zariski, 1939).** — Sea A un *dominio entero* y $\mathrm{Fr}(A)$ su cuerpo de fracciones. La clausura integral $\overline{A}$ de A en $\mathrm{Fr}(A)$ es llamada la **normalización** de A, denotada también por A^ν.

En particular, decimos que el anillo A es **normal** si $A = A^\nu$ en $\mathrm{Fr}(A)$, i.e., todo elemento $x \in \mathrm{Fr}(A)$ que es entero sobre A *pertenece* a A.

Definición 2.15.3. — Sea X una variedad algebraica *irreducible*. Decimos que $x \in X$ es un **punto normal**, o que X es **normal en** $x \in X$, si el anillo local $\mathscr{O}_{X,x}$ es normal (i.e., si $\mathscr{O}_{X,x}$ es integralmente cerrado en $k(X)$). Decimos que X es una **variedad normal** si todo punto $x \in X$ es normal.

El siguiente ejemplo es bastante útil, pues evita hacer cálculos en cada punto.

Ejemplo 2.15.4. — Sea X una variedad algebraica <u>afín</u> e irreducible. Entonces,

> X es una variedad normal si y sólo si $\mathscr{O}(X)$ es integralmente cerrado en el cuerpo de funciones racionales $k(X)$.

En efecto, si $\mathscr{O}(X)$ es integralmente cerrado y $u \in k(X)$ cumple que para *cierto* $x \in X$ existen elementos $a_i \in \mathscr{O}_{X,x}$ tales que

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \text{ en } k(X).$$

Luego, si escribimos $a_i = \frac{p_i}{q_i}$ con $p_i, q_i \in \mathscr{O}(X)$ con $q_i(x) \neq 0$, entonces tenemos que $v := uq_1 \cdots q_n$ es un elemento entero sobre $\mathscr{O}(X)$, y por ende $v \in \mathscr{O}(X)$. Así, $u \overset{\text{def}}{=} \frac{v}{q_1 \cdots q_n}$ es un elemento de $\mathscr{O}_{X,x}$ ya que $q_i(x) \neq 0$ para todo i.

Recíprocamente, si X es normal y la función racional $u \in k(X)$ cumple que existen $a_i \in \mathscr{O}(X)$ tales que

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

entonces, dado que $a_i \in \mathscr{O}_{X,x}$ para todo $x \in X$, tenemos que $u \in \mathscr{O}_{X,x}$ para todo $x \in X$. En otras palabras, $u \in \bigcap_{x \in X} \mathscr{O}_{X,x} \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}(X)$ es regular.

En particular, la curva nodal

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y^2 = x^2 + x^3\}$$

no es normal, pues $t := \frac{y}{x} \in k(X)$ es un elemento entero que no es regular.

Ejemplo importante 2.15.5 **(Lema de Gauss).** — Sea X una variedad algebraica irreducible. Entonces,

Si $x \in X_{\text{reg}}$ es un punto *suave*, entonces $x \in X$ es *normal.*

En efecto, podemos suponer que X es una variedad algebraica afín y consideramos $u \in k(X) \cong \operatorname{Fr}(\mathscr{O}(X))$ función racional tal que

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

para ciertos $a_i \in \mathscr{O}_{X,x}$. Dado que $\mathscr{O}_{X,x}$ es un *anillo factorial* (cf. Recuerdo 2.13.19), podemos escribir $u = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathscr{O}_{X,x}$ relativamente primos. Luego,

$$p^n + a_1 p^{n-1} q + \cdots + a_n q^n = 0$$

por lo que q divide a p^n, y luego q es una unidad (dado que p y q son relativamente primos), i.e., $q(x) \neq 0$. Así, $u \overset{\text{def}}{=} \frac{p}{q}$ pertenece a $\mathscr{O}_{X,x}$.

Recordemos (ver Proposición 2.13.23) que si X es una variedad *suave* e $Y \subseteq X$ es una sub-variedad cerrada de codimensión pura 1, entonces <u>*todo*</u> punto $y \in Y$ admite una vecindad afín $U \subseteq X$ tal que

$$\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle f \rangle$$

es un ideal principal. Si X es una variedad *normal*, podemos obtener un resultado un poco menos preciso (pero que será de utilidad más adelante).

Proposición 2.15.6. — *Sea X una variedad algebraica irreducible* normal*, y sea $Y \subseteq X$ una sub-variedad cerrada de codimensión pura 1. Entonces, existe un abierto afín $U \subseteq X$ tal que $U \cap Y \neq \emptyset$ y una función regular $f : U \to k$ tal que $\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle f \rangle$.*

Demostración. — A priori, no podemos símplemente considerar $U := Y \cap X_{\mathrm{reg}}$ y aplicar el resultado en el caso suave, puesto que podría ocurrir que $Y \subseteq X_{\mathrm{sing}}$.

Sin embargo, podemos suponer que X es afín e $Y = V(\mathfrak{p})$ irreducible, donde $\mathfrak{p} \subseteq \mathscr{O}(X)$ es un ideal primo.

Considerando $g \in \mathfrak{p}$ no-nulo, tenemos que $Y \subseteq V(g)$ y luego $Y = V(g)$ gracias al Teorema de Krull. Más aún, el Hilbert Nullstellensatz implica que

$$\mathcal{I}(Y) = \sqrt{\langle g \rangle}, \text{ i.e., } \mathcal{I}(Y)^{\ell} \subseteq \langle g \rangle \subseteq \mathcal{I}(Y)$$

para cierto $\ell \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ minimal. La idea será entonces probar que *localmente* es posible conseguir que $\ell = 1$:

Supongamos que $\ell \geq 2$, y consideremos $u_1, \ldots, u_{\ell-1} \in \mathcal{I}(Y)$ tales que $h := u_1 \cdots u_{\ell-1} \notin \langle g \rangle$ pero $ah \in \langle g \rangle$ para todo $a \in \mathcal{I}(Y)$. En particular, la función racional $u := \frac{h}{g} \notin \mathscr{O}(X)$ no es regular, pero $u\,\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathscr{O}(X)$.

Notar que $u\,\mathcal{I}(Y) \not\subseteq \mathcal{I}(Y)$, pues en caso contrario existirían generadores $p_1, \ldots, p_N \in \mathcal{I}(Y)$ de $\mathcal{I}(Y)$ tales que $up_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} p_j$ para ciertos $a_{ij} \in \mathscr{O}(X)$. Matricialmente, esto último equivale a

$$(u\,\mathrm{I}_N - (a_{ij})_{i,j}) \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = 0, \text{ de donde deducimos } \det(u\,\mathrm{I}_N - (a_{ij})_{i,j}) = 0.$$

Al expandir esta última ecuación *mónica*, tendríamos que $u \in \mathscr{O}(X)$ (pues X es normal), lo cual es imposible.

Luego, existe $f \in \mathcal{I}(Y)$ tal que $s := fu \notin \mathcal{I}(Y)$, i.e., $Y \not\subseteq V(s) \subseteq X$. Así, en el abierto $U := \{x \in X \text{ tal que } s(x) \neq 0\}$ (que intersecta Y) se tiene $f^{-1}\,\mathcal{I}(Y) \overset{\mathsf{def}}{=} s^{-1} u\,\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathscr{O}(U)$, i.e., $\mathcal{I}(U \cap Y) = \langle f \rangle$. □

El siguiente resultado establece una de las principales propiedades de las variedades algebraicas normales.

Teorema 2.15.7. — *Sea X una variedad algebraica irreducible* normal. *Entonces,*

$$\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing}(X) \geq 2,$$

i.e., X es suave en codimensión 1.

Demostración. — Supongamos que $\operatorname{Sing}(X)$ posee una componente irreducible Y de codimensión 1. Luego, podemos suponer que X es afín y que

$\mathcal{I}(Y) = \langle f \rangle$. En particular, para $y \in Y$ tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{X,y} & \twoheadrightarrow & \mathscr{O}_{Y,y} = \mathscr{O}_{X,y}/\langle f \rangle \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{m}_{X,y} & \twoheadrightarrow & \mathfrak{m}_{Y,y} = \mathfrak{m}_{X,y}/\langle f \rangle \end{array}$$

Sea $y \in Y_{\text{reg}}$ punto suave de Y, y supongamos que **no** es un punto suave de X. Entonces, si $\mathfrak{m}_{Y,y}$ está generado por $v_1, \ldots, v_{n-1}$ (coordenadas locales en Y) entonces $\mathfrak{m}_{X,y}$ está generado por $v_1, \ldots, v_{n-1}, f$. En particular,

$$\dim_k(T_yX) = \dim_k(\mathfrak{m}_{X,y}/\mathfrak{m}_{X,y}^2) \leq n \overset{\text{def}}{=} \dim_y(X),$$

i.e., $y \in Y$ es suave en X, lo cual es una contradicción. $\square$

Como consecuencia inmediata, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.15.8. — *Sea C una curva algebraica irreducible. Entonces, la curva C es suave si y sólo si C es normal.*

Veamos que a *toda* variedad algebraica se puede asociar de manera canónica una variedad algebraica normal.

Ejemplo importante 2.15.9. — Sea X una variedad algebraica afín irreducible, y consideramos la clausura integral de $\mathscr{O}(X)$ en $k(X)$, i.e.,

$$\mathscr{O}(X) \subseteq A \subseteq k(X), \text{ con } A := \overline{\mathscr{O}(X)}.$$

Entonces, A es una k-álgebra finitamente generada y reducida. Luego, podemos considerar la variedad algebraica afín

$$X^\nu := \operatorname{Specm}(A), \text{ que cumple } \mathscr{O}(X^\nu) \cong A.$$

Más aún, la inclusión $\mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}(X^\nu)$ induce un morfismo regular sobreyectivo $\nu : X^\nu \to X$ que es llamado la **normalización** de X. Además, las propiedades de la clausura integral implican que:

(1) X^ν es una variedad normal, y $\nu : X^\nu \to X$ es un isomorfismo en una vecindad de cada punto normal $x \in X$.

(2) $\nu : X^\nu \to X$ es un morfismo finito y birracional, puesto que $\operatorname{Fr}(A) = k(X)$.

(3) Si $g : Y \to X$ es un morfismo finito y birracional, donde Y es una variedad algebraica irreducible, entonces:

Existe un único morfismo $\widehat{g} : X^\nu \to Y$ tal que $g \circ \widehat{g} = \nu$, i.e., el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] & & X \\ & X^\nu \arrow[ul, "\exists!\,\widehat{g}"] \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Es decir, *g factoriza a la normalización.*

En efecto, dado que $k(X) \cong k(Y)$, las inclusiones

$$\mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}(Y) \subseteq k(Y) \cong k(X),$$

donde $\mathscr{O}(Y)$ es entero sobre $\mathscr{O}(X)$, implica que $\mathscr{O}(Y) \subseteq \overline{\mathscr{O}(X)} \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}(X^\nu)$, de donde se obtiene $\widehat{g} : X^\nu \to Y$.

(4) Si $h : Z \to X$ es un morfismo regular dominante, donde Z es una variedad algebraica afín irreducible *normal*, entonces:

Existe un único morfismo $\widehat{h} : Z \to X^\nu$ tal que $g = \nu \circ \widehat{h}$, i.e., el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\exists!\,\widehat{h}"'] & & X \\ & X^\nu \arrow[ur, "\nu"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Es decir, *h se factoriza a través de la normalización.*

En efecto, un elemento $u \in \mathscr{O}(X^\nu)$ es entero sobre $\mathscr{O}(X)$ y está contenido en $k(X) \xhookrightarrow{h^*} k(Z)$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}(X^\nu) \subseteq k(X) \arrow[r, hook, "h^*"] \arrow[drr, hook, start anchor=south west] & k(Z) \\ & & \mathscr{O}(Z) \arrow[ul, hook] \end{tikzcd}$$

Dado que $\mathscr{O}(X) \xhookrightarrow{h^*} \mathscr{O}(Z)$, a posteriori u es entero sobre $\mathscr{O}(Z)$ y, como $\mathscr{O}(Z)$ es integralmente cerrado, tenemos que $u \in \mathscr{O}(Z)$. Así, $\mathscr{O}(X^\nu) \subseteq \mathscr{O}(Z)$, de donde se obtiene $\widehat{h} : Z \to X^\nu$.

(5) Los puntos (3) y (4) implican que la normalización de X es **única** (módulo isomorfismo). Más precisamente, si $\nu_1 : X_1^\nu \to X$ y $\nu_2 : X_2^\nu \to X$ son dos normalizaciones de X, entonces existe un

isomorfismo $\varphi : X_1^\nu \xrightarrow{\sim} X_2^\nu$ tal que el diagrama

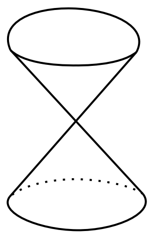
$$\begin{tikzcd} X_1^\nu \arrow[rr, "\sim", "\varphi"'] \arrow[dr, "\nu_1"'] & & X_2^\nu \arrow[dl, "\nu_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Corolario 2.15.10. — *Toda variedad algebraica irreducible X posee una* única *normalización $\nu : X^\nu \to X$, obtenida al considerar un atlas algebraico afín de X y pegar las normalizaciones. En particular, toda curva algebraica es birracional a una curva suave.*

Ejemplo 2.15.11. — Supongamos que $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Consideremos

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } x^2 + y^2 = z^2\} \text{ cono en } \mathbb{A}^3.$$



Veamos que X es normal:

Para ello, notemos que

$\mathscr{O}(X) \cong k[X, Y, Z]/\langle X^2+Y^2-Z^2\rangle \cong A[Z]/\langle X^2+Y^2-Z^2\rangle$ donde $A = k[X, Y]$.

En particular, los elementos de $\mathscr{O}(X)$ son de la forma $f = a + bz$ con $a, b \in k[x, y]$ y $\mathscr{O}(X)$ es un A-módulo finitamente generado (pues $\pi : X \to \mathbb{A}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ es un morfismo finito).

Así, los elementos $u \in k(X)$ son de la forma $u = a + bz$ con $a, b \in k(x, y)$ y además si $u \in k(X)$ es entero sobre $\mathscr{O}(X)$ entonces es entero sobre $k[x, y]$. Por otro lado, tenemos que

$$u^2 = a^2 + 2abz + b^2z^2 \overset{\text{def}}{=} a^2 + 2abz + b^2(x^2 + y^2)$$

y por ende el polinomio minimal de u es $P(T) = T^2 - 2aT + a^2 - (x^2 + y^2)b^2$. Luego, $2a \in k[x, y]$ y $a^2 - (x^2 + y^2)b^2 \in k[x, y]$, de donde se deduce que $a \in k[x, y]$ y $(x^2 + y^2)b^2 \in k[x, y]$. Finalmente, notemos que $(x^2 + y^2) = (x + iy)(x - iy)$ es producto de elementos irreducibles y luego el denominador de $b \in k(x, y)$ divide al numerador, i.e., $b \in k[x, y]$. Así, $u \in \mathscr{O}(X)$ y por ende X es normal.

El siguiente resultado permite apreciar cómo el álgebra conmutativa interviene en un enunciado puramente geometríco, probado originalmente por Zariski en 1943.

Teorema 2.15.12 **(Teorema principal de Zariski)**
Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles y sea $f : X \to Y$ un morfismo birracional. Sea $x \in X$ tal que $y = f(x)$ es un punto normal *en Y. Entonces:*

(1) *f es un isomorfismo entre vecindades afines de $x \in X$ e $y \in Y$; o bien*
(2) *Existe una hipersuperficie irreducible $E \subseteq X$ tal que $x \in E$ y tal que* $\operatorname{codim}_Y(\overline{f(E)}) \geq 2$.

En particular, en el caso (2) se tiene $\dim_x f^{-1}(y) \geq 1$.

Observación importante 2.15.13. — En el caso en que $f : X \to Y$ sea un morfismo birracional donde el conjunto de puntos

$$Z := \{x \in X \text{ tal que } \dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq 1\}$$

no es una hipersuperficies, entonces la imagen de dicho conjunto $f(Z) \subseteq Y$ está contenido en el lugar de puntos *no-normales* de Y (!).

Por ejemplo, si $\dim(X) = \dim(Y) = 3$ y f **no** es un isomorfismo en una curva irreducible $C \subseteq X$, entonces el punto $f(C) = \{y_0\}$ **no** es normal en Y.

La prueba es bastante técnica, por lo que nos centraremos en el caso particular en que $y \in Y$ es un punto *suave*.

Demostración en el caso suave. — Podemos suponer que X e Y son variedades algebraicas afines, y consideremos $u_1, \ldots, u_N \in \mathscr{O}(X)$ generadores (definiendo un incrustamiento $X \subseteq \mathbb{A}^N$). Recordemos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}(Y) \arrow[r, hook, "f^*"] \arrow[d, hook] & \mathscr{O}(X) \arrow[d, hook] \\
\mathscr{O}_{Y,y} \arrow[r, hook, "f^*"] \arrow[d, hook] & \mathscr{O}_{X,x} \arrow[d, hook] \\
k(Y) \arrow[r, "f^*", "\cong"'] & k(X)
\end{tikzcd}$$

Así, podemos ver las funciones u_i como funciones racionales, y tenemos que $u_i = f^*(v_i) = f^*\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$ para ciertas $a_i, b_i \in \mathscr{O}(Y)$. Más aún, dado que $y \in Y$ es un punto <u>*suave*</u> tenemos que $\mathscr{O}_{Y,y}$ es un anillo factorial, y por ende podemos suponer que a_i y b_i son relativamente primos.

Caso (1). Si $b_i(y) \neq 0$ para todo i, obtenemos una inclusión

$$\varphi : \mathscr{O}(Y)_{b_1 \cdots b_N} \cong \mathscr{O}(V) \xhookrightarrow{f^*} \mathscr{O}(X)_{f^*(b_1 \cdots b_N)} \cong \mathscr{O}(U),$$

donde $V = \{y \in Y \text{ tal que } (b_1 \cdots b_N)(y) \neq 0\}$ y donde $U \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(V)$. Más aún, en este caso tenemos que $U \cong V$. En efecto, podemos escribir

$$u_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f^*(a_i)}{f^*(b_i)} = \frac{f^*(a_i) \prod_{j \neq i} f^*(b_j)}{f^*(b_1 \cdots b_N)},$$

por lo que u_i está en la imagen de f^*, i.e., φ es sobreyectivo.

Caso (2). Supongamos que $b_1(y) = 0$. En el anillo local $\mathscr{O}_{Y,y}$, escribimos $b_1 = c_1 d_1$ con c_1 irreducible y tal que $c_1(y) = 0$.

En $\mathscr{O}_{Y,y}$, si escribimos $a_1 = \frac{a_1'}{a_1''}$ y $c_1 = \frac{c_1'}{c_1''}$, con $a_1''(y) c_1''(y) \neq 0$, y nos restringimos a los abiertos afines de X e Y donde $a_1'' \neq 0$, $c_1'' \neq 0$, $f^*(a_1'') \neq 0$, $f^*(c_1'') \neq 0$ podemos suponer que $a_1, c_1 \in \mathscr{O}(Y)$ y $f^*(a_1), f^*(c_1) \in \mathscr{O}(X)$ son funciones regulares.

Consideremos entonces la hipersuperficie $E := V(f^*(c_1)) \subseteq X$, y notemos que $x \in E$ pues $f^*(c_1)(x) \stackrel{\text{def}}{=} c_1(f(x)) \stackrel{\text{def}}{=} c_1(y) = 0$. Más aún, restringiéndose a una componente irreducible de E que pase por x podemos suponer que E es irreducible. Veamos que $\operatorname{codim}_Y(\overline{f(E)}) \geq 2$:

Notar que $f^*(a_1) \stackrel{\text{def}}{=} f^*(b_1) u_1 \stackrel{\text{def}}{=} f^*(c_1) f^*(d_1) u_1$, y luego a_1 se anula en $\overline{f(E)}$. Finalmente, dado que a_1 y c_1 son relativamente primos entre sí en $\mathscr{O}_{Y,y}$ (i.e., determinan ecuaciones locales independientes), tenemos que

$$\overline{f(E)} \subsetneq V(c_1) \subsetneq Y$$

y luego $\operatorname{codim}_Y(\overline{f(E)}) \geq 2$. □

Corolario 2.15.14. — *Sea X una curva irreducible e Y una curva* suave. *Si $f : X \to Y$ es un morfismo birracional, entonces $f(X) \subseteq Y$ es un abierto y f induce un isomorfismo $X \cong f(X)$. En particular, X es suave.*

Terminemos esta sección con algunos resultados importantes y muy útiles, cuyas demostraciones se escapan de los alcances de este texto.

Ejemplo importante 2.15.15. — En 1957, Zariski extiende parte del resultado anterior a morfismos más generales (no necesariamente birracionales).

Teorema 2.15.16 **(Teorema de conexidad de Zariski)**
Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles y sea $f : X \to Y$ un morfismo dominante. *Supongamos que X es* proyectiva *y que las fibras* generales *de f son* conexas*, entonces:*

Para todo punto normal *$y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ es conexa.*

Notar que en el caso particular en que f es birracional, las fibras *generales* son singletons (y por ende conexos). Lo que implica que las fibras sobre puntos normales consisten en singletons (caso (1)) o bien sub-variedades cuyas componentes irreducibles tienen dimensión ≥ 1 (caso (2)).

Otra consecuencia de los teoremas de Zariski es el siguiente resultado de Stein (1956), que es muy usado para factorizar morfismos regulares $f : X \to Y$ desde una variedad proyectiva normal X en $f' : X \to Y'$ con Y' proyectiva normal.

Teorema 2.15.17 **(Factorización de Stein).** — *Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles* proyectivas *y sea $f : X \to Y$ un morfismo regular. Entonces, podemos factorizar f como*

$$f : X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y,$$

donde Y' es una variedad algebraica irreducible proyectiva*, $f : X \to Y'$ tiene fibras* conexas *y $g : Y' \to Y$ es un morfismo* finito*. Más aún, si X es normal entonces Y' es normal.*

El resultado anterior implica en particular que todo morfismo regular no-constante entre *curvas* algebraicas irreducibles proyectivas $f : X \to Y$ se factoriza en un morfismo *biyectivo* $f' : X \to Y'$ y un morfismo *finito* $g : Y' \to Y$.

Cabe destacar que si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, el morfismo biyectivo f' puede **no** ser un isomorfismo (e.g. $f' : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1,\ [x, y] \mapsto [x^p, y^p]$).

Ejercicio 2.15.18. — Sean $f : X \to Y$ un morfismo regular entre curvas algebraicas proyectivas irreducibles, ¿qué puede decir de f?. La respuesta dependerá del hecho si X y/o Y es suave, si f es o no birracional, y de $\mathrm{car}(k)$.

CAPÍTULO 3

FIBRADOS VECTORIALES Y DIVISORES

En geometría algebraica *clásica*, la mayoría de las construcciones geométricas involucran subvariedades del espacio proyectivo. Por lo anterior, es una pregunta central en geometría algebraica *moderna* el poder decidir cuándo una variedad algebraica abstracta X puede ser incrustada en un espacio proyectivo, i.e., $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. Además, podemos preguntarnos en cómo construir dicho incrustamiento y cuales son las propiedades de geométricas de la imagen. Todas estas preguntas pueden ser reformuladas y resueltas mediante el lenguaje de *fibrados vectoriales y divisores.*

3.1. Fibrados vectoriales y Grupo de Picard

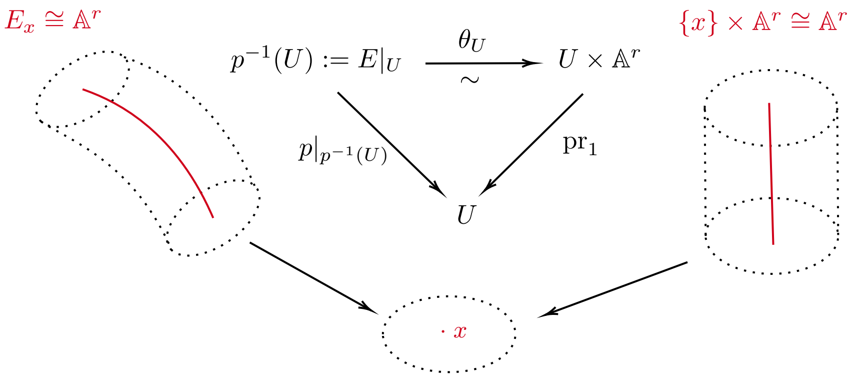
Definición 3.1.1. — Sea X una variedad algebraica y $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Un **fibrado vectorial de rango** r en X es una variedad algebraica E dotada de un morfismo regular sobreyectivo $p : E \twoheadrightarrow X$ tal que:

(1) Para todo $x \in X$, la fibra $p^{-1}(x) := E_x$ es un k-espacio vectorial de $\dim_k(E_x) = r$. En particular, $E_x \cong \mathbb{A}^r$ para todo $x \in X$.

(2) Para todo $x \in X$, existe una vecindad abierta afín $U \subseteq X$ de $x \in X$ y una **trivialización** de E sobre U, i.e., un isomorfismo

$$\theta_U : p^{-1}(U) =: E|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{A}^r$$

tal que el diagrama



es conmutativo, y tal que la aplicación $k^r \xrightarrow{\sim} E_x$, $v \longmapsto \theta_U^{-1}(x, v)$ es un isomorfismo lineal para todo $x \in U$.

Terminología 3.1.2. — Un **fibrado en rectas** en X es un fibrado vectorial $L \xrightarrow{p} X$ de rango 1.

Ejemplo importante 3.1.3. —

(1) Sea X una variedad algebraica y V un k-espacio vectorial de $\dim_k(V) = r$. El fibrado vectorial

$$V_X := X \times V \cong X \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X$$

es llamado el **fibrado trivial** de rango r.

(2) Sea V un k-espacio vectorial de $\dim_k(V) = n+1$, sea $X = \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ su proyectivización. Dentro del fibrado trivial $V_X \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{P}(V) \times V$, consideramos la *variedad de incidencia*

$$L := \{([\ell], v) \in \mathbb{P}(V) \times V \text{ tal que } v \in \ell\} \xrightarrow{p := \mathrm{pr}_1} \mathbb{P}(V), \ ([\ell], v) \longmapsto [\ell],$$

donde $[\ell] \in \mathbb{P}(V)$ es el *punto* del espacio proyectivo correspondiente a la recta vectorial $\ell \subseteq V$. En particular, $p^{-1}([\ell]) \overset{\mathsf{def}}{=} \ell \cong \mathbb{A}^1$ es una recta. Veamos que podemos trivializar $L \xrightarrow{p} \mathbb{P}(V)$:

Consideremos coordenadas homogéneas $[x_0, \dots, x_n]$ en $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}(V)$ y t una coordenada en $\ell \cong \mathbb{A}^1$. Así, en el abierto estándar $U_i \overset{\mathsf{def}}{=} \{x_i \neq 0\}$ tenemos la trivialización

$$U_i \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow[\sim]{\theta_i^{-1}} p^{-1}(U_i)$$

$$\left(\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right], t\right) \longmapsto \left([x_0, \dots, x_n], \left(\frac{tx_0}{x_i}, \dots, t, \dots, \frac{tx_n}{x_i}\right)\right)$$

que envía un escalar $t \in \mathbb{A}^1$ y $\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right]$, el vector director de una recta ℓ, en el punto $\left(\frac{tx_0}{x_i}, \dots, t, \dots, \frac{tx_n}{x_i}\right) \in \ell$.

Notación 3.1.4. — El fibrado en rectas $L \to \mathbb{P}(V)$ construído en el ejemplo anterior será denotado por $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ o por $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, y es llamado el **fibrado en rectas tautológico** del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. En particular,

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \twoheadrightarrow \mathbb{P}(V)$$

cumple que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{[\ell]} \cong \ell$ para todo $[\ell] \in \mathbb{P}(V)$.

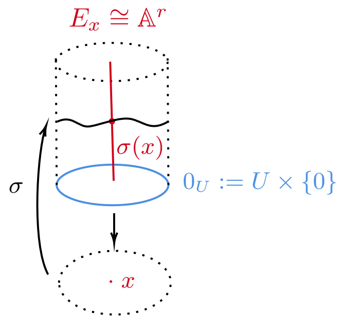
Ejercicio 3.1.5. — Sea V un k-espacio vectorial y $1 \leq r \leq \dim_k(V) - 1$. Sea $G := \mathrm{Gr}(r, V)$ la variedad grassmanniana que parametriza los sub-espacios vectoriales $\Lambda \cong k^r$ de V. Probar que la variedad de incidencia, contenida en V_G, dada por

$$S := \{([\Lambda], v) \in \mathrm{Gr}(r, V) \times V \text{ tal que } v \in \Lambda\} \xrightarrow{p := \mathrm{pr}_1} \mathrm{Gr}(r, V)$$

define un fibrado vectorial de rango r en $\mathrm{Gr}(r, V)$. Dicho fibrado es llamado el **fibrado tautológico** de la grassmanniana $\mathrm{Gr}(r, V)$.

Observación 3.1.6. —

(1) Si $L \to X$ es un fibrado en rectas y $\theta_U : L|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{A}^1$ es una trivialización de L sobre U, entonces $\sigma(x) := \theta_U^{-1}(x, 1)$ pertenece a L_x para todo $x \in U$. Más aún, $L_x = \mathrm{Vect}_k(\sigma(x))$, i.e., $\sigma(x)$ es un generador de cada fibra L_x.



Más generalmente, consideremos $E \to X$ un fibrado vectorial de rango r y $\theta_U : E|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{A}^r$ una trivialización de E sobre U. Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ es la base canónica de $k^r \cong \mathbb{A}^r$, entonces definimos

$$e_i(x) := \theta_U^{-1}(x, \varepsilon_i) \text{ para todo } i \in \{1, \dots, r\}.$$

Luego, $E_x = \mathrm{Vect}_k(e_1(x), \ldots, e_r(x))$ para todo $x \in U$. Decimos que las funciones $(e_1, \ldots, e_r)$ forman un **marco de referencia**[1] de $E|_U$.

(2) Podemos restringir fibrados vectoriales. Más precisamente, si $E \xrightarrow{p} X$ es un fibrado vectorial y $Y \subseteq X$ es una sub-variedad algebraica, entonces $E|_Y := p^{-1}(Y)$ es un fibrado vectorial en Y con $\mathrm{rg}(E|_Y) = \mathrm{rg}(E)$.

(3) Más generalmente, podemos definir el **pullback** de fibrados vectoriales:

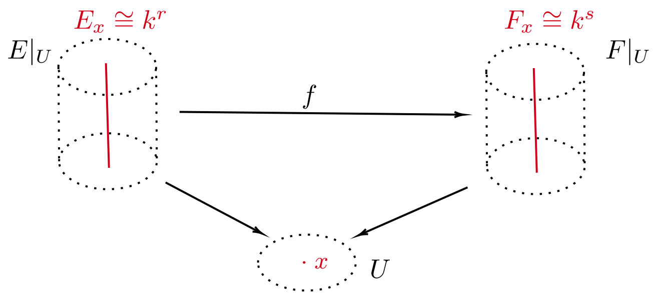
Sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial y sea $f : Y \to X$ un morfismo regular. Entonces,

$$f^*E := \{(y, z) \in Y \times E \text{ tal que } f(y) = p(z)\}$$

es un fibrado vectorial en Y, con $\mathrm{rg}(f^*E) = \mathrm{rg}(E)$ y $(f^*E)_y \overset{\mathsf{def}}{=} E_{f(y)}$.

Definición 3.1.7. — Sea X una variedad algebraica, y sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de rangos $\mathrm{rg}(E) = r$ y $\mathrm{rg}(F) = s$. Un **morfismo de fibrados vectoriales** es un morfismo regular $f : E \to F$ tal que:

(1) $q \circ f = p$.



(2) Para todo $x \in X$, la aplicación $f_x : E_x \cong k^r \to F_x \cong k^s$ es k-lineal.

Ejemplo 3.1.8. — Un morfismo entre los fibrados triviales

$$f : X \times k^r \longrightarrow X \times k^s$$

es de la forma $f(x, v) = (x, g(x)v)$, donde $g(x) \in M_{s\times r}(k)$ para todo $x \in X$. Notar que si $s = r$ y si $g(x_0)$ es invertible para cierto $x_0 \in X$, entonces $g(x) \in \mathrm{GL}_r(k)$ para todo $x \in U$, con U una vecindad abierta de x_0.

Definición 3.1.9. — Sea X una variedad algebraica. Denotamos por $\mathbf{Vect}(X)$ a la **categoría de fibrados vectoriales** sobre X. En particular, decimos que dos fibrados vectoriales son isomorfos si existe un isomorfismo de fibrados vectoriales, y en tal caso escribimos $E \cong F$.

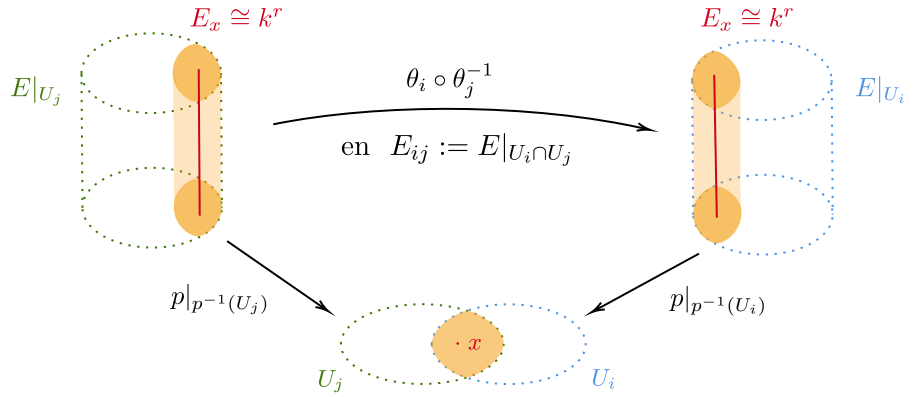
---

[1] *frame*, en inglés.

Ejemplo importante 3.1.10. — Sea $p : E \to X$ un fibrado vectorial y sea $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ un cubrimiento abierto de X tal que cada U_i trivializa E, i.e., $E|_{U_i} \overset{\mathsf{def}}{=} p^{-1}(U_i) \xrightarrow[\theta_i]{\sim} U_i \times \mathbb{A}^r$. Entonces, en cada intersección no-vacía $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ tenemos que:

$$\begin{tikzcd}
 & E|_{U_i\cap U_j} \overset{\mathsf{def}}{=} p^{-1}(U_i\cap U_j) =: E_{ij} \arrow[dl, "\theta_j|_{E_{ij}}"', "\cong"] \arrow[dr, "\theta_i|_{E_{ij}}", "\cong"'] & \\
(U_i \cap U_j)\times \mathbb{A}^r \arrow[rr, "\theta_i \circ \theta_j^{-1}", "\sim"'] & & (U_i \cap U_j)\times \mathbb{A}^r \\
(x,v) \arrow[rr, mapsto] & & (x, g_{ij}(x)v)
\end{tikzcd}$$

donde $g_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_r(k)$ para todo $x \in U_i \cap U_j$, llamadas las **matrices de transición** asociadas a la trivialización.



En particular, las matrices de transición verifican que $g_{ii}(x) = \mathrm{I}_r$ para todo $x \in U_i$ y en la triple intersección $U_i \cap U_j \cap U_k$ se verifica la **condición de cociclo**

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik} \text{ en } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Observación importante 3.1.11. —

(1) Las matrices de transición g_{ij} dependen de ciertas elecciones:

  (i) El cubrimiento abierto. En efecto, podríamos refinar el cubrimiento tomando abiertos más pequeños. En particular, dados finitos fibrados vectoriales, siempre podemos asumir que las matrices de transición están definidas en un cubrimiento abierto común.

  (ii) Las trivializaciones. En efecto, podríamos componer con un isomorfismo

$$U_i \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{A}^r,\ (x,v) \longmapsto (x, h_i(x)v)$$

donde $h_i(x) \in \mathrm{GL}_r(k)$ es invertible para todo $x \in U_i$, y obtendríamos $\widetilde{g}_{ij} = h_i g_{ij} h_i^{-1}$.

(2) Módulo isomorfismo, E *está completamente determinado* por un cubrimiento abierto y por las matrices de transición. En efecto, podemos construir E usando el atlas algebraico obtenido al pegar los $U_i \times \mathbb{A}^r$ usando los isomorfismos

$$\begin{aligned} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r &\xrightarrow{\sim} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^r \\ (x, v) &\longmapsto (x, g_{ij}(x)v) \end{aligned}$$

como cambio de carta para todo $i, j \in I$.

Uno de los casos particulares más importantes es el siguiente.

Ejemplo importante 3.1.12. — Sea $L \xrightarrow{p} X$ un fibrado *en rectas* (i.e., $\mathrm{rg}(L) = 1$). Entonces, la construcción anterior nos dice que L está determinado (módulo isomorfismo) por **funciones de transición** $g_{ij}(x) \in k^*$ para todo $x \in U_i \cap U_j$.

Cabe destacar que si denotamos por $\mathscr{O}_X^*$ al haz de funciones regulares en X que no se anulan, entonces $g_{ij} \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ para todos $i, j \in I$, i.e.,

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow k^*$$

son funciones regulares.

Por ejemplo, para el fibrado tautológico $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ de $\mathbb{P}^n$, tenemos que

$$\theta_j^{-1}(x,t) = \left(x, \left(\tfrac{tx_0}{x_j}, \ldots, \tfrac{tx_n}{x_j}\right)\right) \quad \text{y} \quad \theta_i^{-1}(x,s) = \left(x, \left(\tfrac{sx_0}{x_i}, \ldots, \tfrac{sx_n}{x_i}\right)\right),$$

de donde obtenemos (igualando coordenadas) el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & p^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[dr, "\theta_i", "\cong"'] & \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1 \arrow[ur, "\theta_j^{-1}", "\cong"'] \arrow[rr, "\theta_i \circ \theta_j^{-1}", "\sim"'] & & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^1 \\ (x,t) \arrow[rr, mapsto] & & (x, \tfrac{x_i}{x_j} t) \overset{\mathrm{def}}{=} (x, s) \end{tikzcd}$$

En particular, deducimos que

$$g_{ij}(x) = \frac{x_i}{x_j} \text{ para todo } x \in U_i \cap U_j$$

son las funciones de transición de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$.

Ejercicio 3.1.13. — Sea $V_X \overset{\text{def}}{=} X \times \mathbb{A}^r$ el fibrado trivial de rango r en X. Probar que $g_{ij}(x) = \mathrm{I}_r$ para todos $i, j \in I$ son matrices de transición de V_X. En particular, $g_{ij}(x) \equiv 1$ son funciones de transición del fibrado en rectas trivial $k_X := X \times \mathbb{A}^1$.

Las matrices de transición son muy útiles, pues nos permiten extender a la categoría $\mathbf{Vect}(X)$ muchas de las construcciones de álgebra lineal.

Definición 3.1.14. — Sea X una variedad algebraica, y sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de rangos $\mathrm{rg}(E) = r$ y $\mathrm{rg}(F) = s$, dados por matrices de transición $g_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_r(k)$ y $h_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_s(k)$, respectivamente (en un cubrimiento abierto común). Definimos:

(1) La **suma directa** $E \oplus F$, con $\mathrm{rg}(E \oplus F) = r + s$, mediante las matrices de transición
$$\begin{pmatrix} g_{ij}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_{ij}(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{r+s}(k).$$
(2) El **producto tensorial** $E \otimes F$, con $\mathrm{rg}(E \otimes F) = rs$, mediante las matrices de transición $g_{ij}(x) \otimes h_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_{rs}(k)$.
(3) El **dual** $E^\vee$, con $\mathrm{rg}(E^\vee) = r$, mediante las matrices de transición $g_{ij}^\vee := ({}^{\mathrm{t}}g_{ij}{}^{-1})(x) \in \mathrm{GL}_r(k)$.
(4) El fibrado $\mathbf{Hom}(E, F) := E^\vee \otimes F$, con $\mathrm{rg}(\mathbf{Hom}(E, F)) = rs$.
(5) Para $d \in \mathbb{N}$, la **potencia simétrica** $S^d E$, con $\mathrm{rg}(S^d E) = \binom{r+d-1}{d}$, mediante las matrices de transición $S^d g_{ij}(x)$.
(6) Para $d \in \{0, \dots, r\}$, la **potencia exterior** $\Lambda^d E$, con $\mathrm{rg}(\Lambda^d E) = \binom{r}{d}$, mediante las matrices de transición $\Lambda^d g_{ij}(x)$.
(7) Dada una representación de grado $d \geq 1$
$$\rho : \mathrm{GL}_r(k) \longrightarrow \mathrm{GL}_d(k),$$
definimos el fibrado E_ρ, con $\mathrm{rg}(E_\rho) = d$, mediante las matrices de transición $\rho(g_{ij}(x)) \in \mathrm{GL}_d(k)$. En particular,
$$\det : \mathrm{GL}_r(k) \longrightarrow k^*$$
determina un *fibrado en rectas* $\det(E)$, con funciones de transición $\det(g_{ij}(x))$. Más aún, $\det(E) \cong \Lambda^r E$.

Ejemplo importante 3.1.15. — Un caso particular muy importante es el de fibrados *en rectas* $L \to X$ y $M \to X$, dados por funciones de transición g_{ij} y h_{ij}, respectivamente. Entonces:

(1) Las funciones $k_{ij} := g_{ij}h_{ij} = h_{ij}g_{ij}$ satisfacen la condición de cociclo, y definen

$$L \otimes M \cong M \otimes L$$

fibrado en rectas.

(2) El fibrado en rectas trivial $k_X \overset{\mathsf{def}}{=} X \times \mathbb{A}^1$, con funciones de transición $k_{ij} = 1$, verifica

$$k_X \otimes L \cong L \otimes k_X \cong L.$$

(3) El dual $L^\vee$, con funciones de transición $g_{ij}^\vee \overset{\mathsf{def}}{=} 1/g_{ij}$, verifica

$$L \otimes L^\vee \cong L^\vee \otimes L \cong k_X.$$

El ejemplo anterior nos permite dar la siguiente definición, fundamental en geometría algebraica.

Definición 3.1.16. — Sea X una variedad algebraica. Definimos el **grupo de Picard** de X como el grupo abeliano

$$\mathrm{Pic}(X) := \{\text{Fibrados en rectas en } X\}/\cong.$$

Ejemplo 3.1.17. — En $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$, definimos $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^\vee$ mediante las funciones de transición $g_{ij} = \frac{x_j}{x_i}$. Más generalmente, para todo $d \in \mathbb{Z}$ definimos el fibrado

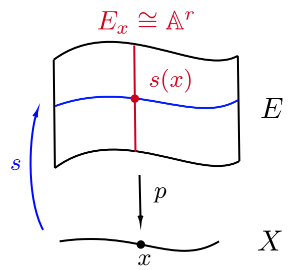
$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \text{ mediante las funciones de transición } g_{ij}(x) = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d.$$

3.2. Secciones y haces localmente libres

Definición 3.2.1. — Sea X una variedad algebraica y sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial de rango r. Una **sección regular** (o símplemente **sección**) de E es un morfismo regular

$$s : X \longrightarrow E,\ x \longmapsto s(x)$$

tal que $p \circ s = \mathrm{Id}_X$, i.e., $s(x) \in E_x \cong k^r$ para todo $x \in X$.



¡Atención! — El conjunto de **secciones globales** de E, dado por

$$\Gamma(X,E) := \mathrm{H}^0(X,E) := \{s : X \to E \text{ sección de } E \xrightarrow{p} X\},$$

es un $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$-módulo. En efecto, si $s,t \in \mathrm{H}^0(X,E)$ y $\lambda \in \Gamma(X,\mathscr{O}_X) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_X(X)$ entonces definimos

$$(s+t)(x) := s(x) + t(x) \quad \text{ y } \quad (\lambda s)(x) := \lambda(x)s(x).$$

En particular, $\mathrm{H}^0(X,E)$ es un k-espacio vectorial.

Observación importante 3.2.2. — En términos de trivializaciones y matrices de transición, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E|_{U_i} \overset{\mathsf{def}}{=} p^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\sim", "\theta_i"'] \arrow[dr, "p"] & & U_i \times \mathbb{A}^r \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \\
& U_i \arrow[ul, bend left, "s|_{U_i}"] \arrow[ur, bend right, "\sigma_i := \theta_i \circ s|_{U_i}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\sigma_i(x) = (x, s_i(x))$ para todo $x \in U_i$, con

$$s_i(x) = (s_{i,1}(x), \ldots, s_{i,r}(x)) \in \mathscr{O}_X(U_i)^{\oplus r}.$$

Más aún, en la intersección $U_i \cap U_j$ tenemos que

$$\begin{tikzcd}
(x, s_j(x)) \arrow[rr, bend right, "g_{ij}(x)"'] & s(x) \arrow[l, "\theta_j"'] \arrow[r, "\theta_i"] & (x, s_i(x))
\end{tikzcd}$$

de donde deducimos que

$$s_i(x) = g_{ij}(x)s_j(x) \text{ para todo } x \in U_i \cap U_j.$$

Veamos algunos ejemplos explícitos.

Ejemplo 3.2.3. —

(1) Sea $L \cong X \times \mathbb{A}^1$ el fibrado en rectas trivial en X, con $g_{ij} = 1$. Entonces, $\mathrm{H}^0(X,L) \cong \Gamma(X,\mathscr{O}_X)$ se identifica a las secciones globales de $\mathscr{O}_X$.

(2) De manera similar, si $E \cong X \times \mathbb{A}^r$ es el fibrado trivial de rango r, entonces $\mathrm{H}^0(X,E) \cong \Gamma(X,\mathscr{O}_X)^{\oplus r}$.

Ejercicio 3.2.4. — Sea $f : Y \to X$ un morfismo regular entre variedades algebraicas, y sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial. Probar que

$$\begin{aligned}
\Gamma(f) : \mathrm{H}^0(X,E) \longrightarrow \mathrm{H}^0(Y, f^*E),\ s \longmapsto & \Gamma(f)(s) \\
& y \mapsto (\Gamma(f)(s))(y) := (y, s(f(y)))
\end{aligned}$$

está bien definida y es k-lineal.

Ejemplo importante 3.2.5. — Sea $d \in \mathbb{Z}$ y consideremos el fibrado en rectas $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, definido en $\mathbb{P}^n$ por las funciones de transición $g_{ij}(x) = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d$.

Para determinar $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, consideremos $s_i \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i)$ una función regular en $U_i \overset{\mathsf{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$, el abierto estándar de $\mathbb{P}^n$ con coordenadas $\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}$. Así,

$$s_i = \frac{P_i}{x_i^{m_i}} \text{ donde } P_i \text{ es un polinomio homogéneo de grado } m_i.$$

Luego, $s_i = g_{ij} s_j$ en $U_i \cap U_j$ si y sólamente si

$$\frac{P_i}{x_i^{m_i}} = \frac{x_j^d P_j}{x_i^d x_j^{m_j}}, \text{ i.e., } P_i x_i^{d-m_i} = P_j x_j^{d-m_j}.$$

Luego, si $d \geq 0$ entonces $P := P_i x_i^{d-m_i}$ es un polinomio homogéneo de grado d que verifica $s_i = \frac{P}{x_i^d}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$. Luego, hay un isomorfismo

$$k[x_0, \ldots, x_n]_d \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)), \; P \longmapsto \left\{ s_i = \frac{P}{x_i^d} \right\}_{i=0,\ldots,n}$$

entre los polinomios homogéneos de grado $d \geq 0$ y las secciones globales del fibrado en rectas $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Del mismo modo, $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \{0\}$ si $d < 0$.

Observación 3.2.6. — Sean $E \to X$ y $F \to X$ fibrados vectoriales, dados por matrices de transición g_{ij} y h_{ij}, respectivamente. Dadas $s \in \mathrm{H}^0(X, E)$ y $t \in \mathrm{H}^0(X, F)$ secciones globales, definidas respectivamente por las relaciones $s_i = g_{ij} s_j$ y $t_i = h_{ij} t_j$, entonces tenemos que

$$s_i \otimes t_i = (g_{ij} s_j) \otimes (h_{ij} t_j) \overset{\mathsf{def}}{=} (g_{ij} \otimes h_{ij})(s_j \otimes t_j),$$

por lo que obtenemos una sección $s \otimes t \in \mathrm{H}^0(X, E \otimes F)$.

Es importante destacar que en general la aplicación $(s, t) \mapsto s \otimes t$ no es inyectiva ni sobreyectiva. Por ejemplo, si $X = \mathbb{P}^n$ y consideramos $E = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ y $F = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, entonces $E \otimes F \cong k_X$ es el fibrado en rectas trivial. En particular,

$$\mathrm{H}^0(X, E \otimes F) \cong \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k \neq \mathrm{H}^0(X, E) \otimes_k \mathrm{H}^0(X, F) = \{0\}.$$

Ejercicio 3.2.7. — Sean $E \to X$ y $F \to Y$ fibrados vectoriales. Probar la **fórmula de Künneth**

$$\mathrm{H}^0(X, E) \otimes_k \mathrm{H}^0(Y, F) \cong \mathrm{H}^0(X \times Y, E \boxtimes F),$$

donde $E \boxtimes F := \mathrm{pr}_X^*(E) \otimes \mathrm{pr}_Y^*(F)$ es el *producto tensorial exterior* de E y F.

Ejemplo importante 3.2.8. — Un fibrado en rectas $L \to X$ es *trivial* (i.e., $L \cong k_X \overset{\mathsf{def}}{=} X \times \mathbb{A}^1$) si y sólo si existe una sección global $s \in \mathrm{H}^0(X, L)$ *que no se anula nunca*, i.e., $s(x) \neq 0$ en $L_x \cong k$ para todo $x \in X$.

En efecto, en tal caso podemos producir un isomorfismo

$$\begin{tikzcd} (x,t) \arrow[rr, mapsto] & & ts(x) \\[-20pt] X \times \mathbb{A}^1 \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & L \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

que permite trivializar L *globalmente*.

Un caso particular importante es el de una variedad algebraica irreducible tal que $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k$ (e.g. si suponemos que además X es proyectiva). En tal caso, si $L \to X$ es un fibrado en rectas tal que

(1) Existe $s \in \mathrm{H}^0(X, L) \setminus \{0\}$ sección no-nula (i.e., existe $x_0 \in X$ tal que $s(x_0) \neq 0$).
(2) Existe $t \in \mathrm{H}^0(X, L^\vee) \setminus \{0\}$ sección no-nula (i.e., existe $x_1 \in X$ tal que $t(x_1) \neq 0$).

Entonces, $L \cong k_X$ es el fibrado en rectas trivial.

En efecto, el producto de secciones

$$\mathrm{H}^0(X, L) \otimes_k \mathrm{H}^0(X, L^\vee) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, L \otimes L^\vee) \cong \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k$$

define $\sigma(x) := s(x) \otimes t(x) \overset{\mathsf{def}}{=} s(x)t(x)$ sección *constante*. Más aún, $\sigma \neq 0$ en el abierto donde $s(x) \neq 0$ y $t(x) \neq 0$. Así, σ es una sección constante globalmente no-nula, de donde deducimos que s y t no se anulan nunca, y por ende L es el fibrado en rectas trivial.

Construcción 3.2.9. — Sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial de rango r. Definimos el **haz de secciones** de E de la manera siguiente:

Para cada $U \subseteq X$ abierto no-vacío, definimos

$$\mathscr{E}(U) := \mathrm{H}^0(U, E|_U) \overset{\mathsf{def}}{=} \{s : U \to E|_U \text{ morfismo regular tal que } p \circ s = \mathrm{Id}_U\}.$$

Dado que $\mathscr{E}(U)$ es un $\Gamma(U, \mathscr{O}_U) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_X(U)$-módulo, tenemos que el haz $\mathscr{E}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo. Más aún, las trivializaciones

$$\theta_i : E|_{U_i} \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{A}^r$$

inducen isomorfismos de $\mathscr{O}_{U_i}$-módulos $\mathscr{E}|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i}^{\oplus r}$, i.e., $\mathscr{E}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo *localmente libre* de rango r (cf. Observación 1.4.10). En particular, si $L \to X$ es un fibrado en rectas, entonces su haz de secciones $\mathscr{L}$ es un *haz invertible*.

Recíprocamente, dado un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre de rango r, y un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ tal que

$$\varphi_i : \mathscr{E}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{U_i}^{\oplus r}$$

es un isomorfismo de $\mathscr{O}_{U_i}$-módulos, entonces en la intersección $U_i \cap U_j$ tenemos que

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{U_i \cap U_j}^{\oplus r} = (\mathscr{O}_{U_j}^{\oplus r})|_{U_i \cap U_j} \arrow[r, "\varphi_j^{-1}", "\sim"'] \arrow[rr, bend right, "g_{ij}"'] & \mathscr{E}|_{U_i \cap U_j} \arrow[r, "\varphi_i", "\sim"'] & (\mathscr{O}_{U_i}^{\oplus r})|_{U_i \cap U_j} = \mathscr{O}_{U_i \cap U_j}^{\oplus r} \end{tikzcd}$$

donde las $g_{ij} \in \mathrm{GL}_r(\mathscr{O}_{U_i \cap U_j})$ verifican la condición de cociclo $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$ (pues $g_{ij} \overset{\mathsf{def}}{=} \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$). Así, podemos definir un fibrado vectorial $E \to X$ a partir de las matrices de transición $g_{ij}(x)$, y por construcción el haz de secciones de dicho fibrado E es isomorfo a $\mathscr{E}$.

Resumiendo la discusión anterior, tenemos el siguiente resultado.

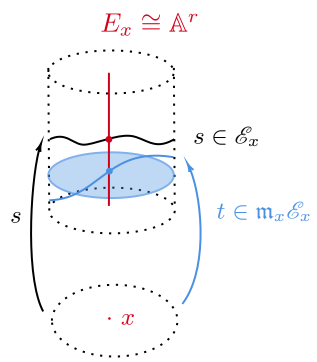
Teorema 3.2.10. — *Sea X una variedad algebraica* conexa *(e.g. irreducible). Entonces, la aplicación*

$$E \longmapsto \mathscr{E}$$

define (módulo isomorfismos) una equivalencia entre la categoría $\mathbf{Vect}(X)$ *de fibrados vectoriales en X y la categoría de $\mathscr{O}_X$-módulos localmente libres. En particular, fibrados en rectas $L \to X$ están en correspondencia con haces invertibles $\mathscr{L}$ en X.*

La siguiente observación útil permite comparar la *fibra* de un fibrado vectorial y el *tallo* de su haz de secciones.

Observación importante 3.2.11. — Sea $E \to X$ un fibrado vectorial, y sea $\mathscr{E}$ el haz de secciones asociado.



Para cada $x \in X$, denotamos por $\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x$ al sub-módulo de $\mathscr{E}_x$ formado por gérmenes de secciones que se anulan en $x \in X$. Entonces, tenemos una aplicación k-lineal sobreyectiva

$$\mathrm{ev}_x : \mathscr{E}_x \twoheadrightarrow E_x,\ s \longmapsto s(x)$$

con $\ker(\mathrm{ev}_x) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x$, de donde deducimos que

$$\mathscr{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x \cong E_x$$

para todo $x \in X$.

Notación 3.2.12. — Sea X una variedad algebraica y $k_X \cong X \times \mathbb{A}^1$ el fibrado en rectas trivial. Dado que el haz de secciones asociado a k_X está dado *exactamente* por el haz estructural $\mathscr{O}_X$, es que usualmente denotaremos por $\mathscr{O}_X$ al fibrado en rectas trivial en X.

3.3. Sistemas lineales y amplitud

Durante toda esta sección, consideraremos X una variedad algebraica y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrado en rectas en X, definido en un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ por funciones de transición $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$.

Construcción 3.3.1. — Sean $s_0, \dots, s_n \in \mathrm{H}^0(X, L) \setminus \{0\}$ secciones globales no-nulas, donde cada s_j está definida por funciones regulares $s_{j,i} \in \mathscr{O}_X(U_i)$ en U_i. Así, para cada $x \in U_i$ definimos la aplicación racional

$$\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n,\ x \longmapsto [s_{0,i}(x), \dots, s_{n,i}(x)]$$

Además, notamos que la definición de φ_L es *independiente* del abierto U_i escogido, pues al pasar de U_i a U_j cada coordenada de $\varphi_L(x)$ se multiplica por el mismo factor no-nulo $g_{ji}(x)$. Luego, escribimos símplemente

$$\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n,\ x \longmapsto [s_0(x), \dots, s_n(x)],$$

que está bien definida fuera del cerrado

$$Z = \{x \in X \text{ tal que } s_i(x) = 0 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\} \subseteq X.$$

Un caso particular importante es cuando $s_0, \dots, s_n$ **no** tienen ceros comunes (i.e., $Z = \emptyset$), y por lo tanto

$$\varphi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

es un *morfismo regular*. Más aún, en este caso tenemos que $\varphi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$.

En efecto, basta notar que por definición de pullback de fibrados vectoriales (ver Observación 3.1.6) se tiene que $\varphi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong L^\vee$. Para esto último, notamos que el fibrado $\varphi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ está determinado por los abiertos

$$X_i := \varphi_L^{-1}(U_i) \overset{\mathsf{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } s_i(x) \neq 0\},$$

donde $U_i \overset{\mathsf{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$. Además, dado que

$$\varphi_L(x) = \left[\frac{s_0(x)}{s_j(x)}, \ldots, \frac{s_n(x)}{s_j(x)}\right] \text{ para todo } x \in X_j,$$

las funciones de transición h_{ij} de $\varphi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ están dadas por

$$h_{ij}(x) = \frac{s_j(x)}{s_i(x)} \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{s_j(x)}{g_{ij}(x)s_j(x)} = \frac{1}{g_{ij}(x)} \overset{\mathsf{def}}{=} g_{ji}(x),$$

i.e., $\varphi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong L^\vee$.

Recíprocamente, dado un morfismo regular

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n,\ x \longmapsto [f_0(x), \ldots, f_n(x)]$$

consideramos $L := f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, junto con la aplicación k-lineal

$$\Gamma(f) : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, L),\ x_i \longmapsto \Gamma(f)(x_i) =: s_i$$

Luego, $f = \varphi_L$ ya que $s_j(x) \overset{\mathsf{def}}{=} (x_j \circ f)(x) \overset{\mathsf{def}}{=} f_j(x)$ para todo $j \in \{0, \ldots, n\}$.

Resumiendo la discusión anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.2. — *Sea X una variedad algebraica. Entonces, tenemos una biyección*

$$\left\{\begin{array}{c} f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ \text{morfismo regular} \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} L \in \operatorname{Pic}(X) \text{ junto con secciones} \\ s_0, \ldots, s_n \in \mathrm{H}^0(X, L) \text{ sin ceros comunes} \end{array}\right\}$$

$$f \longmapsto L := f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \text{ y } s_i := \Gamma(f)(x_i)$$

$$f := \varphi_L \longleftarrow (L,\ (s_0, \ldots, s_n))$$

Lo anterior, motiva la siguiente definición.

Definición 3.3.3. — Sea $L \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas en X. Un **sistema lineal** M en X es un sub-espacio vectorial $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ de *dimensión finita*. En particular, si $\dim_k \mathrm{H}^0(X, L) < +\infty$ decimos que el sistema lineal $\mathrm{H}^0(X, L)$ es un **sistema lineal completo**.

Notación 3.3.4. — Dado un sistema lineal $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$, denotamos por

$$|M| := \mathbb{P}(M^\vee) \overset{\mathsf{def}}{=} \{\text{hiperplanos en } M\}$$

el espacio proyectivo *dual*[2] de M. Con esta notación, podemos formular una versión sin coordenadas del Teorema anterior:

Dado un sistema lineal $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$, definimos la aplicación racional

$$\varphi_M : X \dashrightarrow |M| \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{P}(M^\vee), \; x \longmapsto M_x := \{s \in M \text{ tal que } s(x) = 0_{L_x}\}.$$

Luego, φ_M está definida en $x \in X$ (i.e., M_x es un hiperplano en M) si y sólo si existe $s \in M$ tal que $s(x) \neq 0$. Más aún, si $s_0, \dots, s_n$ es una base de M y escribimos $s = \sum_{i=0}^n \lambda_i s_i$, entonces el hiperplano $M_x \in |M|$ está dado por la ecuación

$$\lambda_0 s_0(x) + \cdots + \lambda_n s_n(x) = 0$$

y corresponde al punto $[s_0(x), \dots, s_n(x)] \in |M| \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{P}(M^\vee) \cong \mathbb{P}^n$, i.e.,

$$\varphi_M : X \dashrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^n, \; x \longmapsto [s_0(x), \dots, s_n(x)]$$

en coordenadas.

Definición 3.3.5. — Sea $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ un sistema lineal. Definimos el **lugar de base** de M mediante

$$\mathrm{Bs}(M) := \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0 \text{ para todo } s \in M\}.$$

Decimos que M es **libre de puntos de base** (o **globalmente generado**[3]) si $\mathrm{Bs}(M) = \emptyset$, i.e.,

$$\varphi_M : X \longrightarrow |M| \overset{\mathsf{def}}{=} \mathbb{P}(M^\vee)$$

es un morfismo regular. Equivalentemente, el morfismo de evaluación

$$\mathrm{ev} : X \times M \twoheadrightarrow L, \; (x, s) \longmapsto s(x)$$

es *sobreyectivo*. En particular, tenemos una biyección

$$\left\{ \begin{array}{c} f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n \\ \text{morfismo regular} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} L \in \mathrm{Pic}(X) \text{ junto con } M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L) \text{ sistema} \\ \text{lineal de } \dim_k(M) = n+1 \text{ sin puntos de base} \end{array} \right\}$$

Ejemplo 3.3.6. —

[2] En *Éléments de géométrie algébrique*, Grothendieck usa la convención dual a la que usamos nosotros. Más precisamente, si $V \cong k^n$ es un k-espacio vectorial entonces Grothendieck usa la notación $\mathbb{P}(V)$ para referirse a nuestro $\mathbb{P}(V^\vee) \cong \mathrm{Gr}(n-1, V)$.

[3] En inglés, *base point free* o bien *globally generated*.

(1) En terminología clásica, si $\dim_k(M) = 2$ (i.e., $|M| \cong \mathbb{P}^1$) entonces se dice que
$$f : X \dashrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^1$$
es un **pincel** de hipersuperficies en X.

(2) Las inclusiones $M \subseteq N \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ inducen aplicaciones racionales
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\varphi_N"] \arrow[dr, dashed, "\varphi_M"'] & \mathbb{P}(N^\vee) \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ & \mathbb{P}(M^\vee) \end{tikzcd}$$
donde π es la proyección lineal inducida por $N^\vee \twoheadrightarrow M^\vee$. En coordenadas, si $s_0, \dots, s_n$ es una base de N tal que $s_0, \dots, s_m$ es una base de $M \subseteq N$, entonces
$$\pi([s_0, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n]) = [s_0, \dots, s_m].$$
Típicamente, puede ocurrir que $\mathrm{H}^0(X, L)$ no tenga puntos de base, pero $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ **si** tenga puntos de base.

(3) Sea $X = \mathbb{P}^n$ y $L = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ con $d \geq 1$. Entonces,
$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong k[x_0, \dots, x_n]_d$$
es isomorfo al espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado d. Luego,
$$\varphi_L \overset{\text{def}}{=} \nu_d : \mathbb{P}^d \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))^\vee) \cong \mathbb{P}^N$$
coincide con el incrustamiento de Veronese (ver Ejemplo 2.7.20), donde $N = \binom{n+d}{d} - 1$. En particular, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ es globalmente generado.

(4) En $\mathbb{P}^2$, consideramos $M := \mathrm{Vect}_k\langle yz, xz, xy\rangle \subseteq \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(2))$ sistema lineal. Entonces,
$$\varphi_M : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2,\ [x, y, z] \longmapsto [yz, xz, xy]$$
es la involución de Cremona (ver Ejemplo 2.9.9).

(5) Sea $\varphi : \mathrm{Gr}(r, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^r V) \cong \mathbb{P}^N$ el incrustamiento de Plücker, con $N = \binom{n}{r} - 1$. Entonces, denotamos por
$$\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(r,V)}(1) := \varphi^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$$
al fibrado en rectas globalmente generado inducido por φ.

(6) Más generalmente, si $X \xhookrightarrow{f} \mathbb{P}^n$ es un incrustamiento cerrado, entonces denotamos
$$\mathscr{O}_X(1) := f^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X.$$

Cabe destacar que hay un abuso en dicha notación, pues $\mathscr{O}_X(1)$ <u>depende</u> del incrustamiento f.

Ejercicio 3.3.7. — Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. En $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, definimos

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(a, b) := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^m}(b) \in \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m).$$

Probar que el sistema lineal completo definido por $L = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(1, 1)$ induce un morfismo regular

$$\varphi_L : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow |L| \cong \mathbb{P}^N$$

que coincide con la incrustación de Segre.

Con la terminología anterior, podemos responder a una de las preguntas motivacionales de este capítulo:

Dado un sistema lineal libre de puntos de base $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$, ¿cuándo $\varphi_M : X \longrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^n$ es un *incrustamiento cerrado*?

Para responder lo anterior, necesitamos el siguiente resultado clásico de álgebra conmutativa.

***Recuerdo 3.3.8* (Lema de Nakayama).** — Sea $(A, \mathfrak{m})$ anillo local con cuerpo residual $A/\mathfrak{m} \cong k$, y sea M un A-módulo finitamente generado.

> Si $u_1, \ldots, u_m \in M$ son elementos tales que sus imágenes $[u_1], \ldots, [u_m] \in M/\mathfrak{m}M$ son generadores de dicho $k \cong A/\mathfrak{m}$-espacio vectorial cociente, entonces $u_1, \ldots, u_m$ generan M como A-módulo.

En particular, si A es noetheriano y $M = \mathfrak{m}$, entonces podemos identificar generadores de $\mathfrak{m}$ al mirar sus imagenes en el cociente $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Teorema 3.3.9. — *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo* finito *entre variedades algebraicas. Supongamos que:*

(1) f **separa puntos***, i.e., f es inyectivo.*
(2) f **separa tangentes***, i.e., el diferencial*

$$d_x f : T_x X \hookrightarrow T_{f(x)} Y$$

es inyectivo para todo $x \in X$.

Entonces, f es un incrustamiento cerrado (i.e., $X \cong f(X) \xhookrightarrow{\text{cerrado}} Y$).

Demostración. — Reemplazando Y por $f(X)$, podemos suponer que f es biyectivo. Sea $g := f^{-1} : Y \to X$ función continua (dado que f es un morfismo cerrado, al ser un morfismo finito) y veamos que g es *regular*:

Dado que ser regular es una propiedad local, podemos suponer que X e Y son variedades algebraicas afines. Notemos que basta probar que el pullback

$$f^* : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X)$$

es un isomorfismo, donde la inyectividad está garantizada por el hecho que f es dominante. En efecto, si $\mathrm{Im}(f^*) = \mathscr{O}(X)$ entonces

$$\mathscr{O}(Y) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathscr{O}(Y)}) = \mathrm{Im}(g^* \circ f^*) = (g^*)(\mathscr{O}(X)),$$

de donde se deduce que $(g^*)(\mathscr{O}(X)) \subseteq \mathscr{O}(Y)$, y por ende que g es un morfismo regular. Veamos que $\mathrm{Im}(f^*) = \mathscr{O}(X)$:

Dado que f *separa tangentes*, tenemos que el dual del diferencial

$$f^* : \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$$

es una aplicación k-lineal *sobreyectiva*, donde $y := f(x)$. Luego, si $u_1, \ldots, u_m \in \mathfrak{m}_y$ son generadores, entonces las imágenes $[f^*(u_1)], \ldots, [f^*(u_m)]$ son generadores de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Por lo tanto, el Lema de Nakayama implica que $f^*(u_1), \ldots, f^*(u_m)$ generan $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathscr{O}_{X,x}$, i.e., $\mathfrak{m}_x = \langle f^*(\mathfrak{m}_y) \rangle \subseteq \mathscr{O}_{X,x}$.

Por otro lado, el hecho que f es un morfismo *finito* implica que $\mathscr{O}_{X,x}$ es un $\mathscr{O}_{Y,y}$-módulo finitamente generado (vía f^*). Así, dado que [1] es un generador de $\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$ y dado que

$$f^* : \mathscr{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{X,x}/\langle f^*(\mathfrak{m}_y) \rangle = \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$$

es sobreyectivo, tenemos gracias al Lema de Nayakama que 1 genera $\mathscr{O}_{X,x}$ como $\mathscr{O}_{Y,y}$-módulo vía f^*, i.e., $\mathscr{O}_{X,x} = f^*\mathscr{O}_{Y,f(x)}$ para todo $x \in X$.

Así, f determina un isomorfismo a nivel de tallos y luego un isomorfismo de haces. En particular, $\mathscr{O}(X) = \mathrm{Im}(f^*)$. $\square$

Observación importante 3.3.10. — Una consecuencia directa de lo anterior es que todo morfismo $f : X \to Y$ finito *étale* biyectivo es un isomorfismo. En general, el **grupo fundamental étale** $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ permite clasificar los posibles morfismos étale $Y \to X$. Para más detalles, así como conexiones con el grupo fundamental topológico en el caso en que $k = \mathbb{C}$, ver [**Mil13**].

En el contexto de sistemas lineales, tenemos la siguiente consecuencia. Aquí, usaremos una consecuencia del *Teorema de Grauert-Grothendieck* que probaremos en el siguiente capítulo usando técnicas de cohomología:

> Si $f : X \to Y$ es un morfismo regular cuyas fibras $f^{-1}(y)$ son conjuntos finitos (e.g. f inyectivo) y X es una variedad proyectiva, entonces f es un *morfismo finito.*

Corolario 3.3.11. — *Sea X una variedad algebraica proyectiva y sea $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ un sistema lineal. Entonces,*

$$\varphi_M : X \hookrightarrow |M| \cong \mathbb{P}(M^\vee)$$

es un incrustamiento cerrado si y sólo si

(1) *M* **separa puntos***, i.e., para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe una sección $s \in M$ tal que $s(x) = 0$ y $s(y) \neq 0$. En particular, M es libre de puntos de base.*

(2) *M* **separa tangentes***, i.e., para todo $x \in X$ y todo vector tangente $v \in T_x X$ existe una sección $s \in M$ tal que $s(x) = 0$ y $(d_x s)(v) \neq 0$.*

Demostración. — La condición (1) asegura que φ_M es un morfismo regular inyectivo. Luego, dado que X es una variedad proyectiva, tenemos gracias al *Teorema de Grauert-Grothendieck* que φ_M es un morfismo finito. Así, el Teorema anterior nos reduce a verificar que la condición (2) es equivalente a que φ_M separe tangentes, i.e., que $d_x\varphi_M$ es inyectiva para todo $x \in X$:

Sea $x_0 \in X$ fijo, y sea $s_0, \ldots, s_n$ una base de secciones de M tales que $s_0(x_0) \neq 0$ y $s_i(x_0) = 0$ para todo $i > 0$, i.e.,

$$\varphi_M(x_0) = [1, 0, \ldots, 0].$$

Luego, para todo x en el abierto

$$X_{s_0} := \{x \in X \text{ tal que } s_0(x) \neq 0\}$$

se tiene que

$$\varphi_M(x) \overset{\mathsf{def}}{=} \left[1, \frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \ldots, \frac{s_n(x)}{s_0(x)}\right] \in U_0 \overset{\mathsf{def}}{=} \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n.$$

Así, obtenemos por restricción

$$\varphi_M : X_{s_0} \longrightarrow \mathbb{A}^n, \ x \longmapsto \left(\frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \ldots, \frac{s_n(x)}{s_0(x)}\right),$$

y nos reducimos a analizar el diferencial

$$d_{x_0}\varphi_M : T_{x_0}X \cong T_{x_0}X_{s_0} \longrightarrow T_{\varphi_M(x_0)}\mathbb{A}^n, \ v \longmapsto (d_{x_0}\varphi_M)(v).$$

Para ello, notamos que para $j > 0$ la relación $s_i = g_{ij}s_j$ y el hecho que $s_j(x_0) = 0$ implican que

$$(d_{x_0}s_i)(v) = g_{ij}(x_0)(d_{x_0}s_j)(v) + (d_{x_0}g_{ij})(v) \cdot s_j(x_0) = g_{ij}(x_0)(d_{x_0}s_j)(v),$$

i.e., $(d_{x_0}s_i)(v)$ está bien definido. Luego, la regla de Leibniz implica que

$$(d_{x_0}\varphi_M)(v) = \left(\frac{(d_{x_0}s_1)(v)}{s_0(x_0)}, \ldots, \frac{(d_{x_0}s_n)(v)}{s_0(x_0)}\right),$$

de donde deducimos que $d_{x_0}\varphi_M$ es inyectivo si y sólo si el sistema lineal M separa tangentes (i.e., (2)). $\square$

Utilizando el lenguaje de sistemas lineales, podemos obtener la siguiente generalización del Teorema de Bertini (ver Teorema 2.14.11).

***Teorema 3.3.12* (Bertini).** — *Supongamos que* car$(k) = 0$*. Sea X una variedad algebraica* suave *e irreducible, y sea $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ un sistema lineal* libre de puntos de base*. Entonces, para $s \in M$ sección* general*, la variedad*

$$V(s) := \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0\} \subseteq X$$

es suave.

Demostración. — Consideremos la *variedad de incidencia*

$$I := \{(s, x) \in M \times X \text{ tal que } s(x) = 0\}.$$

Dado que M es libre de puntos de base, la fibra de la segunda proyección

$$\mathrm{pr}_2^{-1}(x) \overset{\mathsf{def}}{=} M_x \in |M| \cong \mathbb{P}^n$$

es un hiperplano $\mathrm{pr}_2^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ para todo $x \in X$. Además, el hecho que el fibrado en rectas L es localmente trivial en un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ se traduce en que $\mathrm{pr}_2 : I \to X$ es una fibración en espacios proyectivos localmente trivial, i.e.,

$$\mathrm{pr}_2^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{P}^{n-1} \text{ para todo } i \in I.$$

En particular, I es una variedad algebraica suave. Luego, el Teorema de suavidad genérica aplicado a la primera proyección $\mathrm{pr}_1 : I \to M$, implica que la fibra $\mathrm{pr}^{-1}(s) \overset{\mathsf{def}}{=} V(s)$ es suave para $s \in M \cong \mathbb{A}^{n+1}$ sección general. $\square$

Ejemplo 3.3.13. — Sea $X \overset{f}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ variedad algebraica proyectiva *suave* e irreducible, de $\dim(X) \geq 1$. Si consideramos el pullback

$$L = f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) := \mathscr{O}_X(1),$$

entonces la restricción de secciones define un sistema lineal

$$M := \mathrm{Im}\Big(\Gamma(f) : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cong k^{n+1} \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, L),\ s \longmapsto s|_X\Big)$$

que, por construcción, no posee puntos de base. Más aún,

$$V(s) \overset{\mathsf{def}}{=} X \cap H_s \text{ es una sección hiperplana.}$$

Así, el Teorema anterior implica que $X \cap H_s$ es suave para $s \in M$ sección general (cf. Teorema 2.14.11).

En Geometría Algebraica, el término *positividad* suele asociarse al estudio de sistemas lineales "con muchas secciones, donde la referencia tradicional para este tipo de problemáticas es [**Laz04a, Laz04b**]. Veamos a continuación algunas nociones fundamentales:

Definición 3.3.14. — Sea X una variedad algebraica y $L \in \operatorname{Pic}(X)$ un fibrado en rectas tal que $\dim_k \mathrm{H}^0(X, L) < +\infty$, con

$$\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(X, L)^\vee)$$

la aplicación racional asociada. Decimos que L es:

(1) **globalmente generado** (o libre de puntos de base) si la aplicación racional φ_L es un morfismo regular, i.e., si el conjunto

$$\operatorname{Bs}(L) := \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0 \text{ para todo } s \in \mathrm{H}^0(X, L)\}$$

es vacío.

(2) **semi-amplio** si $L^{\otimes m}$ es globalmente generado para cierto $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

(3) **muy amplio** si $\varphi_L : X \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(X, L)^\vee)$ es un incrustamiento cerrado, i.e., si L separa puntos y tangentes.

(4) **amplio** si $L^{\otimes m}$ es muy amplio para cierto $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

En particular, una variedad algebraica X es *proyectiva* si y sólo si existe $L \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas *amplio*.

Ejercicio 3.3.15. — Sean $L, M \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrados en recta en una variedad algebraica X. Probar que si L es muy amplio y M es globalmente generado, entonces $L \otimes M$ es muy amplio.

La siguiente definición fue introducida por Shigeru Iitaka en su tesis doctoral en el año 1970.

Definición 3.3.16. — Sea X una variedad algebraica y $L \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas tal que $\dim_k \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m}) < +\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Definimos la **dimensión de Iitaka** de L mediante

$$\kappa(L) = \begin{cases} \max\limits_{m \in \mathbb{N}^{\geq 1}} \dim\left(\overline{\varphi_{L^{\otimes m}}(X)}\right) & \text{si existe } m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m_0}) \neq \{0\} \\ -\infty & \text{si } \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m}) = \{0\} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \end{cases}$$

Luego, $\kappa(L) \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, \dim(X)\}$. Más aún, decimos que L es **big** si tiene dimensión de Iitaka maximal, i.e., $\kappa(L) = \dim(X)$.

Ejercicio 3.3.17. — Sea X una variedad algebraica y $L \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas tal que $\dim_k \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m}) < +\infty$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Probar que se tienen las siguientes implicancias:

$$\begin{array}{ccccc} L \text{ globalmente generado} & \Longrightarrow & L \text{ semi-amplio} & \Longrightarrow & \kappa(L) \geq 0 \\ \Big\Uparrow & & \Big\Uparrow & & \Big\Uparrow \\ L \text{ muy amplio} & \Longrightarrow & L \text{ amplio} & \Longrightarrow & L \text{ big} \end{array}$$

Terminemos esta sección con un resultado importante, cuya demostración se escapa de los alcances de este texto.

Teorema 3.3.18 **(Zariski, 1962).** — *Sea X una variedad algebraica proyectiva* normal*, y sea $L \in \operatorname{Pic}(X)$ un fibrado en rectas tal que el lugar de base* $\operatorname{Bs}(L)$ *es un* conjunto finito*. Entonces, L es semi-amplio.*

Observación importante 3.3.19. — En general, decimos que un fibrado en rectas $L \in \operatorname{Pic}(X)$ es **móvil** si

$$\operatorname{codim}_X(\operatorname{Bs}(L)) \geq 2.$$

Luego, el resultado anterior nos dice en particular que:

> En una superficie algebraica proyectiva normal, todo fibrado en rectas móvil es semi-amplio.

3.4. Divisores de Weil y Divisores de Cartier

En esta sección, veremos como el lenguaje de *divisores* (introducido por Dedekind y Weber) nos permite en muchos casos calcular el grupo de Picard $\operatorname{Pic}(X)$.

Recuerdo 3.4.1. — Sea X una variedad algebraica irreducible y sea $Y \subseteq X$ una hipersuperficie irreducible. Supongamos que

$$\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing}(X) \geq 2 \tag{†}$$

La condición (†) se cumple, por ejemplo, si X es una variedad algebraica *normal* (ver Teorema 2.15.7).

En particular, en este caso tenemos que $X_{\mathrm{reg}} \cap Y \neq \emptyset$ y por ende podemos considerar $y \in Y$ punto suave en X. Así, existe una vecindad afín $U \subseteq X$ de $y \in X$ y un elemento irreducible no-nulo $u \in \mathscr{O}(U)$ tal que

$$\mathcal{I}(Y \cap U) = \langle u \rangle, \text{ i.e., } u \text{ es una ecuación local de } Y.$$

Luego, dado que $k(X) \cong k(U) \cong \mathrm{Fr}(\mathscr{O}(U))$, tenemos que *toda* función racional no-nula $f : X \dashrightarrow k$ puede escribirse como

$$f = \frac{g}{h} = \frac{u^a g'}{u^b h'} = u^m \frac{g'}{h'}, \text{ donde } m := a - b \in \mathbb{Z} \text{ y donde } g', h' \notin \mathcal{I}(Y \cap U).$$

Más aún, $m \geq 0$ si $f \in \mathscr{O}_{X,y}$ es regular en $y \in X$.

Terminología 3.4.2. —
Con la notación anterior, definimos la **multiplicidad** de una función racional no-nula $f \in k(X) \setminus \{0\}$ a lo largo de Y como $\nu_Y(f) := m \in \mathbb{Z}$. Además, decimos que:

(1) f tiene un **cero** a lo largo de Y si $\nu_Y(f) > 0$.
(2) f tiene un **polo** a lo largo de Y si $\nu_Y(f) < 0$.

La discusión anterior motiva la siguiente definición, introducida por David Mumford en honor a André Weil (1906-1988).

Definición 3.4.3. — Sea X una variedad algebraica irreducible normal (o tal que (†)). Un **divisor de Weil** es una expresión de la forma

$$D = \sum_{\text{finita}} n_Y \cdot Y, \text{ donde } n_Y \in \mathbb{Z} \text{ y donde } Y \subseteq X \text{ hipersuperficie irreducible.}$$

En otras palabras, es una *suma formal* obtenida como combinación lineal entera de hipersuperficies irreducibles de X. Denotamos por $\mathrm{WDiv}(X)$ al grupo abeliano de divisores de Weil en X.

Lema 3.4.4. — *Sea X una variedad algebraica irreducible normal (o tal que (†)), y sea $f \in k(X) \setminus \{0\}$. Entonces, existen* finitas *hipersuperficies irreducibles $Y \subseteq X$ tales que $\nu_Y(f) \neq 0$.*

Demostración. — Sea $U = \mathrm{Dom}(f) \subseteq X$ el abierto denso donde f es un morfismo regular, y sea $Z := X \setminus U$ su complemento. Dada una hipersuperficie irreducible $Y \subseteq X$, tenemos que:

Caso 1. Si $Y \subseteq Z$, entonces Y sólo puede ser una de las *finitas* componentes irreducibles de Z.

Caso 2. Si $Y \cap U \neq \emptyset$, entonces $\nu_Y(f) \geq 0$ por definición de multiplicidad. Además, $\nu_Y(f) > 0$ implica que $Y \subseteq V(f)$, y este último conjunto cerrado tiene *finitas* componentes irreducibles.

En ambos casos, se tiene el resultado deseado. □

El ejemplo principal de divisor de Weil es el siguiente.

Ejemplo importante 3.4.5. — Sea X una variedad algebraica irreducible normal (o tal que (†)), y sea $f \in k(X) \setminus \{0\}$. Definimos el **divisor de Weil asociado a** f mediante

$$\operatorname{div}(f) := \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{hip. irred.}}} \nu_Y(f) \cdot Y \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(f)_+ - \operatorname{div}(f)_-,$$

donde $\operatorname{div}(f)_+$ (resp. $\operatorname{div}(f)_-$) denota el divisor de ceros (resp. polos) de f.

Notar que si $f, g \in k(X) \setminus \{0\}$, entonces

$$\operatorname{div}(fg) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g).$$

Luego, obtenemos un morfismo de grupos abelianos

$$\operatorname{div} : k(X)^* \longrightarrow \operatorname{WDiv}(X), \ f \longmapsto \operatorname{div}(f)$$

cuya imagen

$$\operatorname{PWDiv}(X) := \{D \in \operatorname{WDiv}(X) \text{ tal que existe } f \in k(X)^* \text{ tal que } D = \operatorname{div}(f)\}$$

es el sub-grupo (normal) de **divisores de Weil principales** de X.

El ejemplo anterior se generaliza en gran medida al considerar *secciones racionales* de fibrados en rectas.

Definición 3.4.6. — Sea X una variedad algebraica y $L \stackrel{p}{\to} X$ un fibrado en rectas. Una **sección racional** es una aplicación racional

$$s : X \dashrightarrow L$$

tal que $p(s(x)) = x$ para todo $x \in \operatorname{Dom}(s)$. En particular, una sección racional del fibrado trivial $L \cong \mathscr{O}_X$ se identifica a una función racional.

Observación importante 3.4.7. — Dado $L \to X$ un fibrado en rectas con funciones de transición g_{ij} y $s : X \dashrightarrow L$ una sección racional no-nula, entonces podemos asociarle un divisor de Weil $\operatorname{div}(s)$, que no es necesariamente principal si $L \ncong \mathscr{O}_X$, de la manera siguiente:

Si s está dada por una colección $\{s_i\}_{i \in I}$ donde $s_i \in k(U_i)$ y donde $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un cubrimiento abierto de X que trivializa L, entonces $s_i = g_{ij} s_j$ en $U_i \cap U_j$. En particular,

$$\nu_Y|_{U_i \cap U_j}(s_i) = \underbrace{\nu_Y|_{U_i \cap U_j}(g_{ij})}_{\stackrel{\text{def}}{=} 0} + \nu_Y|_{U_i \cap U_j}(s_j) = \nu_Y|_{U_i \cap U_j}(s_j)$$

no depende de los índices $i, j \in J$.

Así, definimos

$$\operatorname{div}(s) := \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{hip. irred.}}} \nu_Y(s) \cdot Y,$$

el divisor de Weil asociado a la sección racional $s : X \dashrightarrow L$.

Ejemplo 3.4.8. —

(1) Sea X una variedad algebraica *suave* e irreducible, y sea $f \in k(X)^*$ una función racional no-nula.

Ejercicio 3.4.9. — Probar que $f \in \mathscr{O}(X)$ es regular si y sólo si *todos los coeficientes* de $\operatorname{div}(f)$ son ≥ 0.

(2) Dado que $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k$, si $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ es una hipersuperficie irreducible y $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, entonces el punto (1) implica que $D := dY$ **no** es un divisor principal. El mismo argumento se aplica a cualquier variedad algebraica *proyectiva e irreducible.*

(3) En $\mathbb{P}^n$, denotamos por

$$H_i := \{x_i = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

al hiperplano asociado a $x_i \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Entonces, el divisor principal asociado a la función racional

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \frac{x_i}{x_j}$$

es $\operatorname{div}(f) \overset{\text{def}}{=} H_i - H_j$. Por otra parte, el divisor asociado a la *sección* regular $s = x_i \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ es $\operatorname{div}(s) \overset{\text{def}}{=} H_i$, que **no** es principal.

(4) En el cono singular

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } z^2 = xy\},$$

el divisor principal asociado a la función regular $f = x \in \mathscr{O}(X)$ es $\operatorname{div}(f) = 2L$, donde $L \subseteq X$ es la recta de ecuaciones $x = z = 0$.

Terminología 3.4.10. — Sea $Y \subseteq X$ una hipersuperficie *irreducible*. Entonces, el divisor de Weil

$$Y := 1 \cdot Y \in \mathrm{WDiv}(X)$$

es llamado un **divisor primo**. Más aún, decimos que un divisor de Weil $D = \sum_{i=1}^r n_i Y_i$ es un **divisor efectivo** si $n_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. En tal caso, escribimos $D \geq 0$.

Ya hemos visto que, en general, no todo divisor de Weil es principal. Por ende, es natural tratar de medir dicha discrepancia.

Definición 3.4.11. — Sea X una variedad algebraica irreducible normal (o tal que (†)). Definimos el **grupo de clases** de X mediante

$$\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{coker}(\mathrm{div}) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathrm{WDiv}(X)/\,\mathrm{PWDiv}(X).$$

Más aún, decimos que $D_1, D_2 \in \mathrm{WDiv}(X)$ son **linealmente equivalentes** si existe $f \in k(X)^*$ tal que

$$D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f), \text{ i.e., } [D_1] = [D_2] \text{ en } \mathrm{Cl}(X),$$

y en tal caso escribimos $D_1 \sim D_2$ (o bien $D_1 \sim_{\mathrm{lin}} D_2$).

El grupo de clases tiende a ser bastante manejable en varios casos.

Ejemplo importante 3.4.12. —

(1) En $\mathbb{P}^n$, los hiperplanos $H_i \sim H_j$ son linealmente equivalentes. Más generalmente, si $Y = V(P) \subseteq \mathbb{P}^n$ es una hipersuperficie irreducible definida por un polinomio P homogéneo de grado $d \geq 1$, entonces

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \frac{P(x_0, \ldots, x_n)}{x_0^d} \in k(\mathbb{P}^n)^*$$

es una función racional no-nula tal que $\mathrm{div}(f) \stackrel{\mathsf{def}}{=} Y - dH_0$, i.e., $Y \sim dH_0$. En particular,

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H_0]$$

es un grupo cíclico generado por la clase del hiperplano H_0. Dado que $[dH_0] \neq 0$ para todo $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, tenemos que $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$ es un grupo cíclico infinito.

(2) En $\mathbb{A}^n$, si $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ es una hipersuperficie irreducible entonces $\mathcal{I}(Y) = \langle u \rangle$ es un *ideal principal* (primo) de $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n)$. Por definición, tenemos que $\nu_Y(u) \stackrel{\mathsf{def}}{=} 1$ y $\mathrm{div}(u) \stackrel{\mathsf{def}}{=} Y$. Luego,

Todo divisor de Weil de $\mathbb{A}^n$ es principal, i.e., $\mathrm{Cl}(\mathbb{A}^n) = \{0\}$.

Más generalmente, si X es una variedad algebraica afín irreducible y *normal*, entonces $\mathrm{Cl}(X) = \{0\}$ si y sólo si $\mathscr{O}(X)$ es un dominio de factorización única.

El siguiente resultado es sumamente útil para realizar cálculos explícitos en situaciones concretas.

Proposición 3.4.13. — *Sea X una variedad algebraica irreducible normal (o tal que* (†)*). Sea $Z \subsetneq X$ un* cerrado propio *y sea $U = X \setminus Z$* abierto denso. *Entonces:*

(1) *La restricción*

$$\mathrm{Cl}(X) \overset{\mathrm{res}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Cl}(U),\ D = \sum n_i Y_i \longmapsto D|_U := \sum n_i (Y_i \cap U)$$

es sobreyectiva, donde definimos $n_i = 0$ *en* $D|_U$ *si* $Y_i \cap U = \emptyset$.

(2) *Si* $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$, *entonces* $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Cl}(U)$.

(3) *Si* $Y_1, \ldots, Y_r$ *son las componentes irreducibles de codimensión 1 de* Z, *entonces la sucesión de grupos abelianos*

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}[Y_i] \xrightarrow{\iota} \mathrm{Cl}(X) \overset{\mathrm{res}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Cl}(U) \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\mathbb{Z}[Y_i]$ *denota el grupo cíclico generado por* $[Y_i] \in \mathrm{Cl}(X)$.

Demostración. — Para (1), notamos que si $Y \subseteq X$ es un divisor primo, la intersección $Y \cap U$ es vacía o bien un divisor primo en U. Además, si $f \in k(X)^*$ con $\mathrm{div}(f) = n_i Y_i$, entonces podemos pensar $f \in k(U)^*$ como una función racional en U y notamos que

$$\mathrm{div}(f) = \sum n_i (Y_i \cap U) \text{ en } \mathrm{WDiv}(U),$$

de donde obtenemos un morfismo $\mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{Cl}(U)$. Dicho morfismo es sobreyectivo, pues si $Y_U \subseteq U$ es un divisor primo, entonces $Y_U = Y|_U$ con $Y := \overline{Y_U} \subseteq X$ dado por la adherencia de Y_U.

Para (2) y (3), notamos que $\mathrm{WDiv}(X)$ y $\mathrm{Cl}(X)$ depende *sólamente* de subconjuntos cerrados de codimensión 1, y que el kernel de $\mathrm{Cl}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{Cl}(U)$ está generado por las clases de los $Y_1, \ldots, Y_r$. □

Ejemplo 3.4.14. —

(1) Sea $U \subseteq \mathbb{A}^n$ un abierto no-vacío, entonces $\mathrm{Cl}(U) = \{0\}$.

(2) Sea $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie de grado $d \geq 1$. Entonces, $Y \sim dH$ y la sucesión exacta

$$\mathbb{Z}[Y] \cong d\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n \setminus Y) \longrightarrow 0$$

implica que $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n \setminus Y) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

(3) En $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, consideramos las rectas

$$L_1 := \{p\} \times \mathbb{P}^1 \text{ y } L_2 := \mathbb{P}^1 \times \{q\},$$

donde $p, q \in \mathbb{P}^1$. Entonces,

$$(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus (L_1 \cup L_2) =: U \cong \mathbb{A}^2.$$

Luego, la sucesión exacta del Teorema anterior y el punto (1) implican que

$$\{0\} = \mathrm{Cl}(U) \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)/(\mathbb{Z}[L_1] \oplus \mathbb{Z}[L_2]),$$

i.e., $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ está generado por $[L_1]$ y $[L_2]$. De hecho, más adelante veremos que $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{Z}^2$.

(4) Sea X una variedad algebraica suave e irreducible, y sea $Z \subseteq X$ una subvariedad suave e irreducible tal que $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$. Sea
$$\varepsilon : \mathrm{Bl}_Z(X) \longrightarrow X$$
el blow-up de $Z \subseteq X$, con **divisor excepcional** $E \overset{\mathsf{def}}{=} \varepsilon^{-1}(Z)$. Entonces, $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Cl}(X \setminus Z) \cong \mathrm{Cl}(\mathrm{Bl}_Z(X) \setminus E)$ y luego
$$\mathrm{Cl}(\mathrm{Bl}_Z(X)) \cong \mathrm{Cl}(X) \oplus \mathbb{Z}[E].$$

Ejercicio 3.4.15. — Consideremos el cono singular
$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } z^2 = xy\}$$
y $L = \{x = z = 0\}$ recta en X. Probar que
$$\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
es un grupo cíclico generado por $[L]$, que cumple $[2L] = 0$ en $\mathrm{Cl}(X)$.
Indicación: Probar que L **no** *es un divisor principal* (*cf. Ejercicio 2.13.24*)*, y que $X \setminus L \cong U$ donde $U \subseteq \mathbb{A}^2$ es un abierto no-vacío.*

Para relacionar los grupos $\mathrm{Cl}(X)$ y $\mathrm{Pic}(X)$ se requiere la noción de *divisor de Cartier*, introducida por David Mumford en honor a Pierre Cartier.

Definición 3.4.16. — Sea X una variedad algebraica irreducible. Una familia $\{(f_i, U_i)\}_{i\in I}$, dada por un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X y por funciones racionales no-nulas $f_i \in k(U_i)^*$, es **admisible** si
$$g_{ij} := f_i/f_j \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j) \text{ para todos } i, j \in I,$$
i.e., f_i/f_j es una función regular que no se anula en $U_i \cap U_j$. Además, decimos que dos familias $\{(f_i, U_i)\}_{i\in I}$ y $\{(g_j, V_j)\}_{j\in J}$ son *equivalentes* si su unión
$$\{(f_i, U_i)\}_{i\in I} \cup \{(g_j, V_j)\}_{j\in J} \text{ es admisible.}$$
Un **divisor de Cartier** en X es $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}]$, una clase de equivalencia de familias admisibles. Denotamos por $\mathrm{Div}(X)$ al conjunto de divisores de Cartier en X.

Observación importante 3.4.17. — Sea $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}]$ un divisor de Cartier en X, y sea $\cup_{j\in J} V_j = X$ un cubrimiento abierto de X, entonces
$$\{(f_i, U_i)\}_{i\in I} \sim \{(f_i|_{U_i\cap V_j}, U_i \cap V_j)\}_{(i,j)\in I\times J}.$$

En particular, *siempre* podemos suponer que dos divisores de Cartier están definidos en el mismo cubrimiento. Con esto en mente, podemos observar que $\mathrm{Div}(X)$ es un *grupo abeliano*:

Dados $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}]$ y $D' = [(g_i, U_i)_{i\in I}]$ en $\mathrm{Div}(X)$, definimos

(i) $-D := [(1/f_i, U_i)_{i\in I}]$.

(ii) $D + D' := [(f_i g_i, U_i)_{i\in I}]$.

(iii) $0 := [(1, X)]$. Luego, $D = 0$ en $\mathrm{Div}(X)$ si y sólo si $f_i \in \mathscr{O}_X^*(U_i)$ $\forall i \in I$.

En particular, $\mathrm{Div}(X) \cong \Gamma(X, \mathscr{K}_X^*/\mathscr{O}_X^*)$ se identifica a las secciónes globales del *haz cociente* $\mathscr{K}_X^*/\mathscr{O}_X^*$, donde $\mathscr{K}_X^*(U) := k(U)^*$.

Las nociones estudiadas en el contexto de divisores de Weil, se extienden naturalmente a divisores de Cartier.

Definición 3.4.18. — Sea X una variedad algebraica irreducible y sea $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}]$ un divisor de Cartier. Decimos que:

(1) D es un **divisor efectivo** si $f_i \in \mathscr{O}_X(U_i)$ es una función regular para todo $i \in I$. En tal caso, escribimos $D \geq 0$.

(2) D es un **divisor de Cartier principal** si $D = [(f, X)]$ para cierta $f \in k(X)^*$.

(3) $\mathrm{PDiv}(X)$ es el sub-grupo (normal) de **divisores de Cartier principales** de X.

Más aún, si $D' \in \mathrm{Div}(X)$ es un divisor de Cartier, decimos que D y D' son **linealmente equivalentes** si $D - D'$ es un divisor principal, y en tal caso escribimos $D \sim D'$ (o bien $D \sim_{\mathrm{lin}} D'$).

El siguiente resultado fundamental nos permitirá comparar ambas nociones.

Teorema 3.4.19. — *Sea X una variedad algebraica irreducible normal (o tal que (†)). Entonces, hay un morfismo de grupos* inyectivo

$$\varphi : \mathrm{Div}(X) \hookrightarrow \mathrm{WDiv}(X)$$

que cumple que $\varphi(\mathrm{PDiv}(X)) \subseteq \mathrm{PWDiv}(X)$, i.e., la imagen de un divisor de Cartier principal es un divisor de Weil principal. Más aún,

Si X es una variedad suave, entonces $\mathrm{Div}(X) \cong \mathrm{WDiv}(X)$.

Demostración. — Sea $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ un divisor de Cartier, y consideremos el divisor de Weil $\widehat{D} \in \mathrm{WDiv}(X)$ definido por

$$\widehat{D} := \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{hip. irred.}}} \nu_Y(f_i) \cdot Y$$

para *cualquier* $i \in I$ tal que $Y \cap U_i \neq \emptyset$, lo cual es independiente de $i \in I$ pues $f_i/f_j \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ no tiene ceros ni polos. Así, obtenemos un morfismo de grupos

$$\varphi : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{WDiv}(X),\ D \longmapsto \widehat{D}.$$

Más aún, si $D = [(f, X)]$ es un divisor de Cartier principal, entonces $\widehat{D} \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{div}(f)$ es principal. Por otro lado, la condición (†) implica que si $\nu_Y(f_i) = 0$ para todo $Y \subseteq X$ divisor primo, entonces $f_i \in \mathscr{O}_X^*(U_i)$ para todo $i \in I$, i.e., $D = 0$ en $\mathrm{Div}(X)$. Así, φ es un morfismo inyectivo.

Finalmente, si X es una variedad algebraica *suave* y $Y \subseteq X$ es un divisor primo, entonces el hecho que $\mathscr{O}_{X,x}$ es un anillo factorial para todo $x \in X$ implica que existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X tal que $\mathcal{I}(Y \cap U_i) = \langle f_i \rangle$ es un ideal principal para todo $i \in I$. Así, el divisor de Cartier

$$D_Y := [(f_i, U_i)_{i\in I}] \text{ verifica que } \varphi(D_Y) \overset{\mathsf{def}}{=} Y.$$

En particular, todo divisor de Weil *efectivo* es de Cartier (al ser suma de divisores primos). Dado que todo divisor de Weil es diferencia de divisores de Weil efectivos, deducimos que $\mathrm{Div}(X) \cong \mathrm{WDiv(X)}$ en este caso. □

Terminología 3.4.20. — Una variedad algebraica irreducible X es **localmente factorial** si $\mathscr{O}_{X,x}$ es un anillo factorial para todo $x \in X$ (e.g. X suave). En tal caso, el argumento anterior muestra que

$$\mathrm{Div}(X) \cong \mathrm{WDiv}(X).$$

Más generalmente, decimos que X es una **variedad $\mathbb{Q}$-factorial** si para todo divisor de Weil $D \in \mathrm{WDiv}(X)$ existe un entero positivo $m = m(D) \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que mD es un divisor de Cartier.

Ejercicio 3.4.21. — Consideremos el cono singular

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } z^2 = xy\}$$

y $L = \{x = z = 0\}$ recta en X. Probar que $L \in \mathrm{WDiv}(X)$ **no** es un divisor de Cartier (i.e., no es *localmente principal*), pero que $2L$ es un divisor de Cartier.

Para relacionar lo anterior con el *grupo de Picard* de X, necesitamos la siguiente observación importante.

Construcción 3.4.22. — Sea X una variedad algebraica irreducible y sea $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ un divisor de Cartier. En $U_i \cap U_j$, las funciones

$$g_{ij} := f_i/f_j \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$$

son regulares sin ceros. Más aún, verifican la *condición de cociclo*

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik} \text{ en } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Luego, D define un fibrado en rectas[(4)] $\mathscr{O}_X(D) \in \operatorname{Pic}(X)$ con funciones de transición $g_{ij} \overset{\mathsf{def}}{=} f_i/f_j$.

Por otro lado, recordemos (ver Definición 3.4.6) que una *sección racional* de $L = \mathscr{O}_X(D)$ es una aplicación racional

$$s : X \dashrightarrow \mathscr{O}_X(D)$$

definida por una colección $\{s_i\}_{i\in I}$ de funciones racionales $s_i \in k(U_i)$ verificando que $s_i = g_{ij}s_j \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{f_i}{f_j}s_j$ en $U_i \cap U_j$. Luego, las funciones $s_i := f_i \in k(U_i)$ definen *tautológicamente* una sección racional

$$s_D : X \dashrightarrow \mathscr{O}_X(D)$$

puesto que $f_i \overset{\mathsf{def}}{=} g_{ij}f_j$ en $U_i \cap U_j$.

Teorema 3.4.23. — *Sea X una variedad algebraica irreducible. Entonces, el morfismo*

$$\pi : \operatorname{Div}(X) \longrightarrow \operatorname{Pic}(X),\ D \longmapsto \mathscr{O}_X(D)$$

induce un isomorfismo

$$\widehat{\pi} : \operatorname{Div}(X)/\operatorname{PDiv}(X) \xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{Pic}(X).$$

En particular, $D_1 \sim D_2$ si y sólamente si $\mathscr{O}_X(D_1) \cong \mathscr{O}_X(D_2)$.

Demostración. — Si $D = [(f, X)]$ es un divisor de Cartier principal, entonces $g_{ij} \overset{\mathsf{def}}{=} 1$, i.e., $\mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{O}_X$ es el fibrado trivial en $\operatorname{Pic}(X)$. Así, la propiedad universal del cociente nos dice que π induce un morfismo de grupos

$$\widehat{\pi} : \operatorname{Div}(X)/\operatorname{PDiv}(X) \longrightarrow \operatorname{Pic}(X),\ [D] \longmapsto \mathscr{O}_X(D).$$

Veamos que:

(1) $\widehat{\pi}$ **es inyectivo:** Sea $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}] \in \operatorname{Div}(X)$ tal que $\mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{O}_X$. Entonces, existe una sección $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))$ que *no se anula nunca* (cf. Ejemplo 3.2.8), i.e., está dada por una colección $\{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i \in \mathscr{O}_X^*(U_i)$ y tales que

$$s_i = g_{ij}s_j \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{f_i}{f_j}s_j \text{ en } U_i \cap U_j.$$

(4) Que en la literatura clásica también se denota por $\mathscr{L}_D$ o por $\mathscr{L}(D)$.

En particular, $f := \frac{f_i}{s_i} = \frac{f_j}{s_j}$ define una función racional $f \in k(X)^*$ que por construcción verifica $[(f, X)] \overset{\text{def}}{=} D$, i.e., D es un divisor principal.

(2) $\widehat{\pi}$ **es sobreyectivo:** Sea $L \in \operatorname{Pic}(X)$ dado por funciones de transición $g_{ij} \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ en una trivialización $\{U_i\}_{i\in I}$. Si fijamos un indice $\ell \in I$ y definimos $f_i := g_{i\ell} \in k(U_i)^*$, entonces al divisor de Cartier

$$D := [(f_i, U_i)_{i\in I}]$$

le asociamos el fibrado en rectas $\mathscr{O}_X(D)$ con funciones de transición

$$h_{ij} \overset{\text{def}}{=} \frac{f_i}{f_j} \overset{\text{def}}{=} \frac{g_{i\ell}}{g_{j\ell}} = g_{ij},$$

donde la última igualdad se obtiene gracias a la *condición de cociclo*. Así, $\mathscr{O}_X(D) \cong L$.

Luego, $\widehat{\pi} : \operatorname{Div}(X)/\operatorname{PDiv}(X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(X)$ es un isomorfismo. $\square$

Todo lo que hemos discutido hasta el momento puede resumirse de la manera siguiente.

Observación importante 3.4.24. — Consideremos X variedad algebraica irreducible normal (o tal que (†)). Entonces, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Pic}(X) \overset{\text{def}}{=} \{\text{fibrados en rectas}\}/\cong \arrow[r, "\simeq", "L\longmapsto\mathscr{L},\ \text{con}\ \mathscr{L}(U):=\mathrm{H}^0(U,L|_U)"'] & \{\text{haces invertibles}\}/\cong \\
\operatorname{Div}(X)/\operatorname{PDiv}(X) \arrow[u, "{[D]\longmapsto\mathscr{O}_X(D)}", "\simeq"'] \arrow[r, hook, "(\star)"] & \operatorname{Cl}(X) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{WDiv}(X)/\operatorname{PWDiv}(X) \\
\Gamma(X, \mathscr{K}_X^*/\mathscr{O}_X^*) \cong \operatorname{Div}(X) \overset{\text{def}}{=} \{\text{div. de Cartier}\} \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook, "(\star)", "D={[(f_i,U_i)]}\longmapsto\widehat{D}=\sum\nu_Y(f_i)Y"'] & \operatorname{WDiv}(X) \overset{\text{def}}{=} \{\text{div. de Weil}\} \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

Más aún, si X es una variedad algebraica *suave* (o localmente factorial) los morfismos $(\star)$ son isomorfismos.

Terminemos la sección con algunas observaciones importantes (que usaremos mucho a futuro), ejemplos explícitos, y aplicaciones de lo anterior.

Observación importante 3.4.25. — Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles.

(1) Sea $\varphi : Y \to X$ un morfismo regular y $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ un divisor de Cartier en X. Entonces, siempre podemos considerar el pullback $\varphi^*\mathscr{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(Y)$ como fibrado en rectas.

Por otro lado, la familia $\{\varphi^*(f_i), \varphi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ define un divisor de Cartier $\varphi^*D \in \mathrm{Div}(Y)$ en Y siempre y cuando

$$\varphi^*(f_i) \overset{\mathsf{def}}{=} f_i \circ \varphi \neq 0 \text{ en } \varphi^{-1}(U_i).$$

Esto ocurre, por ejemplo, si φ es dominante (ya que $\varphi^* : k(X) \hookrightarrow k(Y)$ es inyectivo en tal caso). Además, por construcción, si φ^*D está bien definido entonces

$$\varphi^*\mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{O}_Y(\varphi^*D) \text{ en } \mathrm{Pic}(Y).$$

(2) Sea $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ un divisor de Cartier en X, y sea $\mathscr{O}_X(D)$ el fibrado en rectas asociado. Históricamente, el k-espacio vectorial de secciones globales

$$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))$$

es llamado el **espacio de Riemann-Roch de** D, dado que el contenido del *Teorema de Riemann-Roch* busca calcular $\dim_k \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))$ o dar estimaciones de dicha dimensión.

Explícitamente, una sección no-nula $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \setminus \{0\}$ está dada por una colección $\{s_i\}_{i\in I}$ de funciones regulares $s_i \in \mathscr{O}_X(U_i)$ tales que

$$s_i = g_{ij}s_j \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{f_i}{f_j}s_j \text{ en } U_i \cap U_j.$$

Así, obtenemos una función racional $f := \frac{s_i}{f_i} = \frac{s_j}{f_j} \in k(X)^*$ en X, que por definición cumple que $f = s/s_D$ (ver Construcción 3.4.22). En el caso en que X es una variedad algebraica normal (o tal que (†)), el morfismo de grupos

$$\mathrm{Div}(X) \hookrightarrow \mathrm{WDiv}(X),\ D \longmapsto \widehat{D} := D$$

es inyectivo, y en tal caso la relación $f = s/s_D$ implica que

$$\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(s) - \mathrm{div}(s_D) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{div}(s) - D.$$

Así, $D \sim \mathrm{div}(s) \geq 0$ y en particular $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(\mathrm{div}(s)))$. Recíprocamente, si $D \sim D'$ entonces existe una función racional

$f \in k(X)^*$ tal que $D' - D = \mathrm{div}(f)$, y luego $s := fs_D$ es una *sección racional* de $\mathscr{O}_X(D)$ que verifica

$$\mathrm{div}(s) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(s_D) \overset{\mathsf{def}}{=} D' - D + D = D'.$$

Además, s es una *sección regular* si y sólo si $\mathrm{div}(s) \geq 0$ es un divisor efectivo. En resumen, $s \mapsto f := s/s_D$ induce un isomorfismo

$$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \{f \in k(X)^* \text{ tal que } \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

con inversa $f \mapsto s := fs_D$.

(3) **Caso particular importante.** Notar que para $f, g \in k(X)^*$ se tiene que $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g)$ si y sólo si $\mathrm{div}(f/g) = 0$, i.e., f/g es una función regular que nunca se anula.

Luego, si X es una variedad algebraica *proyectiva* normal (o tal que (†)), entonces el hecho que $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \cong k$ implica que $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g)$ si y sólo si $f = \lambda g$ para cierto $\lambda \in k^*$. Así, el punto (2) nos dice que $s \mapsto \mathrm{div}(s)$ induce un isomorfismo

$$\mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong |D| := \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim D\}.$$

Clásicamente, el conjunto $|D| \overset{\mathsf{def}}{=} \{E \geq 0$ divisor efectivo tal que $E \sim D\}$ es llamado el **sistema lineal** asociado al divisor de Cartier D.

(4) Supongamos que $Y \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ es un divisor primo (i.e., una hipersuperficie irreducible). Entonces, hay una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_Y \longrightarrow 0,$$

donde es común escribir $\mathscr{O}_Y := \iota_*\mathscr{O}_Y$ (cf. Proposición 2.3.7) por abuso de notación. Si X es una variedad algebraica *suave*, podemos considerar el divisor de Cartier $D = [(f_i, U_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ asociado a Y, donde $\mathcal{I}(U_i \cap Y) = \langle f_i \rangle$ por construcción.

Entonces, el fibrado en rectas $\mathscr{O}_X(D) \cong \mathscr{O}_X(Y)$ tiene funciones de transición $g_{ij} \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{f_i}{f_j}$ y su dual $L := \mathscr{O}_X(-D)$ tiene funciones de transición $h_{ij} \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{1}{g_{ij}} = \frac{f_j}{f_i}$. En particular, una sección local

$$s \in \mathscr{L}(U) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^0(U, L|_U) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^0(U, \mathscr{O}_X(-D)|_U)$$

está dada por una colección $\{s_i\}_{i\in I}$ de funciones regulares $s_i \in \mathscr{O}_X(U \cap U_i)$ tales que $s_i = h_{ij}s_j \overset{\mathsf{def}}{=} \frac{f_j}{f_i}s_j$. Luego, $f_s := s_i f_i = s_j f_j$ y por ende toda sección local s permite definir

$$f_s \in \mathscr{O}_X(U) \text{ función } \underline{\text{regular}} \text{ que se anula en } Y, \text{ i.e., } f_s \in \mathcal{I}_Y(U)$$

Así, obtenemos un morfismo inyectivo de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$\mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{O}_X, \ s \longmapsto f_s \text{ en cada abierto } U \subseteq X,$$

cuya imagen es $\mathcal{I}_Y$. En particular, mediante las identificaciones dadas por la discusión anterior $\mathcal{I}_Y \cong \mathscr{L} \cong \mathscr{O}_X(-D)$ obtenemos la siguiente sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-D) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_D \longrightarrow 0.$$

Más generalmente, si $D = \sum n_i Y_i$ es un *divisor efectivo* (i.e., $n_i \geq 0$ para todo i) entonces la **sucesión exacta asociada a** $D \geq 0$ está dada por

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-D) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_D \longrightarrow 0,$$

que es sumamente utilizada en vida cotidiana. Aquí, $\mathscr{O}_D$ es el haz dado por el cociente de $\mathscr{O}_X$ por el ideal de funciones regulares que se anulan en Y_i con multiplicidad[(5)] $\geq n_i$.

Veamos ahora cómo utilizar todas estas herramientas para calcular el grupo de Picard de muchas variedades interesantes.

Ejemplo importante 3.4.26. — Estamos en condiciones de reinterpretar el Ejemplo 3.4.14.

(1) Sea $U \subseteq \mathbb{A}^n$ un abierto no-vacío. Entonces, $\mathrm{Pic}(U) \cong \{0\}$ es trivial.

Cabe destacar que el *Teorema de Quillen-Suslin* (1976) señala que *todo* fibrado vectorial (de rango arbitrario) en $\mathbb{A}^n$ es trivial. Por este resultado Daniel Quillen fue galardonado con la medalla Fields en 1978.

(2) Tenemos que

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}[H] \cong \mathbb{Z}, \text{ donde } H \subseteq \mathbb{P}^n \text{ es un hiperplano.}$$

Explícitamente, para $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ una sección no-nula $s \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \backslash \{0\}$ define una hipersuperficie $Y := V(s) \subseteq \mathbb{P}^n$ de grado d. Luego, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(Y) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y por ende $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)$ está generado por $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Más aún, el sistema lineal

$$|Y| \overset{\mathsf{def}}{=} \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim Y\} \cong \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$$

[(5)] El hecho que

$$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(-D)) \cong \{f \in k(X)^* \text{ tal que } \mathrm{div}(f) \geq D\} \cup \{0\}$$

puede pensarse como una versión global de esta sucesión exacta: las secciones de $\mathscr{O}_X(-D)$ son funciones racionales cuyos "ceros y polos están acotados inferiormente por D".

parametriza hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^n$. Además, se tiene que $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n \setminus Y) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

(3) Sea $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con coordenadas $([x_0, x_1], [y_0, y_1])$ y consideremos los fibrados en rectas $L_i := \operatorname{pr}_i^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Luego,

$$\mathrm{H}^0(S, L_1) \cong \operatorname{Vect}_k(x_0, x_1) \text{ y } \mathrm{H}^0(S, L_2) \cong \operatorname{Vect}_k(y_0, y_1).$$

En particular, $L_i^{\otimes m} \neq 0$ en $\operatorname{Pic}(S)$ para todo $m \geq 1$ (puesto que $\mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_S) \cong k$). Además, si $s_i \in \mathrm{H}^0(S, L_i) \setminus \{0\}$ entonces

$$V(s_1) = \{p\} \times \mathbb{P}^1 \text{ y } V(s_2) = \mathbb{P}^1 \times \{q\}$$

son rectas que generan $\operatorname{Cl}(S) \cong \operatorname{Pic}(S)$, gracias al Ejemplo 3.4.14 (3). Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \\ (a, b) &\longmapsto \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(a, b) \overset{\mathsf{def}}{=} \operatorname{pr}_1^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \otimes \operatorname{pr}_2^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \end{aligned}$$

es un isomorfismo. De manera completamente análoga, se tiene

Ejercicio 3.4.27. — Probar que $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong \mathbb{Z}^2$.

(4) Sea X una variedad algebraica suave e irreducible, y sea $Z \subseteq X$ una subvariedad suave e irreducible tal que $\operatorname{codim}_X(Z) \geq 2$. Sea

$$\varepsilon : \widetilde{X} := \operatorname{Bl}_Z(X) \longrightarrow X$$

el blow-up de $Z \subseteq X$, con divisor excepcional $E \overset{\mathsf{def}}{=} \varepsilon^{-1}(Z)$. Entonces, el Ejemplo 3.4.14 (4) implica que el morfismo

$$\operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \operatorname{Pic}(\widetilde{X}),\ (L, m) \longmapsto \varepsilon^* L \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(mE)$$

es sobreyectivo. Más aún, tenemos que dicho morfismo es un *isomorfismo*. Para ello debemos probar que para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(mE)$ no es trivial en $\operatorname{Pic}(\widetilde{X}) \cong \operatorname{Cl}(\widetilde{X})$:

Supongamos que existe $g \in k(\widetilde{X})^*$ tal que $\operatorname{div}(g) = mE$ en $\operatorname{WDiv}(\widetilde{X})$. Entonces, el isomorfismo

$$\varepsilon^* : k(X) \xrightarrow{\sim} k(\widetilde{X})$$

permite considerar $G := (\varepsilon^*)^{-1}(g) \in k(X)^*$ que por definición cumple que $\operatorname{div}(G) = 0$ en $\operatorname{WDiv}(X)$. Así, G es una función regular que no se anula nunca, y luego $g \overset{\mathsf{def}}{=} \varepsilon^*(G) = G \circ \varepsilon$ también, i.e., $m = 0$.

En resumen, tenemos que

$$\operatorname{Pic}(\widetilde{X}) = \varepsilon^* \operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}[\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)] \cong \operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

En particular, tenemos que $\operatorname{Pic}(\operatorname{Bl}_{p_1, \ldots, p_r}(\mathbb{P}^2)) \cong \mathbb{Z}^{r+1}$.

(5) Sea X una variedad algebraica *proyectiva suave* e irreducible, tal que X es una variedad *racional* (ver Definición 2.9.21), i.e., que existe un abierto no-vacío $U \subseteq X$ tal que $U \cong V$ para cierto $V \subseteq \mathbb{A}^n$ abierto no-vacío. Supongamos adicionalmente que $D := X \setminus U$ es una hipersuperficie irreducible. Entonces, la sucesión exacta

$$\mathbb{Z}[\mathscr{O}_X(D)] \xrightarrow{\iota} \operatorname{Pic}(X) \overset{\text{res}}{\twoheadrightarrow} \underbrace{\operatorname{Pic}(U)}_{\cong\{0\}} \longrightarrow 0$$

implica que $\operatorname{Pic}(X)$ está generado por $\mathscr{O}_X(D)$.

Más aún, dado que X es *proyectiva* implica que existe $L \in \operatorname{Pic}(X)$ muy amplio. En particular, $L^{\otimes m} \neq 0$ en $\operatorname{Pic}(X)$ para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Así,

$$\operatorname{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}[\mathscr{O}_X(D)] \cong \mathbb{Z}$$

es un grupo cíclico infinito genarado por $\mathscr{O}_X(D)$. En particular, $\mathscr{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas *amplio*.

Ejercicio 3.4.28. —

(1) Consideremos el cono singular

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } z^2 = xy\}$$

Probar que $\operatorname{Pic}(X) \cong \{0\}$.

(2) Probar que $\operatorname{Pic}(\operatorname{Gr}(m, n)) \cong \mathbb{Z}$.

(3) Supongamos que $\operatorname{car}(k) \neq 2$. Sea $Q_n \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ una hipersuperficie cuádrica suave de dimensión $n \geq 3$. Probar que $\operatorname{Pic}(Q_n) \cong \mathbb{Z}$, ¿qué puede decir de $\operatorname{Pic}(Q_1)$ y $\operatorname{Pic}(Q_2)$?

Indicación: En (1), usar que $\operatorname{Pic}(X) \hookrightarrow \operatorname{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *En (2) y (3) usar el Ejemplo 3.4.26 (5), así como el Ejercicio 2.9.23 (2).*

Finalmente, terminemos por dar algunas consecuencias geométricas importantes de lo que hemos discutido en esta sección.

3.4.1. Automorfismos de $\mathbb{P}^n$. — Veamos que

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^n) \cong \operatorname{PGL}_{n+1}(k).$$

Para ello, consideremos $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ un automorfismo de $\mathbb{P}^n$, i.e., un morfismo birregular. Por un lado, f induce

$$f^* : \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n),\ L \longmapsto f^*L$$

un automorfismo del grupo $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$. Luego, $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(\pm 1)$ debe ser un generador de $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n)$.

Por otro lado, f induce un isomorfismo de k-espacios vectoriales

$$\Gamma(f) : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)).$$

Luego, dado que $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cong k^{n+1}$ y $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = \{0\}$, tenemos que necesariamente $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.

Finalmente, sabemos (ver Teorema 3.3.2) que el morfismo regular f está completamente determinado por $L = f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Luego, $f = \varphi_L$ es *lineal*. Así, obtenemos un morfismo de grupos sobreyectivo

$$\mathrm{GL}_{n+1}(k) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$$

cuyo kernel está dado por $\{\lambda\, \mathrm{I}_{n+1},\ \lambda \in k^*\}$, i.e., $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{PGL}_{n+1}(k)$.

3.4.2. Teorema de Abel-Jacobi. — Sea C una curva algebraica *proyectiva suave* e irreducible. Un divisor de Weil en C es de la forma

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i p_i$$

donde $n_i \in \mathbb{Z}$ y donde $p_i \in C$ es un *punto*. Definimos el **grado** de D como

$$\deg(D) := \sum_{i=1}^{r} n_i \in \mathbb{Z}.$$

De manera similar, si C' es otra curva algebraica proyectiva suave e irreducible y $f : C \to C'$ es un morfismo regular sobreyectivo (en particular, dominante), definimos el **grado de** f como el grado

$$\deg(f) := [k(C) : k(C')] \overset{\mathsf{def}}{=} \dim_{k(C')} k(C) < +\infty$$

de la extensión de cuerpos

$$f^* : k(C') \hookrightarrow k(C).$$

El siguiente hecho algebraico, que admitiremos sin demostración, nos señala que *el número de puntos de una fibra $f^{-1}(p)$ (contados con multiplicidad) es constante*. Para más detalles, ver [**Har77**, Chapter II, Prop. 6.9].

Proposición 3.4.29. — *Sea $f : C \to C'$ un morfismo sobreyectivo entre curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles. Entonces, para todo divisor $D \in \mathrm{WDiv}(C') \cong \mathrm{Div}(C')$ en C' se tiene que*

$$\deg(f^*D) = \deg(f)\deg(D).$$

Usando esto, podemos extender el resultado clásico de análisis complejo que señala que *una función meromorfa tiene igual cantidad de ceros y polos (contados con multiplicidad).*

Proposición 3.4.30. — *Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $D = \operatorname{div}(f) \in \operatorname{PDiv}(C)$ un divisor principal. Entonces,* $\deg(D) = 0$*. En particular,* $\deg$ *induce un morfismo de grupos sobreyectivo*

$$\begin{aligned} \deg : \operatorname{Pic}(C) \cong \operatorname{Div}(C)/\operatorname{PDiv}(C) &\twoheadrightarrow \mathbb{Z} \\ L \cong \mathscr{O}_C(D) &\longmapsto \deg(L) := \deg(D) \end{aligned}$$

El kernel de dicho morfismo es denotado por $\operatorname{Pic}^0(C) := \ker(\deg)$*, y por lo tanto hay una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Pic}^0(C) \hookrightarrow \operatorname{Pic}(C) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

de grupos abelianos.

Demostración. — Sea $f : C \dashrightarrow k \cong \mathbb{A}^1 \cong U_0 \subseteq \mathbb{P}^1$ una función racional no-nula, y sea $F : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, $x \mapsto [f(x), 1]$ la aplicación racional inducida. Dado que C es suave y $\mathbb{P}^1$ proyectivo, tenemos que $F : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ es un morfismo regular (ver Corolario 2.13.25). Con esto en mente, veamos que $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$:

Si f es constante, entonces $\operatorname{div}(f) = 0$ y luego se tiene que $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$. Si f no es constante, entonces F es sobreyectiva, pues es dominante y cerrada. Notar que en este último caso basta probar que $\operatorname{div}(f) = F^*(0 - \infty)$, donde $0 := [1, 0]$ y $\infty := [0, 1]$, ya que en tal caso la Proposición anterior asegura que

$$\deg(\operatorname{div}(f)) = \deg(F) \cdot \deg(0 - \infty) = \deg(F) \cdot 0 = 0.$$

Veamos entonces que $\operatorname{div}(f) = F^*(0 - \infty)$:

Sean $U_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^1$ los abiertos estándar de $\mathbb{P}^1$, donde $i \in \{0, 1\}$. Entonces, el divisor de Cartier $0 \overset{\text{def}}{=} [1, 0]$ en $\mathbb{P}^1$ está definido por la familia admisible $\{(\frac{x_1}{x_0}, U_0), (1, U_1)\}$, y por ende F^*0 está definido por la familia admisible $\{(f, F^{-1}(U_0)), (1, F^{-1}(U_1))\}$. De manera similar, $F^*\infty$ está definido por $\{(1, F^{-1}(U_0)), (\frac{1}{f}, F^{-1}(U_1))\}$, y luego $F^*(0 - \infty)$ está definido por la familia admisible $\{(f, F^{-1}(U_0)), (f, F^{-1}(U_1))\}$, i.e., $F^*(0 - \infty) = \operatorname{div}(f)$. □

Una consecuencia importante del resultado anterior es el siguiente resultado importante de Abel y Jacobi, que nos dice en particular que para una curva proyectiva suave C que no sea isomorfa a $\mathbb{P}^1$, el grupo $\operatorname{Pic}^0(C)$ es *muy grande*. Más precisamente, es posible probar que $\operatorname{Pic}^0(C) \cong \operatorname{Jac}(C)^\vee$ es el dual de la *variedad jacobiana* $\operatorname{Jac}(C)$ de la curva C, la cual es una variedad abeliana canónicamente asociada a la curva C.

***Teorema 3.4.31* (Abel-Jacobi). —** *Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible. Entonces,*

(1) $\deg : \mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ *es un isomorfismo si y sólo si* $C \cong \mathbb{P}^1$.

(2) *Si* $C \ncong \mathbb{P}^1$ *y* $p_0 \in C$ *es un punto fijo, entonces la* **aplicación de Abel-Jacobi**

$$\varphi : C \hookrightarrow \mathrm{Pic}^0(C),\ p \longmapsto \mathscr{O}_C(p - p_0)$$

es inyectiva.

Demostración. — Para ver (1), notamos que si deg es inyectivo y consideramos $p, q \in C$ puntos distintos, entonces $\deg(\mathscr{O}_C(p-q)) = 0$ implica que $p \sim q$ son divisores de Weil linealmente equivalentes, i.e., existe $f : C \dashrightarrow k$ función racional no-nula tal que $\mathrm{div}(f) = p - q$.

Tal como en la demostración de la Proposición anterior, tenemos que $F : C \to \mathbb{P}^1$ verifica por definición que $F^*0 = p$ y $F^*\infty = q$. Así, la Proposición 3.4.30 nos permite calcular

$$\underbrace{\deg(F^*0)}_{\deg(p)=1} = \deg(F)\underbrace{\deg(0)}_{=1},\ \text{i.e.,}\ \deg(F) = 1.$$

En otras palabras, $k(C) \cong k(\mathbb{P}^1)$, i.e., $C \sim_{\mathrm{bir}} \mathbb{P}^1$. Dado que C y $\mathbb{P}^1$ son curvas proyectivas *suaves*, esto equivale a que $C \cong \mathbb{P}^1$.

Para ver (2), notamos que si existieran $p, q \in C$ dos puntos distintos tales que $\mathscr{O}_C(p - p_0) \cong \mathscr{O}_C(q - p_0)$, entonces tendríamos que $\mathscr{O}_C(p - q) \cong \mathscr{O}_C$ es el fibrado trivial, i.e., $p \sim q$ son divisores de Weil linealmente equivalentes. La demostración de (1) permite entonces deducir que $C \cong \mathbb{P}^1$ en tal caso, lo cual es imposible por hipótesis. □

***Observación importante 3.4.32.* —** Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, sea $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ fibrado en rectas. Entonces,

$$|D| \overset{\mathsf{def}}{=} \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } D \sim E\} \cong \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(C, L).$$

Luego, si denotamos por $\varphi_L : C \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(C, L)^\vee) \overset{\mathsf{def}}{=} |D|^\vee$ la aplicación racional asociada al fibrado en rectas L, entonces tenemos que si L es:

(1) *globalmente generado*, entonces $\dim_k \mathrm{H}^0(C, L) \geq 1$. Luego, existe $E \geq 0$ tal que $E \sim D$, y por ende

$$\deg(L) \overset{\mathsf{def}}{=} \deg(D) = \deg(E) \geq 0.$$

(2) *muy amplio*, entonces $\dim_k \mathrm{H}^0(C, L) \geq 2$. Luego, existe $E \geq 0$ *no-nulo* tal que $E \sim D$, y por ende

$$\deg(L) \overset{\mathsf{def}}{=} \deg(D) = \deg(E) > 0.$$

(3) *amplio*, entonces $\deg(L) > 0$. En efecto, dado que

$$\deg(L^{\otimes m}) = m \deg(L) \text{ para todo } m \in \mathbb{Z},$$

basta considerar $m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $L^{\otimes m_0}$ sea muy amplio.

Más adelante, probaremos que todo fibrado en rectas con $\deg(L) > 0$ es amplio.

3.4.3. Grupo de Néron-Severi. — Sea X una variedad algebraica *proyectiva* e irreducible. Dado $D \in \mathrm{Div}(X)$ un divisor de Cartier y una curva $C \subseteq X$ *suave* e irreducible, definimos el **número de intersección** entre D y C como el entero

$$D \cdot C := \deg(\mathscr{O}_X(D)|_C) \in \mathbb{Z}.$$

Más generalmente, si C es una curva irreducible no necesariamente suave, consideramos la normalización $\nu : C^\nu \to C$, y se define

$$D \cdot C := \deg(\nu^*(\mathscr{O}_X(D)|_C)) \in \mathbb{Z},$$

el cual está definido gracias a que C^ν también es proyectiva en este caso, algo que probaremos más adelante. En particular,

Si $D_1 \sim D_2$ son divisores linealmente equivalentes en X, entonces $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

Definición 3.4.33. — Sea X una variedad algebraica proyectiva e irreducible, y sean $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ dos divisores de Cartier. Decimos que D_1 y D_2 son **numéricamente equivalentes** si

$$D_1 \cdot C = D_2 \cdot C \text{ para toda curva irreducible } C \subseteq X,$$

y en tal caso escribimos $D_1 \equiv D_2$ (o bien $D_1 \sim_{\mathrm{num}} D_2$). El grupo abeliano cociente

$$\mathrm{NS}(X) := \mathrm{Div}(X)/\equiv$$

es llamado el **grupo de Néron-Severi** de X.

El siguiente resultado de Néron (1952) y Severi (1934) se conoce usualmente como el *Teorema de base* y nos señala que, a diferencia del grupo de Picard, el grupo de Néron-Severi es mucho más tratable.

Teorema 3.4.34. — *Sea X una variedad algebraica proyectiva e irreducible. Entonces, el grupo abeliano* $\mathrm{NS}(X)$ *es* finitamente generado*. En particular,*

$$\mathrm{NS}(X) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T,$$

donde T es el grupo finito *de torsión, y donde el entero $r \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathrm{rg}(\mathrm{NS}(X)) =: \rho(X)$ se llama el* **número de Picard** *de X.*

Ejemplo 3.4.35. —
(1) Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, entonces $\mathrm{NS}(C) \cong \mathbb{Z}$ y luego $\rho(C) = 1$.
(2) $\rho(\mathbb{P}^n) = 1$.
(3) $\rho(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = 2$.
(4) $\rho(\mathrm{Bl}_Z(X)) = \rho(X) + 1$.

Finalmente, notamos que si X es una variedad algebraica proyectiva e irreducible y si $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas *amplio*, entonces $L|_C$ es amplio para toda curva irreducible $C \subseteq X$. Usando métodos de cohomología, probaremos que el hecho que $\nu : C^\nu \to C$ sea un morfismo *finito* implica que ν^*L es amplio en C^ν. Luego,

> Si $\mathscr{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas *amplio* en X, entonces $D \cdot C > 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$.

La observación anterior, motiva la siguiente definición (la cual es muy usada en geometría birracional).

Definición 3.4.36. — Sea X una variedad algebraica proyectiva e irreducible y $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas. Decimos que L es **nef** si

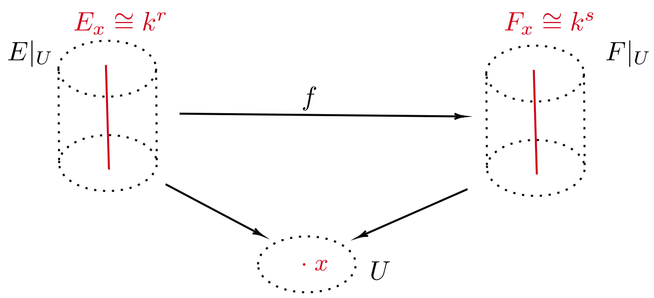
$$D \cdot C \geq 0 \text{ para toda curva irreducible } C \subseteq X.$$

Aquí, **nef** es la abreviación de *numéricamente efectivo*.

3.5. Sub-fibrados y fibrados cocientes

Durante esta sección, fijaremos una variedad algebraica (irreducible) X.

Recuerdo 3.5.1. — Sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de rangos $\mathrm{rg}(E) = r$ y $\mathrm{rg}(F) = s$. Un **morfismo de fibrados vectoriales** es un morfismo regular $f : E \to F$ tal que:
(1) $q \circ f = p$.



(2) Para todo $x \in X$, la aplicación $f_x : E_x \cong k^r \to F_x \cong k^s$ es k-lineal.

En este caso, definimos

$$\ker(f) := \bigcup_{x \in X} \ker(f_x) \subseteq E, \qquad \mathrm{Im}(f) := \bigcup_{x \in X} \mathrm{Im}(f_x) \subseteq F$$

A pesar de la notación sugerente, estas subvariedades pueden **no** ser fibrados vectoriales. En términos categóricos (que discutiremos más adelante), la categoría $\mathbf{Vect}(X)$ *no es una categoría abeliana.*

Ejercicio 3.5.2. — Dar un ejemplo de un morfismo $f : E \to F$ tal que $\dim_k(\ker(f_x))$ **no** sea constante en X.
Indicación: Considerar $X = \mathbb{A}^1$ y $E = F = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^1}$ el fibrado en rectas trivial.

Proposición 3.5.3. — *Sea $f : E \to F$ un morfismo de fibrados vectoriales sobre X tal que* $\mathrm{rg}(f) := \mathrm{rg}(f_x)$ *es* constante *para todo $x \in X$. Entonces,* $\ker(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$ *son fibrados vectoriales en X.*

Demostración. — La afirmación es local en X, por lo que en una trivialización común de E y F podemos suponer que $E = X \times k^r$ y $F = X \times k^s$, y que f está dado

$$(x, v) \mapsto (x, M(x)v)$$

donde $M(x) \in M_{s \times r}(k)$. Sea $x_0 \in X$ fijo y consideremos sub-espacios complementarios fijos

$$(\star) \qquad E_{x_0} = \ker(f_{x_0}) \oplus G \qquad \text{y} \qquad F_{x_0} = \mathrm{Im}(f_{x_0}) \oplus H$$

Dado que E y F están trivializados, tenemos que $E \cong X \times E_{x_0}$ y $F \cong X \times F_{x_0}$ y luego $(\star)$ nos da una descomposición de fibrados triviales en suma directa: $E = K \oplus G$ y $F = I \oplus H$. Así, f está dada por la matriz por bloques

$$M(x) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} K & G \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A(x) & B(x) \\ \hline C(x) & D(x) \end{array}\right) & \begin{array}{c} I \\ H \end{array} \end{array} \qquad \text{donde} \qquad M(x_0) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B(x_0) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

y con $B(x_0)$ invertible (pues $\mathrm{Im}(f_{x_0}) \cong E_{x_0}/\ker(f_{x_0})$). En particular, existe una vecindad abierta U de x_0 tal que $B(x)$ es invertible para todo $x \in U$. Restringiéndonos a dicha vecindad U, podemos suponer que $B(x)$ es invertible para todo $x \in X$.

Por otra parte, tenemos que

$$\ker(f) \overset{\text{def}}{=} \{(u, v) \in K \oplus G \text{ tal que } Au + Bv = 0,\ Cu + Dv = 0\}$$

por lo que si $(u, v) \in \ker(f)$ entonces $v = -B^{-1}Au$ y $(C - DB^{-1}A)u = 0$. Así,

$$\ker(f) = \{(u, -B^{-1}Au) \in K \oplus G \text{ tal que } (C - DB^{-1}A)u = 0\}$$

y dado que $\dim_k \ker(f_x) = \dim_k \ker(f_{x_0}) = \mathrm{rg}(K)$ para todo $x \in X$, tenemos que $C - DB^{-1}A = 0$, i.e., $C = DB^{-1}A$. En otras palabras, $\ker(f)$ está dado por el grafo

$$\ker(f) = \{(u, -B^{-1}Au),\ u \in K\} \cong K$$

y luego $\ker(f)$ es localmente trivial. De manera análoga, tenemos que

$$\mathrm{Im}(f) \overset{\mathsf{def}}{=} \{(Au + Bv, Cu + Dv) \text{ donde } u \in K,\ v \in G\}$$

y como $Cu + Dv = DB^{-1}(Au + Bv) = DB^{-1}w$ con $w := Au + Bv$, se tiene

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq \{(w, DB^{-1}w),\ w \in I\} \cong I.$$

Dado que $\mathrm{rg}(f_x) = \mathrm{rg}(f_{x_0}) = \mathrm{rg}(I)$ para todo $x \in X$, obtenemos que $\mathrm{Im}(f) \cong I$ es localmente trivial. □

Terminología 3.5.4. — Sea $f : E \to F$ un morfismo de fibrados vectoriales. Dos caso particulares importantes de lo anterior ocurren cuando:

(1) f es **inyectivo**: En tal caso, $\mathrm{Im}(f) \cong E$ es un fibrado vectorial, y decimos que E es un **sub-fibrado** de F, y escribimos

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F$$

o simplemente $E \subseteq F$.

(2) f es **sobreyectivo**: En tal caso, $\ker(f)$ es un sub-fibrado vectorial de E, y escribimos

$$E \overset{f}{\twoheadrightarrow} F \longrightarrow 0.$$

Observación importante 3.5.5. — En términos de matrices de transición, si $E \overset{\iota}{\hookrightarrow} F$ es un sub-fibrado y si trivializamos E y F simultaneamente (e.g. eligiendo una base local de $E|_U$ y completándola en una base de $F|_U$) obtenemos matrices de transición de F dadas por matrices por bloques de la forma

$$g_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & b_{ij} \\ \hline 0 & c_{ij} \end{array}\right)$$

donde a_{ij} es la matriz de transición de E. Más aún, la condición de cociclo $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ de F se reduce a:

(1) $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$, la condición de cociclo de E.

(2) $a_{ij}b_{jk} + b_{ij}c_{jk} = b_{ik}$, una condición mixta.

(3) $c_{ij}c_{jk} = c_{ik}$, una nueva condición de cociclo que define un fibrado vectorial Q de rango $\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}(F) - \mathrm{rg}(E)$.

El fibrado vectorial Q es el **fibrado cociente** $Q := F/E$. Más aún, hay una proyección natural $\pi : F \twoheadrightarrow Q$ sobreyectiva que cumple $\ker(\pi) \cong E$. En otras palabras, hay una **sucesión exacta** (S) de fibrados vectoriales en X

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow E \overset{\iota}{\hookrightarrow} F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q \longrightarrow 0.$$

¡Atención! — La escritura

$$g_{ij} = \left(\begin{array}{c:c} a_{ij} & b_{ij} \\ \hdashline 0 & c_{ij} \end{array}\right)$$

implica que $\det(g_{ij}) = \det(a_{ij})\det(c_{ij})$ y luego

$$\det(F) \cong \det(E) \otimes \det(Q) \text{ en } \mathrm{Pic}(X).$$

De manera similar, si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ tiene *funciones* de transición h_{ij} entonces (en una trivialización común) las matrices de transición de $F \otimes L$ son

$$g_{ij} \otimes h_{ij} = \left(\begin{array}{c:c} a_{ij}h_{ij} & b_{ij}h_{ij} \\ \hdashline 0 & c_{ij}h_{ij} \end{array}\right)$$

y luego la sucesión $(S) \otimes L$ dada por

$$0 \longrightarrow E \otimes L \hookrightarrow F \otimes L \twoheadrightarrow Q \otimes L \longrightarrow 0$$

es exacta.

Ejercicio 3.5.6. — Consideremos una sucesión exacta de fibrados vectoriales en X dada por

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow E \overset{\iota}{\hookrightarrow} F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q \longrightarrow 0.$$

(1) Probar que la **sucesión dual** $(S^\vee)$

$$0 \longrightarrow Q^\vee \overset{{}^t\pi}{\hookrightarrow} F^\vee \overset{{}^t\iota}{\twoheadrightarrow} E^\vee \longrightarrow 0$$

es exacta.

(2) Probar que para todo morfismo regular $\varphi : Y \to X$, el **pullback** $\varphi^*(S)$

$$0 \longrightarrow \varphi^*E \hookrightarrow \varphi^*F \twoheadrightarrow \varphi^*Q \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de fibrados vectoriales en Y.

Ejemplo importante 3.5.7. — Sea $V \cong k^n$ un k-espacio vectorial, y $1 \leq r \leq n-1$. Recordemos que en la variedad grassmanniana $G = \mathrm{Gr}(r, V)$ se tiene el **sub-fibrado tautológico** $S \subseteq V_G$, donde $V_G \overset{\mathsf{def}}{=} G \times V$ es el fibrado trivial de rango n y donde

$$S \overset{\mathsf{def}}{=} \{([\Lambda], v) \in \mathrm{Gr}(r, V) \times V \text{ tal que } v \in \Lambda\} \xrightarrow{p:=\mathrm{pr}_1} \mathrm{Gr}(r, V)$$

con $\mathrm{rg}(S) = r$. La construcción anterior nos permite definir el **cociente tautológico** $Q := V_G/S$, un fibrado vectorial en G de $\mathrm{rg}(Q) = n - r$. Por definición, $Q_{[\Lambda]} \cong V/\Lambda$ y la sucesión

$$0 \longrightarrow S \hookrightarrow V_G \twoheadrightarrow Q \longrightarrow 0$$

es exacta.

Utilizando lo anterior, es posible extender a fibrados vectoriales de rango arbitrario la noción de ser *globalmente generado* (cf. Definición 3.3.5).

Construcción 3.5.8. — Sea $E \to X$ un fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r$ y sea $V \subseteq H^0(X, E)$ un sub-espacio vectorial de secciones globales tal que

$$\dim_k(V) = n > r.$$

Entonces, tal como para sistemas lineales de un *fibrado en rectas* (ver Construcción 3.3.1), podemos definir una aplicación racional

$$\begin{aligned} \varphi_V : X &\dashrightarrow \mathrm{Gr}(n - r, V) \\ x &\longmapsto K_x := \{s \in V \text{ tal que } s(x) = 0_{E_x}\} \end{aligned}$$

donde $0_{E_x} \in E_x \cong k^r$ impone "*típicamente*" r condiciones de anulación independientes.

Más formalmente, φ_V está bien definida en $x \in X$ si y sólo si la aplicación de evaluación

$$\mathrm{ev}_x : V \longrightarrow E_x, \ s \longmapsto s(x)$$

verifica $\dim_k(\ker(\mathrm{ev}_x)) = n - r$, i.e., $\mathrm{rg}(\mathrm{ev}_x) = r$. Así, φ_V es regular en $x \in X$ siempre y cuando $\mathrm{ev}_x : V \twoheadrightarrow E_x$ sea sobreyectiva, es decir, cuando

$$0 \longrightarrow K_x \overset{\mathsf{def}}{=} \ker(\mathrm{ev}_x) \hookrightarrow V \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} E_x \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de k-espacios vectoriales.

Lo anterior motiva la siguiente generalización del concepto de fibrado en rectas globalmente generado.

Definición 3.5.9. — Sea $E \to X$ un fibrado vectorial de rango r y sea $V \subseteq \mathrm{H}^0(X, E)$ un sub-espacio vectorial de dimensión finita $n := \dim_k(V) > r$. Decimos que V es **globalmente generado** si la aplicación evaluación

$$\mathrm{ev}_x : V \twoheadrightarrow E_x \text{ es sobreyectiva para todo } x \in X,$$

i.e., $\varphi_V : X \to \mathrm{Gr}(n-r, V)$ es un morfismo regular. En particular, decimos que E es un **fibrado vectorial globalmente generado** si $\dim_k \mathrm{H}^0(X, E)$ es finita y $\mathrm{H}^0(X, E)$ es globalmente generado.

Ejemplo 3.5.10. — Sea $V \subseteq \mathrm{H}^0(X, E)$ globalmente generado, y sea

$$\varphi_V : X \longrightarrow \mathrm{Gr}(n-r, V)$$

el morfismo regular asociado. Consideremos la sucesión exacta tautológica en la grassmanniana $G = \mathrm{Gr}(n-r, V)$ dada por

$$0 \longrightarrow S \hookrightarrow V_G \twoheadrightarrow Q \longrightarrow 0, \text{ donde } \mathrm{rg}(Q) = r,$$

entonces el pullback de esta sucesión exacta vía φ_V nos da una sucesión exacta en X dada por

$$0 \longrightarrow \varphi_V^* S \overset{\mathsf{def}}{=} K = \ker(\mathrm{ev}) \hookrightarrow \varphi_V^* V_G \overset{\mathsf{def}}{=} V_X \twoheadrightarrow \varphi_V^* Q \longrightarrow 0,$$

y en particular tenemos que $\varphi_V^* Q \cong E$.

Ejercicio 3.5.11. — Utilizar la sucesión exacta obtenida en el Ejemplo 3.5.10 para dar una nueva demostración del hecho que si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ y $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, L)$ es un sistema lineal globalmente generado, entonces

$$\varphi_M^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}(M^\vee)}(1) \cong L.$$

Ejercicio 3.5.12. — Probar que si $L_1, \ldots, L_r \in \mathrm{Pic}(X)$ son fibrados en rectas globalmente generados, entonces el fibrado vectorial

$$E := L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$$

es globalmente generado.

3.6. Fibrado tangente, cotangente y normal

Durante esta sección, fijaremos una variedad algebraica *suave* e *irreducible* X de dimensión n. En particular, $\dim_k(T_x X) = \dim(X) = n$ para todo $x \in X$.

Construcción 3.6.1. — Veamos dos formas de construir T_X, un fibrado vectorial tal que para todo $x \in X$ se tiene que

$$(T_X)_x := T_{X,x} \cong T_x X \cong (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^\vee.$$

(1) **Usando el espacio cotagente.** Recordemos que para todo $x \in X$ se define
$$\Omega^1_{X,x} := T^\vee_{X,x} \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2.$$
Así, si consideramos un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de X y para cada $i \in I$ consideramos *coordenadas locales* $u^i_1, \ldots, u^i_n \in \mathscr{O}(U_i)$, i.e., funciones regulares tales que sus diferenciales $d_x u^i_1, \ldots, d_x u^i_n$ forman una base de $\Omega^1_{X,x}$ para todo $x \in U_i$ (ver Terminología 2.13.27).

Así, en $U_i \cap U_j$ podemos considerar la matriz de cambio de base $g_{ij}(x) \in \mathrm{GL}_n(k)$ que permite pasar de $\{d_x u^j_1, \ldots, d_x u^j_n\}$ a $\{d_x u^i_1, \ldots, d_x u^i_n\}$ para todo punto $x \in U_i \cap U_j$. En particular, dichas matrices verifican la condición de cociclo
$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik} \text{ en } U_i \cap U_j \cap U_k$$
y por ende definen un fibrado vectorial Ω^1_X en X, donde la fibra $\Omega^1_{X,x}$ corresponde al espacio cotangente en cada $x \in X$. En particular, $T_X := (\Omega^1_X)^\vee$ cumple que
$$T_{X,x} \cong T_x X \text{ para todo } x \in X.$$

(2) **Usando abiertos afines.** Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X tal que para todo $i \in I$ se tiene que
$$U_i \cong U \hookrightarrow \mathbb{A}^N \text{ variedad algebraica afín con } \mathcal{I}(U) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{A}^N),$$
y donde podemos asumir que $m = N-n$ dado que una variedad suave es localmente una intersección completa. En particular, para todo $x \in U$ tenemos que
$$T_x X \cong T_x U \cong \ker(d_x f)$$
donde $f : \mathbb{A}^N \to \mathbb{A}^m,\ x \longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ y donde
$$d_x f : T_x \mathbb{A}^N \cong k^N \longrightarrow T_{f(x)} \mathbb{A}^m \cong k^m$$
verifica que $\mathrm{rg}(d_x f) = N - \dim_k \ker(d_x f) = N - n = m$ dado que X es *suave*. Así, $d_x f$ es sobreyectiva para todo $x \in U$ y por ende podemos considerar el morfismo de fibrados vectoriales triviales en U
$$df : U \times k^N \longrightarrow U \times k^m,\ (x, v) \longmapsto (x, (d_x f)(v)).$$
El hecho que $d_x f$ sea sobreyectiva implica (gracias a la Proposición 3.5.3) que $T_X|_U := T_U := \ker(df)$ es un fibrado vectorial en U, que verifica por construcción que
$$T_{U,x} \cong T_x U \cong T_x X \text{ para todo } x \in U.$$

Finalmente, el atlas algebraico $\{U_i\}_{i\in I}$ induce un atlas algebraico que permite *pegar* los T_{U_i} en un fibrado vectorial T_X en X.

Definición 3.6.2. — Sea X una variedad algebraica suave e irreducible, el fibrado vectorial de rango $\dim(X)$ dado por:

(1) T_X es llamado el **fibrado tangente** de X.
(2) Ω_X^1 es llamado el **fibrado cotagente** de X.

Además, para $U \subseteq X$ abierto no-vacío las secciones de $\mathrm{H}^0(U, T_X|_U)$ y $\mathrm{H}^0(U, \Omega_X^1|_U)$ son llamadas **campos de vectores** (o vectores tangentes) y **1-formas diferenciales** en U, respectivamente.

Observación importante 3.6.3. — Sea X una variedad algebraica suave e irreducible.

(1) Para $p \in \{1, \ldots, \dim(X)\}$ el **fibrado de p-formas diferenciales** en X se define mediante $\Omega_X^p := \Lambda^p \Omega_X^1$. Concretamente, si $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{O}_X(U)$ son coordenadas locales en $U \subseteq X$, entonces $s \in \mathrm{H}^0(U, \Omega_X^p|_U)$ es de la forma

$$s(x) = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p\leq n} f_{j_1,\ldots,j_p}(x)\; d_x u_{j_1} \wedge \cdots \wedge d_x u_{j_p} \text{ con } f_{j_1,\ldots,j_p}(x) \in \mathscr{O}_X(U).$$

En particular, $\mathrm{rg}(\Omega_X^p) = \binom{n}{p}$ si $n = \dim(X)$.

(2) Es importante destacar que la construcción del fibrado tangente es functorial. Más precisamente, si $f : X \to Y$ es un morfismo regular entre variedades algebraicas suaves e irreducibles entonces la diferencial $d_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y \overset{\text{def}}{=} (f^* T_Y)_x$ induce un morfismo

$$df : T_X \longrightarrow f^* T_Y$$

de fibrados vectoriales <u>en X</u>, que también llamamos la diferencial de f.

(3) Con la notación del ítem (2), tenemos que $f : X \to Y$ es un **morfismo suave** si

$$df : T_X \twoheadrightarrow f^* T_Y$$

es un morfismo *sobreyectivo*. En tal caso, hay una sucesión exacta de fibrados vectoriales en X

$$0 \longrightarrow T_{X/Y} \hookrightarrow T_X \overset{df}{\twoheadrightarrow} f^* T_Y \longrightarrow 0,$$

donde $T_{X/Y} := \ker(df)$, también denotado T_f, es el **fibrado tangente relativo**. Así, la Proposición 2.14.6 implica que

$$(T_f)_x \overset{\text{def}}{=} (T_{X/Y})_x \cong T_x(f^{-1}(f(x))) \text{ para todo } x \in X.$$

Por definición, el **fibrado cotagente relativo** está dado por el fibrado dual $\Omega^1_f := \Omega^1_{X/Y} := (T_{X/Y})^\vee$, y por dualidad se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_Y \hookrightarrow \Omega^1_X \twoheadrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Ejemplo 3.6.4. —

(1) Sean X e Y variedades algebraicas suaves e irreducibles, entonces

$$T_{X\times Y} \cong \mathrm{pr}_X^* T_X \oplus \mathrm{pr}_Y^* T_Y.$$

(2) Para $\mathbb{A}^n$, tenemos que $T_{\mathbb{A}^n} \cong \mathbb{A}^n \times k^n$ es el fibrado *trivial* de rango n. En efecto, si identificamos $T_{\mathbb{A}^n}$ con su haz de secciones y consideramos coordenadas *globales* $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{A}^n$, entonces los campos de vectores $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathrm{H}^0(\mathbb{A}^n, T_{\mathbb{A}^n})$ dados por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n,p} \longrightarrow k,\ f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \text{ para todo } p \in \mathbb{A}^n$$

generan $\mathrm{H}^0(U, T_{\mathbb{A}^n}|_U)$ para todo abierto $U \subseteq \mathbb{A}^n$ (ver Ejemplo 2.13.5). En otras palabras, $T_{\mathbb{A}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}^{\oplus n}$.

Terminología 3.6.5. — Tal como en geometría diferencial, decimos que una variedad algebraica suave e irreducible X es **paralelizable** si $T_X \cong X \times k^{\dim(X)}$ es el fibrado vectorial trivial de rango $\dim(X)$, o equivalentemente si $T_X \cong \mathscr{O}_X^{\oplus \dim(X)}$ en términos de haces de secciones.

Es un hecho clásico de geometría diferencial que todo grupo de Lie es paralelizable. El siguiente resultado, cuya demostración puede leerse en detalle en el libro de David Mumford sobre variedades abelianas [**Mum08**], es la versión algebraica de lo anterior.

Proposición 3.6.6. — *Sea G un grupo algebraico* irreducible*. Entonces, G es paralelizable.*

Demostración. — Recordemos que todo grupo algebraico es suave, al ser un espacio homogéneo (ver Ejemplo 2.13.18). Consideremos $e \in G$ el neutro de G y definamos $\mathfrak{g} := T_eG$ (el *álgebra de Lie de G*). Entonces, para cada $g \in G$ consideramos el morfismo regular dado por *multiplicación por la izquierda*

$$L_g : G \longrightarrow G,\ h \longmapsto gh$$

con diferencial $d_eL_g : \mathfrak{g} \longrightarrow T_gG$. Veamos que

$$\varphi : G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} T_G,\ (g, v) \longmapsto (d_eL_g)(v)$$

es un isomorfismo de fibrados vectoriales.

Para esto último, consideremos $E := G \times \mathfrak{g}$ fibrado trivial y $F := T_G$. Por un lado, si denotamos por $\mathscr{E}$ y $\mathscr{F}$ los haces de sección respectivos, entonces $\varphi_x : E_x \xrightarrow{\sim} F_x$ es un isomorfismo de k-espacios vectoriales para todo $x \in G$ (dado que G es suave).

Por otro lado, tenemos que $E_x \cong \mathscr{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{E}_x$ y $F_x \cong \mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x$ (ver Observación 3.2.11). Luego, el Lema de Nakayama (ver Recuerdo 3.3.8) implica que $\varphi_x : \mathscr{E}_x \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_x$ es un isomorfismo de tallos para todo $x \in G$. Así, como $\mathscr{E}$ y $\mathscr{F}$ son haces, tenemos que $\varphi : \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}$ es un isomorfismo de haces (ver Proposición 1.3.29), i.e., $T_G \cong G \times \mathfrak{g}$ es trivial. □

Ejemplo 3.6.7. — Los grupos algebraicos de matrices $\mathbb{G}_a^n \overset{\text{def}}{=} (k^n, +) \cong \mathbb{A}^n$, $\mathbb{G}_m^n \overset{\text{def}}{=} ((k^*)^n, \times)$, $\mathrm{GL}_n(k)$, $\mathrm{SL}_n(k)$, $\mathrm{PGL}_n(k)$, etc. son variedades algebraicas paralelizables. Además, si A es una **variedad abeliana** (i.e., A es un grupo algebraico irreducible proyectivo) entonces $T_A \cong \mathscr{O}_A^{\oplus \dim(A)}$ es trivial.

Recíprocamente, es posible probar que si $\mathrm{car}(k) = 0$ y X es una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible tal que T_X es trivial, entonces X es una variedad abeliana. Sin embargo, existen contraejemplos si $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Para más detalles, ver [**MS87**].

Un ejemplo muy importante es el caso del espacio proyectivo.

Proposición 3.6.8. — *Sea $V \cong k^{n+1}$ un k-espacio vectorial y $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ su proyectivización. Entonces, hay una sucesión exacta de fibrados vectoriales en $\mathbb{P}(V)$, llamada la* **sucesión exacta de Euler**

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \hookrightarrow V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0,$$

o equivalentemente se tiene la sucesión exacta dual

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}(V)} \hookrightarrow V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0.$$

Aquí, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}$ es el fibrado en rectas trivial y $V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}$.

Demostración. — En $V \cong \mathbb{A}^{n+1}$ con coordenadas $x_0, \dots, x_n$ tenemos que $\frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ son generadores de $T_{\mathbb{A}^{n+1}}$. Sin embargo, si $f, g \in \mathscr{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ son polinomios homogéneos de grado d, entonces (dado que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ son homogéneos de grado $d-1$) la fórmula de Leibniz implica que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(\lambda x) = \frac{\lambda^{d+d-1}}{\lambda^{2d}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

y luego $\frac{\partial}{\partial x_i}$ **no** está bien definido en $\mathbb{P}^n$, pero $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ **sí** lo está.

Con lo anterior en mente, consideremos $x = [\ell] \in \mathbb{P}(V)$ con $\ell \cong k$ una recta en V. Por definición, tenemos que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{[\ell]} \overset{\mathsf{def}}{=} \ell$ y luego $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)_{[\ell]} \overset{\mathsf{def}}{=} \ell^\vee$ es el dual $\ell^\vee = \{\varphi : \ell \to k \text{ lineal}\}$ del espacio vectorial ℓ. Construyamos un morfismo

$$\Phi : V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \longrightarrow T_{\mathbb{P}(V)}$$

de la manera siguiente:

Para $v \in V$ y $\varphi \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)_{[\ell]} \overset{\mathsf{def}}{=} \ell^\vee$, definimos $\Phi(v \otimes \varphi) := \partial_{v\otimes\varphi} \in T_{\mathbb{P}(V),[\ell]}$ como la aplicación k-lineal que a cada germen $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V),[\ell]}$, dado por cociente de polinomios homogéneos del mismo grado, le asigna

$$\partial_{v\otimes\varphi}(f) := \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial v}(x),$$

que es independiente del vector $x \in \ell \setminus \{0\}$ escogido.

Notar que Φ es sobreyectivo, pues en el abierto $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ podemos considerar $\varphi_0 = x_0 = 1$ y los $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $v = e_i$ generan $T_{U_0} \cong T_{\mathbb{A}^n}$. De manera completamente análoga para los otros abiertos estándar $U_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$.

Luego, $L := \ker(\Phi)$ es un fibrado vectorial cuyo rango está dado por $\mathrm{rg}(L) = \dim(V) - \dim(\mathbb{P}(V)) = 1$, i.e., $L \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(V))$. Para ver que L es el fibrado trivial, consideremos

$$s := \sum_{i=0}^{n} e_i \otimes e_i^*$$

sección global nunca nula, y notamos que $\Phi(s) \overset{\mathsf{def}}{=} \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$ gracias a la identidad de Euler (cf. Ejemplo 2.13.14 (3))

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \deg(f) \cdot f \overset{\mathsf{def}}{=} 0 \cdot f = 0$$

aplicada a cualquier germen $f \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V),[\ell]}$ dado por cociente de polinomios homogéneos del *mismo grado*. Así, $s \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}(V), L)$ es una sección global nunca nula, i.e., $L \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}$ es el fibrado en rectas trivial. $\square$

Terminemos esta sección introduciendo la noción de *fibrado normal.*

En todo lo que sigue de la sección, consideremos $Y \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ una sub-variedad suave e irreducible de X (que también lo es). Entonces, para todo $y \in Y$ la aplicación lineal

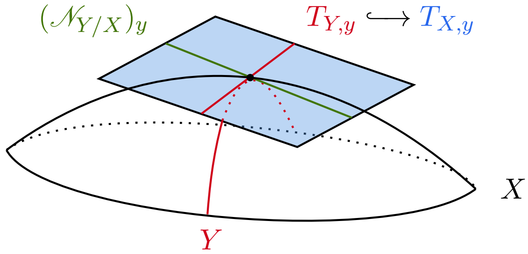
$$d_y\iota : T_yY \longhookrightarrow T_yX \overset{\mathsf{def}}{=} (\iota^*T_X)_y \overset{\mathsf{def}}{=} (T_X|_Y)_y$$

es inyectiva, i.e., $d\iota : T_Y \hookrightarrow T_X|_Y$ es un sub-fibrado vectorial.

Definición 3.6.9. — Dada $Y \xhookrightarrow{\iota} X$ una sub-variedad suave e irreducible de X, definimos el **fibrado normal** de Y en X como el fibrado cociente

$$\mathscr{N}_{Y/X} := \operatorname{coker}(d\iota) \overset{\text{def}}{=} (T_X|_Y)/T_Y$$

donde $\operatorname{rg}(\mathscr{N}_{Y/X}) = \dim(X) - \dim(Y) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{codim}_X(Y)$.



Luego, hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow T_Y \xhookrightarrow{d\iota} T_X|_Y \twoheadrightarrow \mathscr{N}_{Y/X} \longrightarrow 0$$

de fibrados vectoriales en Y, o equivalentemente se tiene la sucesión exacta dual

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}^\vee_{Y/X} \hookrightarrow \Omega^1_X|_Y \xrightarrow{{}^t d\iota} \Omega^1_Y \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{N}^\vee_{Y/X}$ es el **fibrado conormal** de Y en X.

Veremos que el fibrado normal es especialmente fácil de comprender en el caso de sub-variedades definidas por secciones de un fibrado vectorial.

Construcción 3.6.10. — Sea $E \to X$ un fibrado vectorial de $\operatorname{rg}(E) = r$ y sea $s \in \mathrm{H}^0(X, E)$ una sección no-nula. En una trivialización $E|_U \cong U \times \mathbb{A}^r$ escogemos un marco de referencia $(e_1, \dots, e_r)$ (i.e., $(e_1(x), \dots, e_r(x))$ forman una base de $E_x \cong k^r$ para todo $x \in U$) y escribimos entonces

$$s = \sum_{i=1}^r f_i e_i \text{ donde } f_i \in \mathscr{O}_X(U) \text{ función regular.}$$

Luego, el cerrado $V(s) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0\} \subseteq X$ está dado localmente por $V(s)|_U = V(f_1, \dots, f_r)$. Así, para cada $x \in V(s)$ definimos

$$d_x s : T_x X \longrightarrow E_x$$

como la aplicación k-lineal dada (localmente en U) por la fórmula

$$d_x s := \sum_{i=1}^r d_x f_i \cdot e_i(x),$$

donde $d_x f_i : T_x X \to T_{f_i(x)}\mathbb{A}^1 \cong k$, y donde $d_x s$ **no**[6] depende de los f_i y e_i siempre y cuando $x \in V(s)$.

Con la notación anterior, decimos que $s : X \to E$ es **transversal a la sección nula** si

$$d_x s : T_x X \twoheadrightarrow E_x \text{ es sobreyectiva para todo } x \in V(s).$$

En particular, $\mathrm{rg}(E) \leq \dim(X)$ en tal caso.

Teorema 3.6.11. — *Sea $E \to X$ un fibrado vectorial de* $\mathrm{rg}(E) = r \leq \dim(X) = n$, *y sea $s \in \mathrm{H}^0(X, E) \setminus \{0\}$ sección no-nula. Entonces:*

(1) *La sección s es transversal a la sección nula si y sólo si $V(s) \subseteq X$ es una sub-variedad* suave *de* $\dim(V(s)) = n - r$. *Más aún, en tal caso se tiene que*

$$\mathscr{N}_{V(s)/X} \cong E|_{V(s)}.$$

(2) *Supongamos que* $\mathrm{car}(k) = 0$, *y sea $M \subseteq \mathrm{H}^0(X, E)$ globalmente generado, i.e., la aplicación*

$$\mathrm{ev}_x : M \twoheadrightarrow E_x, \ s \longmapsto s(x)$$

es sobreyectiva para todo $x \in X$. Entonces, para $s \in M$ sección general *la sub-variedad $V(s) \subseteq X$ es suave.*

Demostración. — Para el ítem (1) consideramos $V(s)|_U = V(f_1, \ldots, f_r)$ como antes, y suponemos que $s : X \to E$ es transversal a la sección nula. Esto implica en particular que los $d_x f_i$ son linealmente independientes, y luego existen coordenadas locales $u_1, \ldots, u_n$ en U tales que $u_1 = f_1, \ldots, u_r = f_r$. Así, $V(f_1, \ldots, f_r)$ es suave de dimensión $n - r$ gracias a la Proposición 2.13.28.

Recíprocamente, si $Y := V(s)$ es suave de dimensión $\dim(Y) = n - r$, entonces

$$\dim_k T_y Y = n - r \text{ para todo } y \in Y, \text{ donde } T_y Y \cong \ker(d_y s).$$

Luego, el teorema del rango implica que $d_y s$ es sobreyectiva para todo $y \in Y$. Más aún, en tal caso se tienen isomorfismos canónicos

$$E_y = \mathrm{Im}(d_y s) \cong T_y Y / \ker(d_y s) \cong T_y X / T_y Y \overset{\mathsf{def}}{=} (\mathscr{N}_{Y/X})_y \text{ para todo } y \in Y,$$

i.e., $\mathscr{N}_{Y/X} \cong E|_Y$.

[6] Si $(e'_1, \ldots, e'_r)$ es otro marco de referencia en U, escribimos $e_i = \sum_j a_{ij} e'_j$ y luego $s = \sum_j f'_j e'_j$, donde $f'_j = \sum_i a_{ij} f_i$. Como $x \in V(s)$, tenemos que $d_x f'_j = \sum_i a_{ij}(x) d_x f_i$ y por ende $\sum_i (d_x f_i) e_i(x) = \sum_j (d_x f'_j) e'_j(x)$.

Finalmente, para el ítem (2) notamos que el mismo argumento de suavidad genérica utilizado en el caso de fibrados en recta (ver 3.3.12) que existe $U \subseteq M$ un abierto denso tal que para toda $s \in U$ se tiene que $V(s) \subseteq X$ es suave. $\square$

Ejemplo importante 3.6.12. — Suponamos que

$$E := L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$$

es suma directa de fibrados en rectas. Si $s_i \in \mathrm{H}^0(X, L_i) \setminus \{0\}$ son secciones no-nulas tales que $Y := V(s_1, \ldots, s_r) \subseteq X$ es suave e irreducible de $\mathrm{codim}_X(Y) = r$ (i.e., Y es una *intersección completa*) entonces:

$$\mathscr{N}_{Y/X} \cong (L_1 \oplus \cdots \oplus L_r)|_Y \cong L_1|_Y \oplus \cdots \oplus L_r|_Y$$

es el fibrado normal de Y en X. En particular, si $r = 1$ e $Y = V(s)$ es una hipersuperficie suave entonces

$$\mathscr{N}_{Y/X} \cong L|_Y, \text{ donde } L \cong \mathscr{O}_X(Y).$$

¡Atención! — Debido a este último ejemplo, es muy común que algunos textos utilicen el abuso de notación "$Y|_Y$" para referirse a $\mathscr{O}_X(Y)|_Y \in \mathrm{Pic}(Y)$.

3.7. Divisor canónico y dimensión de Kodaira

En esta sección presentamos al *héroe de la película*: el divisor (o fibrado en rectas) canónico, probablemente una de las nociones más importantes en geometría algebraica.

Definición 3.7.1. — Sea X una variedad algebraica suave e irreducible. Definimos el **fibrado en rectas canónico** de X como

$$\omega_X := \det(\Omega_X^1) \cong \Lambda^{\dim(X)}\Omega_X^1.$$

Un **divisor canónico** es cualquier divisor K_X en $\mathrm{Div}(X) \cong \mathrm{WDiv}(X)$ tal que

$$\omega_X \cong \mathscr{O}_X(K_X) \text{ en } \mathrm{Pic}(X).$$

El fibrado dual $\omega_X^\vee \cong \mathscr{O}_X(-K_X)$ es llamado el **fibrado en rectas anti-canónico**, y $-K_X$ es llamado un **divisor anti-canónico**.

Ejemplo 3.7.2. —

(1) Dado que $T_{\mathbb{A}^n} \cong \Omega^1_{\mathbb{A}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}^{\oplus n}$ es el fibrado trivial, tenemos que $\omega_{\mathbb{A}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}$ y que $K_{\mathbb{A}^n} = 0$ es un divisor canónico.

(2) Más generalmente, si G es un grupo algebraico irreducible entonces $\omega_G \cong \mathscr{O}_G$ es trivial. En particular, si

$$A \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

es una **variedad abeliana** entonces $\omega_A \cong \mathscr{O}_A$ es trivial.

(3) La sucesión exacta de Euler

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n} \hookrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

implica que $\det(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)}) \cong \det(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}) \otimes \det(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n})$, i.e.,

$$\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \text{ en } \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}.$$

Así, $K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)H$ es un divisor canónico de $\mathbb{P}^n$, donde $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ es un hiperplano.

***Teorema 3.7.3* (Fórmula de Adjunción). —** *Sea X una variedad algebraica suave e irreducible, y sea $E \longrightarrow X$ un fibrado vectorial de* $\operatorname{rg}(E) := r \leq n =: \dim(X)$. *Supongamos que $s \in \mathrm{H}^0(X, E) \setminus \{0\}$ es una sección global no-nula tal que $Y := V(s) \subseteq X$ es una sub-variedad suave de* $\dim(Y) = n - r$. *Entonces,*

$$\omega_Y \cong \omega_X|_Y \otimes \det(\mathscr{N}_{Y/X}) \cong (\omega_X \otimes \det(E))|_Y.$$

En particular, si $Y \subseteq X$ es una hipersuperficie *y $L \cong \mathscr{O}_X(Y)$ en* $\operatorname{Pic}(X)$*, entonces se tiene que*

$$\omega_Y \cong (\omega_X \otimes L)|_Y \text{ en } \operatorname{Pic}(Y),$$

i.e., $K_Y = (K_X + Y)|_Y$ en $\operatorname{Div}(Y) \cong \operatorname{WDiv}(Y)$.

Demostración. — Dado que $s : X \longrightarrow E$ es una sección transversal a la sección nula, tenemos que $\mathscr{N}_{Y/X} \cong E|_Y$. Por otra parte, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}^\vee_{Y/X} \hookrightarrow \Omega^1_X|_Y \twoheadrightarrow \Omega^1_Y \longrightarrow 0$$

implica que tenemos que

$$\omega_X|_Y \overset{\mathsf{def}}{=} \det(\Omega^1_X|_Y) \cong \det(\mathscr{N}^\vee_{Y/X}) \otimes \det(\Omega^1_Y) \overset{\mathsf{def}}{=} \det(\mathscr{N}_{Y/X})^\vee \otimes \omega_Y,$$

i.e., $\omega_Y \cong \omega_X|_Y \otimes \det(\mathscr{N}_{Y/X})$. □

***Ejercicio 3.7.4.* —** Sean $L_1, \dots, L_r \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrados en rectas, y sean $s_i \in \mathrm{H}^0(X, L_i) \setminus \{0\}$ secciones no-nulas para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, de tal suerte que $Y := V(s_1, \dots, s_r) \subseteq X$ es *suave* de $\operatorname{codim}_X(Y) = r$. Probar que

$$\omega_Y \cong (\omega_X \otimes L_1 \otimes \cdots \otimes L_r)|_Y \text{ en } \operatorname{Pic}(Y),$$

i.e., $K_Y = (K_X + Y_1 + \cdots + Y_r)|_Y$ en $\mathrm{Div}(Y) \cong \mathrm{WDiv}(Y)$, donde cada $Y_i := V(s_i)$ es un divisor en X.

Notación 3.7.5. — Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva irreducible, entonces para cada $d \in \mathbb{Z}$ denotamos

$$\mathscr{O}_X(d) := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X \text{ en } \mathrm{Pic}(X).$$

En particular, $\mathscr{O}_X(1)$ es *muy amplio* y

$$\varphi_{\mathscr{O}_X(1)} : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

coincide con la inclusión de X en $\mathbb{P}^n$. Más generalmente, una **polarización** en X es fijar un fibrado en rectas *amplio* (o *muy amplio*) L en X, y decimos que el par (X, L) es una **variedad algebraica polarizada**. Una excelente referencia para introducirse a la clasificación de variedades polarizadas es el libro de Takao Fujita [**Fuj90**].

Ejemplo importante 3.7.6. — Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie suave e irreducible de grado d. Entonces, la fórmula de adjunción implica que

$$\omega_X \cong (\omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(X))|_X \cong (\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))|_X \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{O}_X(d-n-1).$$

Más generalmente, si $X = X_{d_1,\ldots,d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ es una *intersección completa* suave e irreducible dada por $V(f_1, \ldots, f_r)$ con $\deg(f_i) = d_i$, entonces el Ejercicio anterior implica que

$$\omega_X \cong \mathscr{O}_X\left(-n-1+\sum_{i=1}^{r} d_i\right).$$

Un caso particular de estos ejemplos es el caso de una curva plana proyectiva suave e irreducible $C \subseteq \mathbb{P}^2$ de grado d. En tal caso, tenemos que

$$\omega_C \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^1_C \cong \mathscr{O}_C(d-3) \text{ en } \mathrm{Pic}(C).$$

En particular, si asumimos que C puede ser dotado con estructura de grupo (i.e., es una *variedad abeliana*) entonces necesariamente $d = 3$.

Recíprocamente, utilizando el Teorema de Abel-Jacobi, es posible probar que si $d = 3$ entonces C posee efectivamente estructura de grupo abeliano. En tal caso, decimos que C es una **curva elíptica**.

La *positividad* del fibrado en rectas canónico permite distinguir entre tres grandes clases de variedades algebracias proyectivas suaves.

Definición 3.7.7. — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible. Decimos que X es una

(1) **Variedad de Fano** si $\omega_X^\vee \cong \mathscr{O}_X(-K_X)$ es amplio.

(2) **Variedad de Calabi-Yau**[7] si $\omega_X \cong \mathscr{O}_X$ es trivial.
(3) **Variedad canónicamente polarizada** si $\omega_X \cong \mathscr{O}_X(K_X)$ es amplio.

Ejemplo 3.7.8. — Sea $X = X_{d_1,\dots,d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ es una *intersección completa* suave e irreducible dada por $V(f_1,\dots,f_r)$ con $\deg(f_i) = d_i$, entonces la fórmula de adjunción implica que:

(1) X es una variedad de Fano si y sólo si $\sum_{i=1}^r d_i \leq n$.
(2) X es una variedad de Calabi-Yau si y sólo si $\sum_{i=1}^r d_i = n+1$.
(3) X es una variedad canónicamente polarizada si y sólo si $\sum_{i=1}^r d_i \geq n+2$.

Ejercicio 3.7.9. — Determinar las posibles intersecciones completas suaves e irreducibles $X_{d_1,\dots,d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ de Calabi-Yau de dimensión ≤ 3.

Ejercicio 3.7.10. — Sea X una variedad de Fano, y supongamos que existe $Y \in |-K_X|$ divisor anti-canónico *suave* e irreducible. Probar que Y es una variedad de Calabi-Yau.

Para medir la *positividad* del fibrado en rectas canónico ω_X es natural estudiar el crecimiento de sus espacios de secciones globales.

Definición 3.7.11. — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible. Para $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, el **$m$-ésimo plurigénero** de X está dado por

$$P_m(X) := \dim_k \mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(mK_X)).$$

Para $m = 1$, escribimos

$$p_g(X) := \dim_k \mathrm{H}^0(X, \omega_X) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(K_X))$$

en lugar de $P_1(X)$, y decimos que $p_g(X)$ es el **género geométrico** de X.

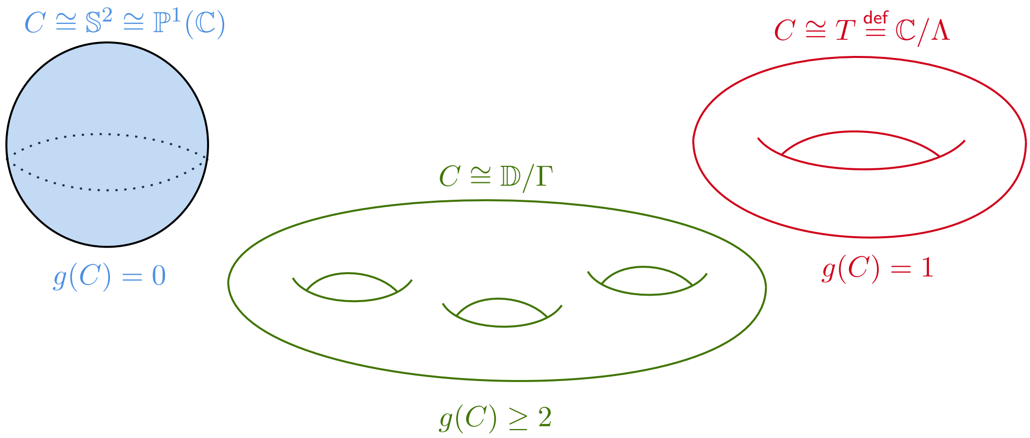
Más aún, en el caso de una *curva algebraica* C escribimos $g(C)$ en lugar de $p_g(C)$, y decimos que

$$g(C) := \dim_k \mathrm{H}^0(C, \omega_C) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(C, \Omega_C^1)$$

es el **género** de C.

Observación importante 3.7.12. — Supongamos que $k = \mathbb{C}$. Entonces, una curva algebraica proyectiva suave e irreducible $C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ puede verse como una *superficie real* compacta orientable (o más generalmente, como una *superficie de Riemann*).

[7] Es común relajar la definición de variedad de Calabi-Yau piendo simplemente que K_X sea *numéricamente trivial*, i.e., $K_X \cdot C = 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$.



Se puede probar (e.g. usando Teoría de Hodge) que $g(C)$ es el número de "*agujeros*" de C al ser vista como superficie real.

Ejercicio 3.7.13. — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) \geq 1$.

(1) Probar que si $L \cong \mathscr{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(X)$ es un fibrado en rectas *amplio*, entonces
$$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(-mD)) = 0 \text{ para todo } m \geq 1.$$
Indicación: Considerar $m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $\mathscr{O}_X(m_0 D)$ es muy amplio, *y deducir que para todo $m \geq 1$ el fibrado $\mathscr{O}_X(mm_0 D)$ es muy amplio. Concluir utilizando el hecho que si $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(-mD))$ es no-nula, entonces $s^{\otimes m_0} \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(-mm_0 D))$ es no-nula.*

(2) Utilizar (1) para probar que si X es una variedad de Fano, entonces $P_m(X) = 0$ para todo $m \geq 1$.

(3) Probar que $P_m(X) = 1$ para todo $m \geq 1$ si X es de Calabi-Yau.

Teorema 3.7.14. — *Sean X e Y variedades algebraicas proyectivas suaves e irreducibles, y supongamos que $X \sim_{\mathrm{bir}} Y$ son* birracionales. *Entonces,*
$$\mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \cong \mathrm{H}^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \text{ para todo } m \in \mathbb{N}^{\geq 1}.$$
En particular, los plurigéneros $P_m(X) = P_m(Y)$ son invariantes birracionales.

Demostración. — Dividiremos la pruebas en pasos relativamente independientes.

Paso 1. Sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas y $Z \subseteq X$ cerrado tal que $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$, entonces la aplicación lineal

$$\mathrm{H}^0(X, L) \xrightarrow[\sim]{\text{res}} \mathrm{H}^0(X \setminus Z, L|_{X \setminus Z})$$

es un isomorfismo (cf. Teorema de Hartogs):

La inyectividad se obtiene considerando secciones como divisores de Weil efectivos (ver Proposición 3.4.13). Para la sobreyectividad, consideramos una sección $s \in \mathrm{H}^0(X \setminus Z, L|_{X \setminus Z})$ y un punto $z \in Z$. Trivializando $L|_U \cong U \times \mathbb{A}^1$ en una vecindad $U \subseteq X$ de $z \in Z$, tenemos que $s(x) \underset{\mathsf{loc}}{=} (x, f(x))$ con

$$f : U \setminus Z \longrightarrow k \text{ función regular,}$$

que induce $f : U \dashrightarrow k$ función racional. Notamos que $\mathrm{div}(f) \geq 0$ es un divisor *efectivo* en $\mathrm{Div}(U)$ (pues los polos están en codimensión 1). Así, el hecho que U es suave implica que f es regular. En otras palabras, existe $\sigma \in \mathrm{H}^0(X, L)$ tal que $\sigma|_{X \setminus Z} = s$.

Paso 2. Sea $f : U \xrightarrow{\sim} V$ un morfismo birregular entre variedades algebraicas suaves e irreducibles. Entonces, f induce

$$F : \mathrm{H}^0(V, \omega_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, \omega_U)$$

que es un isomorfismo k-lineal:

Por functorialidad, f induce un isomorfismo $df : T_U \xrightarrow{\sim} f^*T_V$, y por ende ${}^{\mathrm{t}}df : f^*\Omega^1_V \xrightarrow{\sim} \Omega^1_U$ al dualizar. Del mismo modo, la functorialidad del producto exterior implica que

$$\Lambda^d({}^{\mathrm{t}}df) : f^*\Omega^p_V \xrightarrow{\sim} \Omega^p_U$$

es un isomorfismo para todo $p \geq 1$. Por otro lado, f induce un isomorfismo

$$\Gamma(f) : \mathrm{H}^0(V, \Omega^p_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, f^*\Omega^p_V)$$

para todo $p \geq 1$. Finalmente, componiendo $\Gamma(f)$ con $\Lambda^d({}^{\mathrm{t}}df)$, obtenemos isomorfismos

$$F : \mathrm{H}^0(V, \Omega^p_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, \Omega^p_U)$$

para todo $p \geq 1$. En particular, para $p = \dim(U) = \dim(V)$, obtenemos el isomorfismo $F : \mathrm{H}^0(V, \omega_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, \omega_U)$. Mejor aún, la functorialidad del producto tensorial implica que

$$(F)^{\otimes m} : \mathrm{H}^0(V, \omega_V^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(U, \omega_U^{\otimes m})$$

es un isomorfismo para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Paso 3. La aplicación birracional $f : X \dashrightarrow Y$ induce un isomorfismo
$$\mathrm{H}^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m})$$
para todo $m \geq 1$:

Con las hipótesis del Teorema, existe $Z \subsetneq X$ cerrado de $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$ tal que si $U := X \setminus Z$, entonces $f|_U : U \to Y$ es un morfismo regular (ver Corolario 2.13.25). Así, $f|_U$ induce un morfismo
$$\mathrm{H}^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{H}^0(U, \omega_U^{\otimes m}) \cong \mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m}).$$
El mismo argumento aplicado a la aplicación birracional $g = f^{-1} : Y \dashrightarrow X$ nos da $\mathrm{H}^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \xrightarrow{\psi} \mathrm{H}^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$, y la functorialidad de la construcción implica que ψ es la inversa de φ. $\square$

Ejemplo 3.7.15. —

(1) La demostración anterior también prueba que los espacios vectoriales $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X^p)$ son invariantes birracionales para todo $p \geq 1$.

(2) Dado que $\omega_{\mathbb{P}^n}^\vee \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1)$ es amplio, tenemos que $\mathbb{P}^n$ es una variedad de Fano. En particular, $P_m(\mathbb{P}^n) = 0$ para todo $m \geq 1$.

Por otro lado, si $X_d \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ es una hipersuperficie suave irreducible de grado $d \geq n+2$, entonces $P_m(X_d) \neq 0$ para todo $m \geq 1$ (gracias a la fórmula de adjunción). En particular,

Una hipersuperficie suave e irreducible $X_d \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ de grado d **no** es racional (i.e., no es birracional a $\mathbb{P}^n$) para todo $d \geq n+2$.

Uno de los invariantes birracionales más importantes de una variedad algebraica es su *dimensión de Kodaira* (cf. Definición 3.3.16), introducida por Iitaka en honor a Kunihiko Kodaira (1915-1997).

Definición 3.7.16. — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible. La **dimensión de Kodaira** de X, denotada $\kappa(X)$, es la dimensión de Iitaka del fibrado en rectas canónico ω_X. Explícitamente,
$$\kappa(X) \overset{\mathsf{def}}{=} \begin{cases} \max\limits_{m \in \mathbb{N}^{\geq 1}} \dim\left(\overline{\varphi_{\omega_X^{\otimes m}}(X)}\right) & \text{si existe } m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } P_{m_0}(X) \neq 0 \\ -\infty & \text{si } P_m(X) = 0 \text{ para todo } m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \end{cases}$$
En particular, $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, \dim(X)\}$. Más aún, decimos que X es **de tipo general** si tiene dimensión de Kodaira maximal $\kappa(X) = \dim(X)$, i.e., si ω_X es un fibrado en rectas *big*.

Ejemplo importante 3.7.17. — Sean X e Y variedades algebraicas proyectivas suaves e irreducibles.

(1) Si $X \sim_{\text{bir}} Y$, entonces $\kappa(X) = \kappa(Y)$. En particular, $\kappa(\text{Bl}_Z(X)) = \kappa(X)$.
(2) Si $X \sim_{\text{bir}} \mathbb{P}^n$ es una variedad racional, entonces $\kappa(X) = -\infty$.
(3) Sea $C \subseteq \mathbb{P}^2$ una curva proyectiva suave e irreducible de grado $d \geq 1$. Entonces,

$$\kappa(C) = \begin{cases} -\infty & \text{si } d \leq 2 \\ 0 & \text{si } d = 3 \\ 1 & \text{si } d \geq 4 \end{cases}$$

Ejercicio 3.7.18. — Sean X e Y variedades algebraicas proyectivas suaves e irreducibles. Probar que

$$\omega_{X\times Y} \cong \omega_X \boxtimes \omega_Y \text{ en } \operatorname{Pic}(X \times Y),$$

y deducir que $\kappa(X \times Y) = \kappa(X) + \kappa(Y)$, donde se define $-\infty + d := -\infty$ para todo $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. En particular, $\kappa(X \times \mathbb{P}^n) = -\infty$.

En el caso de hipersuperficies del espacio proyectivo, es posible calcular el género geométrico explícitamente.

Proposición 3.7.19. — *Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie suave e irreducible de grado d. Entonces,*

$$p_g(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq n \\ \binom{d-1}{n} & \text{si } d \geq n+1 \end{cases}$$

En particular, para toda curva proyectiva suave e irreducible $C \subseteq \mathbb{P}^2$ de grado d se tiene la **fórmula de Plücker**

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Demostración. — En $U := U_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$, tenemos que $X \cap U = V(g)$ con $g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) = f(1, x_1, \ldots, x_n)$. Definamos

$$V_i := \left\{ x \in U \text{ tal que } \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \neq 0 \right\} \subseteq U$$

y notemos que $U = \bigcup_{i\in I} V_i$ pues X es suave.

Más aún, $x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n$ (i.e., se omite x_i) son coordenadas locales de la variedad $X \cap U_0$ al ser vista en V_i, pues la identidad de Euler

$$(E) \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx_j = 0$$

permite despejar dx_i en función de las otras dx_j. Así, $dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ es un generador de $\mathrm{H}^0(X \cap V_i, \omega_{X \cap V_i})$ como $\mathscr{O}_X(X \cap V_i)$-módulo, el cual reescalamos convenientemente en

$$(\star) \qquad \omega_i := \omega_i^0 := \frac{(-1)^{i-1}}{\partial g/\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Por otra parte, la relación

$$(E) \wedge (dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n) \text{ en } V_i \cap V_j$$

equivale precisamente a que $\omega_i^0 = \omega_j^0$, i.e., $\omega^0 = \{\omega_i^0\}_{i \in I}$ se pega en una sección de ω_X en $X \cap (\bigcup_{i \in I} V_i) \overset{\text{def}}{=} X \cap U_0$. Veamos qué ocurre al considerar un cambio de carta:

En $U_1 \overset{\text{def}}{=} \{x_1 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ tenemos coordenadas $y_0, y_2, \ldots, y_n$, que verifican $y_0 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_2}{x_1}, \ldots, y_n = \frac{x_n}{x_1}$ en $U_0 \cap U_1$. Luego,

$$dy_0 = -\frac{1}{x_1^2} dx_1 \text{ y } dy_j = \frac{1}{x_1} dx_j - \frac{x_j}{x_1^2} dx_1 \text{ si } j \in \{2, \ldots, n\}.$$

Además, tenemos que $X \cap U_1 = V(h)$ donde

$$h(y) = h(y_0, y_2, \ldots, y_n) \overset{\text{def}}{=} f(y_0, 1, y_2, \ldots, y_n).$$

Así, el cálculo anterior nos dice que h permite definir $\omega^1 \in \mathrm{H}^0(X \cap U_1, \omega_{X \cap U_1})$ que en el abierto $V_n = \{y \in U_1 \text{ tal que } \frac{\partial h}{\partial y_n}(y) \neq 0\}$ está dada por

$$\begin{aligned} (\star\star) \qquad \omega_n^1 :&= \frac{(-1)^{n-1}}{\partial h/\partial y_n} dy_0 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_{n-1} \\ &\overset{\text{def}}{=} \frac{(-1)^{n-1}}{\partial h/\partial y_n} \cdot \frac{1}{x_1^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Para expresar $\frac{\partial h}{\partial y_n}$ en las variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$ observamos que

$$h(y) \overset{\text{def}}{=} f(y_0, 1, y_2, \ldots, y_n) = y_0^d f\left(1, \frac{1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\right) \overset{\text{def}}{=} y_0^d f(1, x_1, \ldots, x_n) = y_0^d g(x)$$

y por ende $\frac{\partial h}{\partial y_n} = y_0^d \frac{1}{y_0} \frac{\partial g}{\partial y_n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{x_1^{d-1}} \frac{\partial g}{\partial y_n}$. Así, $(\star)$ y $(\star\star)$ implican que (módulo signos)

$$\omega^1 = (-1)^* x_1^{d-n-1} \omega^0 \text{ en } U_0 \cap U_1.$$

Finalmente, el resultado deseado se obtiene notando que si $s \in \mathrm{H}^0(X, \omega_X)$ entonces $s|_{X \cap U_i} = P_i \omega^i$ donde P_i es un polinomio en n variables que cumple

$P_0(x) = (-1)^* x_1^{d-n-1} P_1\left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}\right) =: (-1)^* x_1^{d-n-1} \frac{Q(x_1,\dots,x_n)}{x_1^{\deg(P_1)}}$, donde Q es un polinomio homogéneo, i.e.,

$$\mathrm{H}^0(X, \omega_X) \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{polinomios homogéneos en } n \\ \text{variables de grado } \leq d-n-1 \end{array} \right\}$$

de donde se calcula directamente $p_g(X) = \dim_k \mathrm{H}^0(X, \omega_X)$. $\square$

Para terminar la sección, recordemos que el *Teorema de factorización débil* de Włodarczyk (ver Teorema 2.13.33) nos dice que la geometría birracional de variedades proyectivas suaves puede comprenderse mediante blow-ups. Por ende, es de suma importancia comprender el comportamiento del divisor canónico en este proceso.

Proposición 3.7.20. — *Sea X una variedad algebraica suave e irreducible, y sea $Z \subseteq X$ una sub-variedad suave e irreducible de* $\operatorname{codim}_X(Z) = r \geq 2$. *Sea $\varepsilon : \widetilde{X} := \mathrm{Bl}_Z(X) \longrightarrow X$ el blow-up de $Z \subseteq X$, con $E \stackrel{\mathsf{def}}{=} \varepsilon^{-}(Z) \subseteq \widetilde{X}$ el divisor excepcional. Entonces,*

$$\omega_{\widetilde{X}} \cong \varepsilon^* \omega_X \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}((r-1)E) \text{ en } \operatorname{Pic}(\widetilde{X}),$$

o equivalentemente $K_{\widetilde{X}} = \varepsilon^* K_X + (r-1)E$ en $\operatorname{Div}(\widetilde{X}) \cong \operatorname{WDiv}(\widetilde{X})$.

Demostración. — Recordemos que

$$\operatorname{Pic}(\widetilde{X}) = \varepsilon^* \operatorname{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}\mathscr{O}_X(E).$$

Luego, $\omega_{\widetilde{X}} \cong \varepsilon^* L \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(mE)$ para cierto $L \in \operatorname{Pic}(X)$ y cierto $m \in \mathbb{Z}$.

Notamos que $\omega_X|_{X \setminus Z} \cong \omega_{\widetilde{X}}|_{\widetilde{X} \setminus E} \cong \varepsilon^* L|_{\widetilde{X} \setminus E} \cong L|_{X \setminus Z}$ y por ende, dado que $\operatorname{codim}_X(Z) \geq 2$, tenemos que $L \cong \omega_X$.

Para calcular $m \in \mathbb{Z}$, consideremos $u_1, \dots, u_n$ coordenadas locales en X tales que $Z \underset{\mathsf{loc}}{=} \{u_1 = \cdots = u_r = 0\}$. Entonces, $\widetilde{X}$ está dado localmente por las ecuaciones $u_i y_j = u_j y_i$ con $i, j \in \{1, \dots, r\}$ y donde $y = [y_1, \dots, y_r] \in \mathbb{P}^{r-1}$ (ver Ejemplo 2.13.29).

Así, para $y_1 \neq 0$ obtenemos que $u_j = y_j u_1$ para todo $j \in \{2, \dots, r\}$ y $E \underset{\mathsf{loc}}{=} \{u_1 = 0\}$. Finalmente, calculamos que

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(du_1 \wedge \cdots \wedge du_n) &\stackrel{\mathsf{def}}{=} du_1 \wedge d(y_2 u_1) \wedge \cdots \wedge d(y_r u_1) \wedge du_{r+1} \wedge \cdots \wedge du_n \\ &= u_1^{r-1} du_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_r \wedge \cdots du_n, \end{aligned}$$

i.e., $m = r - 1$. $\square$

Terminemos esta sección con algunas consecuencias importantes de la Proposición anterior.

Ejemplo importante 3.7.21. —

(1) Sea S una superficie suave e irreducible, y sea $\varepsilon : \widetilde{S} := \mathrm{Bl}_{p_1,\dots,p_r}(S) \longrightarrow S$ el blow-up de S en r puntos, entonces
$$K_{\widetilde{S}} = \varepsilon^* K_S + E_1 + \cdots + E_r,$$
donde $E_i \cong \mathbb{P}^1$ es una *curva excepcional.*

(2) Supongamos que $\dim(X) = n \geq 2$ y que $Z = \{p\}$ es un punto. Entonces, $E \overset{\mathsf{def}}{=} \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ y luego
$$\omega_E \cong \omega_{\mathbb{P}^{n-1}} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-n).$$
Por otro lado, la fórmula de adjunción nos dice que
$$\omega_E \cong (\omega_{\widetilde{X}} \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E))|_E \overset{\mathsf{def}}{=} \omega_{\widetilde{X}}|_E \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)|_E.$$
Finalmente, la Proposición anterior implica que
$$\omega_{\widetilde{X}}|_E \cong (\varepsilon^*\omega_X \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{X}}((n-1)E))|_E \cong \mathscr{O}_{\widetilde{X}}((n-1)E)|_E.$$
Así, $\omega_E \cong \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(nE)|_E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-n)$ y por ende tenemos que
$$\mathscr{O}_E(E) := \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)|_E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1) \cong \mathscr{N}_{E/\widetilde{X}}.$$

(3) Un caso particular importante de la fórmula obtenida en (2) es el caso en que S es una superficie proyectiva suave e irreducible y $\varepsilon : \widetilde{S} := \mathrm{Bl}_p(S) \longrightarrow S$ es el blow-up de un punto $p \in S$, donde $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$. En tal caso, tenemos que
$$\mathscr{O}_{\widetilde{S}}(E)|_E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$$
y luego podemos calcular la *auto-intersección*
$$E^2 := E \cdot E \overset{\mathsf{def}}{=} \deg(\mathscr{O}_{\widetilde{S}}(E)|_E) = \deg(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = -1.$$

Observación importante 3.7.22. — En 1901, Guido Castelnuovo (1865-1952) y Federigo Enriques (1871-1946) prueban que si S es una superficie proyectiva suave e irreducible, y $C \subseteq S$ es una curva tal que $C \cong \mathbb{P}^1$ y $C^2 = -1$, entonces podemos efectuar un *blow-down*, i.e., existe una superficie proyectiva suave e irreducible S' tal que $S \cong \mathrm{Bl}_p(S')$ y $E = C$.

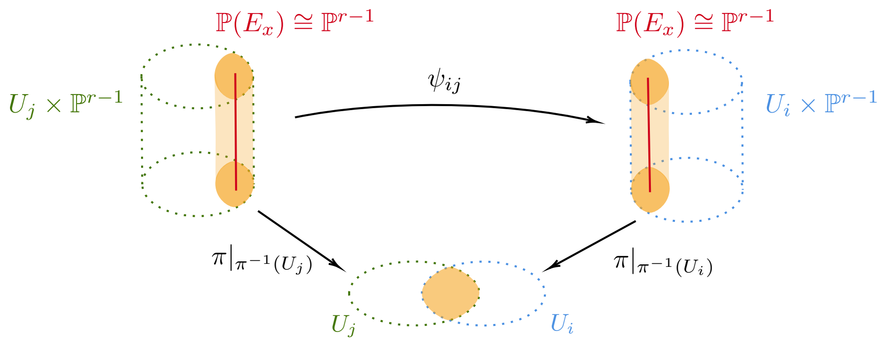
Una excelente introducción a la geometría de superficies algebraicas es el libro de Arneaud Beauville [**Bea96**].

3.8. Fibrados proyectivos

En esta sección, fijamos una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible X y un fibrado vectorial $E \longrightarrow X$ de $\mathrm{rg}(E) = r$.

Construcción 3.8.1. — Sea $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ un cubrimiento abierto tal que $E|_{U_i} \cong U_i \times k^r$. Definimos el **fibrado proyectivo** $\mathbb{P}(E)$, también denotado $\mathbb{P}_X(E)$, como la variedad algebraica obtenida mediante el atlas algebraico dado por las cartas $U_i \times \mathbb{P}(k^r) \cong U_i \times \mathbb{P}^{r-1}$ pegadas usando los cambios de carta

$$(U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}^{r-1} \xrightarrow[\sim]{\psi_{ij}} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{P}^{r-1},\ (x, [v]) \longmapsto (x, [g_{ij}(x)v]).$$



Notamos que la construcción *sólo* delende de la clase equivalencia de las matrices de transición $[g_{ij}(x)] \in \mathrm{PGL}_r(k)$, y que $\mathbb{P}(E)$ admite una proyección canónica

$$\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X \text{ donde } \pi^{-1}(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(E_x) \cong \mathbb{P}^{r-1}.$$

En tal caso, decimos que $\mathrm{rg}(\mathbb{P}(E)) := r - 1$.

Ejemplo 3.8.2. —

(1) Por construcción, para todo $L \in \mathrm{Pic}(X)$ se tiene que $\mathbb{P}(L) \cong X$ y que $\mathbb{P}(E \otimes L) \cong \mathbb{P}(E)$.

(2) $\mathbb{P}(E) \sim_{\text{bir}} X \times \mathbb{P}^{r-1}$ y por ende $\kappa(\mathbb{P}(E)) = -\infty$ si $r \geq 2$.

Ejercicio 3.8.3. — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $E \longrightarrow X$ un fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r$.

(1) Probar que $\mathbb{P}(E)$ es una variedad algebraica suave e irreducible de

$$\dim(\mathbb{P}(E)) = \dim(X) + r - 1.$$

(2) Probar que si $E \cong \mathscr{O}_X^{\oplus r}$ es el fibrado trivial de rango r, entonces $\mathbb{P}(E) \cong X \times \mathbb{P}^{r-1}$.

Ejemplo importante 3.8.4. — Consideremos $X = \mathbb{P}^1$ y $E = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, cuyas matrices de transición están dadas por

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{x_i}{x_j} \end{pmatrix}.$$

Luego, la superficie algebraica $S := \mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ se obtiene al pegar los $V_i := U_i \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$, con $i \in \{0, 1\}$, usando el cambio de cartas

$$\psi : (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1, \; (s, [u, v]) \longmapsto \left(\frac{1}{s}, [u, sv]\right)$$

Veamos que $S \cong \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$. En efecto, si consideramos $p = [1, 0, 0]$ entonces

$$\mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2) \overset{\mathsf{def}}{=} \{([x, y, z], [t_1, t_2]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \text{ tal que } yt_2 = zt_1\} \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

Por otra parte, hay isomorfismos

$$V_0 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \{t_2 \neq 0\} \cap \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2), \; (s, [u, v]) \longmapsto ([u, sv, v], [s, 1]) \text{ con } y = zt_1,$$

$$V_1 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \{t_1 \neq 0\} \cap \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2), \; (s, [u, v]) \longmapsto ([u, v, sv], [1, s]) \text{ con } z = yt_2,$$

que son compatibles con ψ, i.e., $\mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \cong \mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2)$.

Ejercicio 3.8.5. —

(1) Sea $\Lambda \cong \mathbb{P}^{k-1} \subseteq \mathbb{P}^n$ un sub-espacio lineal. Probar que

$$\mathrm{Bl}_\Lambda(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-k}}^{\oplus k} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-k}}(-1)).$$

Indicación: Ver el Ejercicio 2.12.15 para una descripción explícita de la geometría en cuestión.

(2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se define la **superficie de Hirzebruch** como

$$\mathbb{F}_n := \mathbb{P}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)).$$

Describir un atlas algebraico de $\mathbb{F}_n$.

Tal como el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ posee un *fibrado en rectas tautológico* $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, podemos construir un fibrado en rectas tautológico en $\mathbb{P}(E)$.

Definición 3.8.6. — Sea $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$ un fibrado proyectivo, donde $\mathrm{rg}(E) = r \geq 2$, y sea π^*E el fibrado vectorial de rango r en $\mathbb{P}(E)$ obtenido vía pullback. En particular,

$$(\pi^*E)_y \overset{\mathsf{def}}{=} E_x, \; \text{donde } y = (x, [\ell]) \in \pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}(E_x).$$

Definimos el **fibrado en rectas tautológico** de $\mathbb{P}(E)$, denotado $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$, como el sub-fibrado de π^*E definido por $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)_{(x,[\ell])} := \ell \cong k$. Luego, si $E|_U \cong U \times k^r$ entonces $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^{r-1}$ y

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)|_{\pi^{-1}(U)} \cong \mathrm{pr}_2^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(-1).$$

Proposición 3.8.7. — *Sea* $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$ *un fibrado proyectivo, donde* $\mathrm{rg}(E) = r \geq 2$. *Entonces,*

$$\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E^\vee)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r) \text{ en } \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(E)).$$

Demostración. — Dado que $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$ es un morfismo suave, tenemos la siguiente sucesión exacta definiendo el *fibrado tangente relativo* (ver Observación 3.6.3)

$$(\star) \qquad 0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/X} \hookrightarrow T_{\mathbb{P}(E)} \xrightarrow{d\pi} \!\!\!\!\rightarrow \pi^*T_X \longrightarrow 0,$$

donde $(T_{\mathbb{P}(E)/X})|_{\mathbb{P}(E_x)} \cong T_{\mathbb{P}(E_x)} \cong T_{\mathbb{P}^{r-1}}$. Por otro lado, tenemos la sucesión exacta de Euler en cada $\mathbb{P}(E_x) \cong \mathbb{P}^{r-1}$ dada por

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E_x)} \hookrightarrow E_x \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E_x)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(E_x)} \longrightarrow 0,$$

y que se reescribe (¡por definición!) equivalentemente como

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}|_{\mathbb{P}(E_x)} \hookrightarrow (\pi^*E \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))|_{\mathbb{P}(E_x)} \twoheadrightarrow (T_{\mathbb{P}(E)/X})|_{\mathbb{P}(E_x)} \longrightarrow 0,$$

de donde obtenemos la **sucesión de Euler relativa**

$$(\star\star) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)} \hookrightarrow \pi^*E \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/X} \longrightarrow 0.$$

Así, al tomar determinante en $(\star\star)$ obtenemos que

$$\det(T_{\mathbb{P}(E)/X}) \cong \det(\pi^*E \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \det(\pi^*E) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \pi^*(\det E).$$

De manera similar, al tomar determinante en $(\star)$ obtenemos que

$$\omega_{\mathbb{P}(E)}^\vee \stackrel{\mathsf{def}}{=} \det(T_{\mathbb{P}(E)}) \cong \det(T_{\mathbb{P}(E)/X}) \otimes \det(\pi^*T_X).$$

Finalmente, al juntar ambas fórmulas tenemos que

$$\omega_{\mathbb{P}(E)}^\vee \cong (\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \pi^*(\det E)) \otimes \pi^*\omega_X^\vee,$$

i.e., $\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E^\vee)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r)$. □

¡Atención! — En *muchos* textos se utiliza la convención de Grothendieck

$$\mathbb{P}(E_x) := \{\text{hiperplanos en } E_x\},$$

que corresponde a nuestro $\mathbb{P}(E_x^\vee)$. Usando esta convención, la fórmula anterior se escribe como

$$\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r).$$

Cabe destacar que, usando esta convención de Grothendieck, decimos que un fibrado vectorial $E \longrightarrow X$ de rango $\mathrm{rg}(E) \geq 2$ es un **fibrado vectorial amplio** (resp. big, resp. nef, etc) si el fibrado en rectas $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}(E))$ lo es. Por ejemplo, es posible utilizar la sucesión exacta de Euler para probar que $T_{\mathbb{P}^n}$ es un fibrado vectorial amplio. El recíproco de esta afirmación, es un teorema espectacular de Shigefumi Mori, por el cual fue galardonado con la medalla Fields en 1990.

Teorema 3.8.8 **(Mori, 1979).** — *Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible. Entonces, T_X es amplio si y sólo si $X \cong \mathbb{P}^n$.*

CAPÍTULO 4

COHOMOLOGÍA

Uno de los invariantes más importantes asociados a una variedad algebraica son sus grupos de cohomología de haces. Nuestro objetivo será dar un primer acercamiento a la cohomología de haces y a la noción de *haz coherente*.

Contrariamente a algunos textos más formales, comenzaremos por describir las principales técnicas de cálculo y resultados importantes (notablemente en el caso de variedades proyectivas) y luego revisaremos los aspectos formales de la construcción de la cohomología mediante el uso de functores derivados.

4.1. Cohomología de Čech y Haces coherentes

Esta sección buscar dar un primer acercamiento a la cohomología de haces y a la noción de **haz coherente**, introducida por Jean-Pierre Serre (1955) en su artículo seminal [**Ser55**]. Tal como se adelantó, utilizaremos varios resultados que serán probados en secciones posteriores. Comencemos con un ejemplo motivacional:

Ejemplo 4.1.1. — Sea X un espacio topológico y sea

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} \xrightarrow{g} \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de grupos abelianos en X. Entonces, "Γ *es un functor exacto por la izquierda*", i.e., la sucesión de secciones globales inducida

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X, \mathscr{G}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X, \mathscr{H})$$

es exacta. Sin embargo, el morfismo $\Gamma(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{H})$ **no** es necesariamente sobreyectivo, tal como lo ilustra la sucesión exponencial

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathscr{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

donde $X = \mathbb{C}$.

¡Atención! — En términos muy resumidos, la cohomología mide "*cuánto falla la exactitud*" al considerar secciones globales.

Ejercicio 4.1.2. — Sea $C \subseteq \mathbb{P}^2$ una curva proyectiva suave e irreducible de grado 3 (i.e., una curva elíptica). Probar que la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(-3) \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^2}|_C \longrightarrow \Omega^1_C \longrightarrow 0$$

provee otro contraejemplo a la exactitud por la derecha de la sucesión de secciones globales inducida.

¡Atención! — El objetivo de este capítulo será definir de manera *canónica* para todo haz de grupos abelianos $\mathscr{F}$ en X y todo $i \in \mathbb{N}$, el **i-ésimo grupo de cohomología** $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ verificando (entre otras cosas):

(1) $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{F}(X)$.

(2) Todo morfismo de haces $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ induce un morfismo

$$\mathrm{H}^i(\varphi) : \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X, \mathscr{G}) \text{ para todo } i \in \mathbb{N},$$

donde $\mathrm{H}^0(\varphi) = \Gamma(\varphi)$.

(3) Toda sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$ de haces de grupos abelianos induce una sucesión *exacta* larga

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{H}^1(X, \mathscr{F}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{H}^2(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

La manera más concreta (pero que a priori depende de varias elecciones) es considerar **cohomología de Čech**.

Definición 4.1.3. — Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X. Dado un cubrimiento abierto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X, donde I es un conjunto ordenado, definimos el grupo abeliano de **p-cocadenas de Čech** de $\mathscr{F}$ respecto a $\mathscr{U}$ por:

$$C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) := \prod_{i_0 < \cdots < i_p} \mathscr{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}), \text{ donde } p \in \mathbb{N}.$$

Así, una **p-cocadena** $s \in C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ es una *colección* $s = \{s_{i_0, \ldots, i_p}\}_{i_0 < \cdots < i_p}$ de secciones de $\mathscr{F}$, donde se escoge una sección por cada posible intersección (ordenada) de $p + 1$ abiertos del cubrimiento $\mathscr{U}$.

Ejemplo 4.1.4. —

(1) $C^0(\mathscr{U},\mathscr{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)$ y una 0-cocadena es una colección $s=\{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i\in\mathscr{F}(U_i)$.
(2) $C^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i<j}\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$ y una 1-cocadena es una colección $s=\{s_{ij}\}_{i<j}$ con $s_{ij}\in\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$.
(3) $C^2(\mathscr{U},\mathscr{F}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i<j<k}\mathscr{F}(U_i\cap U_j\cap U_k)$ y una 2-cocadena es una colección $s=\{s_{ijk}\}_{i<j<k}$ con $s_{ijk}\in\mathscr{F}(U_i\cap U_j\cap U_k)$.

Definición 4.1.5. — Para cada $p\in\mathbb{N}$, definimos el **operador de coborde** mediante

$$\begin{aligned} d^p : C^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) &\longrightarrow C^{p+1}(\mathscr{U},\mathscr{F})\\ s &\longmapsto d^p s,\end{aligned}$$

donde $s=\{s_{j_0,\dots,j_p}\}_{j_0<\cdots<j_p}$ y donde d^ps está dada por

$$(d^ps)_{i_0,\dots,i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k s_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{p+1}}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}}} \text{ en } \mathscr{F}(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}}).$$

Ejemplo 4.1.6. —

(1) Sea $s=\{s_i\}\in C^0(\mathscr{U},\mathscr{F})$ una 0-cocadena, entonces

$$(d^0s)_{i_0i_1} := s_{i_1}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}} - s_{i_0}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}},$$

i.e., $d^0s=\{s_{ij}\}$ con $s_{ij}\stackrel{\text{def}}{=} s_j|_{U_i\cap U_j} - s_i|_{U_i\cap U_j}\in\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$.
(2) Sea $s=\{s_{ij}\}\in C^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$ una 1-cocadena, entonces

$$(d^1s)_{i_0i_1i_2} := s_{i_1i_2}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}} - s_{i_0i_2}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}} + s_{i_0i_1}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}},$$

i.e., $d^1s=\{s_{ijk}\}$ con

$$s_{ijk}\stackrel{\text{def}}{=} s_{jk}|_{U_i\cap U_j\cap U_j} - s_{ik}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} + s_{ij}|_{U_i\cap U_j\cap U_k}\in\mathscr{F}(U_i\cap U_j\cap U_k).$$

En particular, $d^1(d^0s)=0$ para toda $s\in C^0(\mathscr{U},\mathscr{F})$.

El siguiente es un ejercicio fundamental para toda la discusión que sigue. Toda persona debería hacerlo alguna vez en su vida.

Ejercicio 4.1.7. — Probar que para todo $p\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$d^{p+1}\circ d^p = 0, \text{ i.e., } \operatorname{Im}(d^p)\subseteq\ker(d^{p+1}).$$

Definición 4.1.8. — Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X. Dado un cubrimiento abierto $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ de X, donde I es un conjunto ordenado, definimos el **p-ésimo grupo de cohomología de Čech** mediante

$$\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) := \ker(d^p)/\operatorname{Im}(d^{p-1}), \text{ donde } p\in\mathbb{N}.$$

Por convención, declaramos que $d^p = 0$ y $C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = 0$ para todo $p < 0$, y luego $\check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \ker(d^0)$. Más aún, si cada $\mathscr{F}(U)$ es un k-espacio vectorial entonces $\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F})$ también lo es, y escribimos

$$h^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) := \dim_k \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}).$$

Ejemplo 4.1.9. — Por definición, tenemos que

$$\check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \ker\{d^0 : C^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C^1(\mathscr{U}, \mathscr{F})\}.$$

Así, si consideramos $s = \{s_i\}_{i \in I} \in C^0(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ con $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$, entonces

$d^0 s = \{s_j|_{U_i \cap U_j} - s_i|_{U_i \cap U_j}\} = 0$ si y sólo si $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo $i, j \in I$.

Luego, dado que $\mathscr{F}$ es un *haz*, existe una única sección global $s \in \mathscr{F}(X) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(X, \mathscr{F})$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$. En otras palabras, hay un isomorfismo

$$\check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F})$$

para <u>todo</u> cubrimiento abierto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$.

¡Atención! — Para $p \geq 1$, los grupos $\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F})$ pueden *depender* del cubrimiento abierto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X. Sin embargo, si $\mathscr{V} \prec \mathscr{U}$ es un **refinamiento**[(1)] entonces hay restricciones naturales $C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C^p(\mathscr{V}, \mathscr{F})$ que a su vez inducen morfismos de grupos $\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{V}}(X, \mathscr{F})$. Luego, podemos definir de manera canónica

$$\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{F}) := \varinjlim_{\mathscr{U} \text{ cubrimiento de } X} \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}),$$

lo que en términos prácticos se traduce en que $s \in \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F})$ y $t \in \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{V}}(X, \mathscr{F})$ son iguales en $\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{F})$ si existe un refinamiento común $\mathscr{W} \prec \mathscr{U}$ y $\mathscr{W} \prec \mathscr{V}$ tal que $s|_{\mathscr{W}} = t|_{\mathscr{W}}$.

⚠ Veremos después que en el caso de una variedad algebraica X, podemos considerar cualquier cubrimiento <u>afín</u> $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X, y tendremos que

$$\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F})$$

siempre y cuando $\mathscr{F}$ sea un <u>*haz coherente*</u>. Mejor aún, tendremos que $\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^p(X, \mathscr{F})$ en este caso, donde $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F})$ es la "*verdadera*" cohomología (i.e., la que definiremos más adelante usando functores derivados).

(1) i.e., para todo $V_j \in \mathscr{V}$, existe $U_i \in \mathscr{U}$ tal que $V_j \subseteq U_i$.

Ejemplo importante 4.1.10. — Sea X una variedad algebraica irreducible. Entonces, tenemos que

$$\mathrm{Div}(X)/\,\mathrm{PDiv}(X) \cong \mathrm{Pic}(X) \cong \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathscr{O}_X^*).$$

En efecto, un fibrado en rectas $L \in \mathrm{Pic}(X)$ está determinado por un cubrimiento abierto $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de X (trivialización) y por funciones de transición $g_{ij} \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ que verifican $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ (condición de cociclo).

Por otro lado, $g = \{g_{ij}\} \in C^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X^*)$ con $g_{ij} \in \mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ (¡grupo multiplicativo!) verifica $d^1 g = 0$ si y sólo si $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ en $\mathscr{O}_X^*(U_i \cap U_j \cap U_k)$. Más aún, $\mathrm{Im}(d^0)$ corresponde por definición a divisores de Cartier principales, de donde se deduce que $\mathrm{Pic}(X) \cong \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathscr{O}_X^*)$.

Ejemplo 4.1.11. — En el caso de la cohomología de Čech, la functorialidad no es difícil de probar. Para ello, recordemos que un morfismo $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ de haces de grupos abelianos en X es una colección de morfismos de grupos

$$\varphi_U : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U) \text{ para todo } U \subseteq X \text{ abierto},$$

compatibles con las restricciones respectivas. En particular, inducen morfismos $C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C^p(\mathscr{U}, \mathscr{G})$ que conmutan con los diferenciales $d^p_{\mathscr{F}}$ y $d^p_{\mathscr{G}}$, y por ende definen morfismos $\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{G})$. Tomando límites inductivos, obtenemos para todo $p \in \mathbb{N}$ morfismos de grupos

$$\check{\mathrm{H}}^p(\varphi) : \check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{G}),$$

que verifican $\check{\mathrm{H}}^0(\varphi) = \Gamma(\varphi) : \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{G})$.

¡Atención! — Para completar nuestro objetivo inicial, faltaría verificar que para toda sucesión exacta corta de haces $0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$ existe una sucesión exacta larga en cohomología de Čech

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^0} \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \\ \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^1} \check{\mathrm{H}}^2(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Es posible verificar que no hay problema en la exactitud en los términos $\check{\mathrm{H}}^p$ con $p \in \{0, 1\}$, pero que si X **no** es Hausdorff (e.g., topología de Zariski) la exactitud falla para los términos $\check{\mathrm{H}}^p$ con $p \geq 2$.

En otras palabras, la cohomología de Čech "*no es la buena cohomología*". Por otro lado, veremos más adelante que la cohomología $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F})$ definida usando functores derivados **sí** cumple esta propiedad deseada.

Un resultado fundamental que probaremos más adelante, permite comparar ambas cohomologías y aprovechar el carácter calculatorio de la cohomología de Čech.

***Teorema 4.1.12* (Leray). —** *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X tal que*

$\mathrm{H}^p(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}, \mathscr{F}) = 0$ para todo $k \geq 1,$ todos $i_1, \ldots, i_k \in I$, y todo $p \geq 1$.

Entonces, hay isomorfismos canónicos (functoriales)

$$\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^p(X, \mathscr{F})$$

para todo $p \geq 0$.

Veremos más adelante que, gracias a un teorema de Serre, las hipótesis anteriores se cumplen para un cubrimiento afín $\mathscr{U}$ y un haz (quasi-)coherente $\mathscr{F}$, en el sentido siguiente:

***Definición 4.1.13.* —** Sea X una variedad algebraica. Un **haz quasi-coherente** en X es un $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ tal que para todo $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x y una sucesión exacta de $\mathscr{O}_U$-módulos

$$\mathscr{O}_U^{\oplus I} \longrightarrow \mathscr{O}_U^{\oplus J} \longrightarrow \mathscr{F}|_U \longrightarrow 0,$$

donde I y J son conjuntos arbitrarios. En el caso particular en que I y J son conjuntos *finitos* para todo U, i.e.,

$$\mathscr{O}_U^{\oplus m} \longrightarrow \mathscr{O}_U^{\oplus n} \longrightarrow \mathscr{F}|_U \longrightarrow 0 \text{ para ciertos } m, n\mathbb{N},$$

decimos que $\mathscr{F}$ es un **haz coherente**.

***Ejemplo 4.1.14.* —**

(1) Sea $E \longrightarrow X$ un fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(X) = r$, y sea $\mathscr{E}$ su haz de secciones. Entonces, si $E|_U \cong U \times \mathbb{A}^r$ se tiene que $\mathscr{E}|_U \cong \mathscr{O}_U^{\oplus r}$. Así, $\mathscr{E}$ es un haz coherente.

(2) Los haces $\mathscr{O}_X^*$ y $\underline{\mathbb{Z}}$ **no** son quasi-coherentes, pues no son $\mathscr{O}_X$-módulos.

Resulta ser que la localización de módulos es una herramienta muy importante para comprender los haces quasi-coherentes.

***Recuerdo 4.1.15.* —** Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín irreducible, con $A = \mathscr{O}(X) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ su k-álgebra de funciones regulares.

Recordemos que si $f \in A$ entonces

$$U_f \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } f(x) \neq 0\}$$

es un abierto principal afín, que verifica $\mathscr{O}(U_f) \cong A_f$ (localización en f). Dichos abiertos forman una base de la topología de Zariski de X.

Sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo y recordemos que $M := \Gamma(X, \mathscr{F})$ es un A-módulo. Además, para todo A-módulo M y todo $f \in A$ se define la *localización*

$$M_f := M \otimes_A A_f \overset{\mathsf{def}}{=} \left\{ \frac{m}{f^p} \text{ con } m \in M \text{ y } p \in \mathbb{N} \right\} / \sim,$$

donde $\frac{m}{f^p} \sim \frac{m'}{f^q}$ si y sólo si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r(f^q m - m' f^p) = 0$ en M.

Más aún, para toda sucesión exacta de A-módulos

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

la sucesión asociada de A_f-módulos

$$0 \longrightarrow M_f \longrightarrow N_f \longrightarrow Q_f \longrightarrow 0,$$

es exacta, i.e., la *localización* envía sucesiones exactas en sucesiones exactas.

Teorema 4.1.16. — *Sea $\mathscr{F}$ un haz coherente en una variedad algebraica* afín *e irreducible X. Entonces, para toda función regular $f \in \mathscr{O}(X)$ el morfismo*

$$\begin{aligned} \varphi_f : \Gamma(X, \mathscr{F})_f &\longrightarrow \Gamma(U_f, \mathscr{F}) \\ \frac{s}{f^p} &\longmapsto \frac{1}{f^p} \cdot s|_{U_f} \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. — Al ser una afirmación local, se puede probar que, sin pérdida de generalidad, se puede suponer la existencia una sucesión exacta

$$\mathscr{O}_X^{\oplus m} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{O}_X^{\oplus n} \xrightarrow{\beta} \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

en X. Veamos entonces que:

Paso 1. φ_f **es inyectiva** (i.e., si $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ es tal que $s|_{U_f} = 0$, entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $sf^p = 0$ en X):

Sea $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ tal que $s|_{U_f} = 0$. Dado que β es un morfismo de haces sobreyectivo, existe un cubrimiento abierto $X = \cup_{i \in I} U_i$ y un vector de secciones $\mathbf{g}_i \in \mathscr{O}_X(U_i)^{\oplus n}$ tal que $\beta(\mathbf{g}_i) = s|_{U_i}$.

Por un lado, dado que si $sf^p|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$ entonces $sf^p = 0$ en X, basta tratar el caso en que $s = \beta(g)$ con $g \in \mathscr{O}_X(X)^{\oplus n} \overset{\mathsf{def}}{=} A^{\oplus n}$. Por otro lado, dado que

$$0 = s|_{U_f} = \beta(g)|_{U_f} \overset{\mathsf{def}}{=} \beta(g|_{U_f})$$

tenemos que $g|_{U_f} \in \ker(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im}(\alpha)$. Luego, tal como antes, existe un cubrimiento abierto $U_f = \cup_{i \in I} U_{f_i}$ y elementos $g_i \in A^{\oplus m}$ tales que

$$g|_{U_{f_i}} = \alpha\left(\frac{g_i}{f_i^p}\right), \text{ i.e., } f_i^p g - \alpha(g_i) = 0 \text{ en } U_f,$$

y por ende $f_i^p g = \alpha(g_i)$ en X, dado que U_f es un abierto denso.

Como los U_{f_i} cubren U_f, los f_i^p **no** poseen ceros comunes en U_f y el Hilbert Nullstellensatz implica que existen $q \in \mathbb{N}$ y $h_i \in A$ tales que $\sum_i f_i^p \frac{h_i}{f^q} = 1$ en A_f. Finalmente, deducimos que

$$f^q s = \beta(f^q g) = \beta(\sum_i f_i^p h_i g) = \beta(\sum_i \alpha(g_i) h_i) = 0,$$

donde la última igualdad se obtiene gracias a que $\beta \circ \alpha = 0$.

Paso 2. φ_f es sobreyectiva (i.e., si $s \in \Gamma(U_f, \mathscr{F})$ entonces existe $p \in \mathbb{N}$ y $\sigma \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ tal que $sf^p = \sigma|_{U_f}$):

Veamos primero que la aplicación

$$\Gamma(\beta) : A^{\oplus n} \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F})$$

es sobreyectiva. Para ello, consideremos $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ y notemos que el hecho que β sea un morfismo de haces sobreyectivo implica que existe un cubrimiento abierto $X = \cup_{i \in I} U_i$ y elementos $g_i \in A^{\oplus n}$ tales que $s|_{U_{f_i}} = \beta(\frac{g_i}{f_i^p})$ para cierto $p \in \mathbb{N}$. Dado que las secciones $f_i^p s$ y $\beta(g_i)$ coinciden en U_{f_i}, el Paso 1 implica que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $sf_i^{p+q} = \beta(g_i f_i^q)$.

Tal como antes, podemos considerar una partición de la unidad $\sum_i f_i^{p+q} h_i = 1$ y usarla para concluir que

$$s = \sum_i f_i^{p+q} h_i s = \sum_i h_i \beta(g_i f_i^q) = \beta\left(\sum_i h_i g_i f_i^q\right),$$

i.e. $\Gamma(\beta)$ es sobreyectiva. El mismo cálculo implica de hecho que

$$\Gamma(U_f, \mathscr{F}) = \beta\left(\Gamma(U_f, \mathscr{O}_X)^{\oplus n}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(A_f^{\oplus n}),$$

i.e., $s \in \Gamma(U_f, \mathscr{F})$ se escribre como $s = \beta(\frac{g}{f^p})$ y por ende $\sigma := \beta(g) \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ verifica que $\sigma|_{U_f} = sf^p$. □

Observación importante 4.1.17. — El Teorema anterior nos señala, equivalentemente, que un haz coherente $\mathscr{F}$ en una variedad algebraica afín X está determinado por el A-módulo $\Gamma(X, \mathscr{F})$ de secciones globales, donde $A = \mathscr{O}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$.

Construcción 4.1.18. — Sea X una variedad algebraica afín, con $A = \mathscr{O}(X)$ su k-álgebra de funciones regulares. Dado un A-módulo M, definimos un haz $\widetilde{M}$ de $\mathscr{O}_X$-módulos mediante:

Para todo $f \in A$, se define $\Gamma(U_f, \widetilde{M}) \overset{\text{def}}{=} \widetilde{M}(U_f) := M_f$.

Ejercicio 4.1.19. — Probar que $\widetilde{M}$ es efectivamente un haz de $\mathscr{O}_X$-módulos, y que $\widetilde{M}$ es **coherente** si y sólo si M es un A-módulo finitamente generado. Además, $\widetilde{A} \cong \mathscr{O}_X$.
Indicación: El hecho que M sea finitamente generado sobre el anillo noetheriano A implica que existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que

$$A^{\oplus r} \longrightarrow A^{\oplus s} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta. Además, la regla $M \longmapsto \widetilde{M}$ envía sucesiones exactas de A-módulos en sucesiones exactas de $\mathscr{O}_X$-módulos dado que la localización preserva exactitud.

Al combinar el Teorema y la Construcción anterior, obtenemos el siguiente resultado que utilizaremos frecuentemente.

Corolario 4.1.20. — *Sea X una variedad algebraica afín. Entonces, las construcciones $\mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$ y $M \longmapsto \widetilde{M}$ son inversas una de la otra. En particular,*

$$\mathscr{F} \cong \widetilde{\Gamma(X, \mathscr{F})} \quad \text{y} \quad \Gamma(X, \widetilde{M}) \cong M$$

para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en X y todo A-módulo finitamente generado M.

Más aún, la correspondencia anterior sigue siendo válida para A-módulos arbitrarios si reemplazamos la palabra coherente por quasi-coherente*.*

La correspondencia anterior permite traducir *geométricamente* una gran parte de resultados y nociones que surgen en la teoría de módulos sobre un anillo.

Ejemplo 4.1.21. — Sea X una variedad algebraica y sea $Y \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ una sub-variedad. Entonces, $\mathcal{I}_Y$ y $\iota_*\mathscr{O}_Y$ son haces coherentes en X.

En efecto, en un abierto afín $U \subseteq X$ tal que $\mathscr{O}_X(U) = A$ y tal que $\mathcal{I}(Y \cap U) = I$, tenemos que $\mathscr{O}(Y \cap U) \cong A/I =: B$ e I son A-módulos finitamente generados. Así,

$$\mathcal{I}_Y\,|_U \cong \widetilde{I} \text{ y } (\iota_*\mathscr{O}_Y)|_U \cong \widetilde{B}$$

son haces coherentes para todo abierto afín $U \subseteq X$.

De manera completamente análoga al ejemplo anterior, obtenemos el siguiente resultado útil.

Corolario 4.1.22. — *Sean X e Y variedades algebraicas y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular. Entonces:*

(1) *Si $\mathscr{G}$ es un haz coherente (resp. quasi-coherente) en Y, entonces $f^*\mathscr{G}$ es un haz coherente (resp. quasi-coherente) en X.*

(2) *Si $\mathscr{F}$ es un haz quasi-coherente en X, entonces $f_*\mathscr{F}$ es quasi-coherente en X. Más aún, si f es un morfismo <u>finito</u> y $\mathscr{F}$ es coherente en X, entonces $f_*\mathscr{F}$ es coherente en Y.*

Más aún, si denotamos por $\mathbf{Coh}(X)$ la categoría de haces coherentes en X, entonces:

(3) *Si $\mathscr{F},\mathscr{G} \in \mathbf{Coh}(X)$, entonces $\mathscr{F} \oplus \mathscr{G}$ y $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}$ son haces coherentes.*

(4) *Si $\mathscr{F},\mathscr{G} \in \mathbf{Coh}(X)$ y $\varphi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ es un morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos, entonces $\ker(\varphi)$, $\operatorname{Im}(\varphi)$ y $\operatorname{coker}(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{G}/\operatorname{Im}(\varphi)$ son haces coherentes*[2].

Ejemplo importante 4.1.23. — Sea X una variedad algebraica afín con $A = \mathscr{O}(X)$ su k-álgebra de funciones regulares. Entonces,

$$\Gamma : \mathbf{Coh}(X) \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X,\mathscr{F})$$

es un **functor exacto** (covariante), i.e., para toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

de haces coherentes en X, la sucesión de A-módulos

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\Gamma(\alpha)} \Gamma(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\Gamma(\beta)} \Gamma(X,\mathscr{H}) \longrightarrow 0$$

es *exacta.* En efecto, Sea $N := \operatorname{Im}(\Gamma(\beta)) \subseteq \Gamma(X,\mathscr{H})$. Entonces, la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\Gamma(\alpha)} \Gamma(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\Gamma(\beta)} N \longrightarrow 0$$

es exacta, y luego (¡dado que la localización es exacta!) la sucesión de haces coherentes

$$0 \longrightarrow \widetilde{\Gamma(X,\mathscr{F})} \cong \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \widetilde{\Gamma(X,\mathscr{G})} \cong \mathscr{G} \xrightarrow{\beta} \widetilde{N} \longrightarrow 0$$

es exacta. En particular, $\widetilde{N} \cong \mathscr{H}$ y por ende $N \cong \Gamma(X,\widetilde{N}) \cong \Gamma(X,\mathscr{H})$, de donde se concluye la exactitud de Γ.

Volvamos a nuestra discusión general sobre cohomología.

[2] Más adelante, esto se traducirá en el hecho que $\mathbf{Coh}(X)$ es una **categoría abeliana** (a diferencia de $\mathbf{Vect}(X)$).

Proposición 4.1.24. — *Sea X una variedad algebraica* afín *y $\mathscr{F}$ un haz coherente en X. Sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento finito de X formado por abiertos principales (i.e., abiertos de la forma U_f). Entonces,*

$$\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } p \geq 1.$$

En particular, $\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathscr{F}) = 0$ *para todo* $p \geq 1$.

Demostración para $p = 1$. — Sea $A = \mathscr{O}(X)$ y $M = \Gamma(X, \mathscr{F})$ un A-módulo finitamente generado. En el cubrimiento $\mathscr{U} = \{U_{f_i}\}_{i \in I}$ toda 1-cocadena $s \in C^1(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ se escribe como $s = \{s_{ij}\}_{i<j}$, donde $s_{ij} \in M_{f_i f_j}$ es de la forma

$$s_{ij} = \frac{m_{ij}}{f_i^p f_j^p} \text{ con } p \in \mathbb{N} \text{ y } m_{ij} \in M.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} d^1 s = 0 &\Leftrightarrow s_{jk} - s_{ik} + s_{ij} = 0 \Leftrightarrow f_i^p m_{jk} - f_j^p m_{ik} + f_k^p m_{ij} = 0 \text{ en } M_{f_i f_j f_k} \\ &\Leftrightarrow \text{Existe } q \in \mathbb{N} \text{ tal que } (f_i f_j f_k)^q (f_i^p m_{jk} - f_j^p m_{ik} + f_k^p m_{ij}) = 0 \text{ en } M \end{aligned}$$

y en particular

$$f_k^{p+q} s_{ij} = \frac{m_{ik} f_k^q}{f_i^p} - \frac{m_{jk} f_k^q}{f_j^p} \text{ en } M_{f_i f_j}.$$

Como siempre, al considerar una partición de la unidad $\sum_k g_k f_k^{p+q} = 1$, obtenemos que

$$s_{ij} = \sum_k g_k f_k^{p+q} s_{ij} = \frac{\sum_k g_k m_{ik} f_k^q}{f_i^p} - \frac{\sum_k g_k m_{jk} f_k^q}{f_j^p} \overset{\mathsf{def}}{=} s_j - s_i \text{ en } M_{f_i f_j},$$

donde $s_i := -\frac{\sum_k g_k m_{ik} f_k^q}{f_i^p}$, i.e., $\{s_{ij}\}_{i<j}$ está en la imagen de d^0 y luego $\check{\mathrm{H}}^1_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) = 0$. Un cálculo análogo (pero con más índices) permite probar el mismo resultado cuando $p \geq 2$. □

Veremos más adelante que el mismo fenómeno de anulación en variedades afines ocurre para la cohomología definida a partir de functores derivados.

***Teorema 4.1.25* (Serre).** — *Sea X una variedad algebraica* afín *y $\mathscr{F}$ un haz* coherente *en X. Entonces,*

$$\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } p \geq 1.$$

Al combinar el Teorema de Serre y el Teorema de Leray, obtenemos el importante resultado siguiente que es una suerte de *Teorema fundamental del cálculo de cohomología de haces coherentes.*

Teorema 4.1.26. — *Sea X una variedad algebraica y $\mathscr{F}$ un haz coherente en X. Entonces, para todo cubrimiento finito $\mathscr{U}$ de X formado por* abiertos afines *hay isomorfismos canónicos (functoriales)*

$$\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^p(X,\mathscr{F}) \text{ para todo } p \geq 0.$$

Demostración. — Sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento por abiertos afines $U_i \subseteq X$. Entonces, como X es una variedad algebraica <u>*separada*</u> se tiene que $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$ es también afín (ver Proposición 2.6.10). Luego, el Teorema de Serre implica que

$$\mathrm{H}^p(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k},\mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } p \geq 1,$$

y por ende el Teorema de Leray nos da el isomorfismo deseado. □

Una consecuencia muy útil de lo anterior es el siguiente resultado que afirma que *la cohomología de un cerrado $Y \subseteq X$ se puede calcular en X.*

Corolario 4.1.27. — *Sea X una variedad algebraica y sea $Y \xhookrightarrow{\iota} X$ una sub-variedad. Entonces, para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en Y se tiene que $\iota_*\mathscr{F}$ es coherente en X y además*

$$\mathrm{H}^p(X,\iota_*\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^p(Y,\mathscr{F}) \text{ para todo } p \geq 0.$$

Demostración. — Sabemos que la inclusión $\iota : Y \hookrightarrow X$ es un morfismo finito (ver Ejemplo 2.11.11), y por ende $\iota_*\mathscr{F}$ es un haz coherente en X (cf. Corolario 4.1.22).

Explícitamente, si $U \subseteq X$ es un abierto afín con $A = \mathscr{O}(U)$ y con $\mathcal{I}(Y \cap U) = I$ ideal en A, entonces $M := \Gamma(Y \cap U, \mathscr{F})$ es un A/I-módulo finitamente generado y para $f \in A$ se tiene que

$$(\star) \qquad \Gamma(U_f, \iota_*\mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} \Gamma(Y \cap U_f, \mathscr{F}) = M_f,$$

i.e., $(\iota_*\mathscr{F})|_U \cong \widetilde{M}$, donde pensamos a M como un A-módulo finitamente generado. Así, $\iota_*\mathscr{F}$ es coherente en X.

Por otro lado, si $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento afín de X, entonces $\mathscr{V} = \{V_i\}_{i\in I}$, con $V_i := Y \cap U_i$, es un cubimiento afín de Y. Luego, gracias al teorema anterior, basta verificar que

$$\check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{U}}(X,\iota_*\mathscr{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^p_{\mathscr{V}}(Y,\mathscr{F}).$$

Esto último se obtiene del hecho que las restricciones de p-cocadenas

$$C^p(\mathscr{U},\iota_*\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} C^p(\mathscr{V},\mathscr{F})$$

son isomorfismos gracias a $(\star)$. □

Como aplicación, podemos probar (al menos en un caso particular) el siguiente resultado fundamental de cohomología.

***Teorema 4.1.28* (Anulación de Grothendieck).** — *Sea X una variedad algebraica y $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Entonces,*

$$\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } p > \dim(X).$$

Demostración (caso particular). — La idea en el caso general es probar que toda variedad algebraica X de $\dim(X) = n$ puede ser cubierta con a lo más $n+1$ abiertos afines (ver [**Har77**, p. 208, p. 224]). De lo anterior, se obtiene un cubrimiento $\mathscr{U}$ que cumple $C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = 0$ para todo $p > n$ y por ende (gracias al Teorema de Leray) $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $p > n$ si $\mathscr{F}$ es un haz coherente en X. El caso general de haces de grupos abelianos es más delicado (ver [**Har77**, Ch. III, Theorem 2.7]).

En vista de lo anterior, nos contentaremos con suponer que $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ es una variedad algebraica *proyectiva* de $\dim(X) = n$ y supongamos que $\mathscr{F}$ es un haz *coherente* en X. Veamos que X se puede cubrir con a lo más $n+1$ abiertos:

Como $\dim(X) = n$, existe $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^N$ subespacio lineal tal que $\Lambda \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$ tal que $X \cap \Lambda = \emptyset$. Si Λ está dado por las ecuaciones

$$\Lambda = \{x_0 = \cdots = x_n = 0\} \subseteq \mathbb{P}^N,$$

entonces $X \subseteq U_0 \cup \cdots \cup U_n$, con $U_i \overset{\mathsf{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ y por ende cada $V_i = X \cap U_i$ es un abierto afín. □

Para terminar esta sección, veamos un ejemplo concreto de cálculo de cohomología.

Ejemplo 4.1.29. — Sea $X = \mathbb{P}^1$ y $\mathscr{F}$ un haz coherente en $\mathbb{P}^1$. Entonces $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^1, \mathscr{F}) = 0$ si $i \geq 2$, gracias al Teorema de anulación de Grothendieck. Si además suponemos que:

(1) $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$, entonces tenemos que $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) \cong k$.

Calculemos $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1})$ usando cohomología de Čech respecto al cubrimiento *afín* $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ y $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$:

$$\begin{aligned} C^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U_0 \cap U_1) &\cong \left\{ \frac{f}{x_0^a x_1^b} \text{ con } f \text{ homogéneo de grado } a+b \right\} \\ &\cong \mathrm{Vect}_k \left\langle \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b} \text{ con } m+n = a+b,\ m,n,a,b \geq 0 \right\rangle \end{aligned}$$

Luego, la condición $m - a = b - n$ implica que $m \geq a$ o bien $n \geq b$, y luego $s = \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b}$ es regular en U_0 o bien en U_1. En particular, cada generador está en la imagen de

$$\begin{aligned} d^0 : C^0(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U_0) \times \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U_1) &\longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(U_0 \cap U_1) \\ (s_0, s_1) &\longmapsto s_1|_{U_0 \cap U_1} - s_0|_{U_0 \cap U_1}. \end{aligned}$$

i.e., $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$.

(2) $\mathscr{F} = \omega_{\mathbb{P}^1} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$, entonces tenemos que $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}) \cong k$.

En efecto, notamos que (cf. Ejemplo 3.2.5)

$$\begin{aligned} C^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) &\overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)(U_0 \cap U_1) \\ &\cong \left\{ \frac{f}{x_0^a x_1^b} \text{ con } f \text{ homogéneo de grado } a+b-2 \right\} \\ &\cong \mathrm{Vect}_k \left\langle \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b} \text{ con } m+n = a+b-2,\ m,n,a,b \in \mathbb{Z} \right\rangle \end{aligned}$$

Luego, la condición $m-(a-1) = (b-1)-n$ implica que $m \geq a-1$ o bien $n \geq b-1$. Si alguna desigualdad es estricta, entonces $s = \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b}$ sería regular en U_0 o bien en U_1 y, tal como antes, sería 0 en $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$.

Así, sólo nos queda considerar el caso $m = a-1$ y $n = b-1$, i.e., $s = \frac{1}{x_0 x_1}$. Dado que $C^2(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$, tenemos que $d^1 = 0$ y por ende $\ker(d^1) = C^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$. Finalmente, concluímos que

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}) \cong \mathrm{Vect}_k \left\langle \frac{1}{x_0 x_1} \right\rangle \cong k.$$

Ejercicio 4.1.30. — Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Probar que la variedad algebraica

$$X_n := \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$$

no es una variedad algebraica afín.

Indicación: Usar el Teorema de Leray para calcular $\mathrm{H}^1(X_2, \mathscr{O}_{X_2})$ *mediante cohomología de Čech. Concluir utilizando el Teorema de Serre.*

4.2. Cohomología coherente en variedades proyectivas

En esta sección discutiremos propiedades importantes de la cohomología de variedades proyectivas. Comencemos por calcular la cohomología de fibrados en rectas en $\mathbb{P}^n$, y recordemos que

$$\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1).$$

Recordemos además que si E es un fibrado vectorial en una variedad algebraica X, entonces (identificando E con su haz coherente de secciones) se define

$$h^i(X,E) := \dim_k \mathrm{H}^i(X,E).$$

Teorema 4.2.1. — *Sea $i \in \{0,\dots,n\}$ y sea $d \in \mathbb{Z}$. Entonces,*

(1) $h^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{n+d}{n}$ *(resp.* $= 0$*) si* $d \geq 0$ *(resp.* $d < 0$*).*
(2) $h^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{-d-1}{n}$ *(resp.* $= 0$*) si* $d \leq -n-1$ *(resp.* $d \geq -n$*).*
(3) $h^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$ *para todo* $d \in \mathbb{Z}$ *si* $0 < i < n$.

En particular, $h^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) = 1$.

Demostración. — Sea $\mathscr{F} := \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Entonces,

$$\check{\mathrm{H}}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \check{\mathrm{H}}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)),$$

y en particular (ver Ejemplo 3.2.5) tenemos para $i = 0$ que

$$\check{\mathrm{H}}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \cong k[x_0,\dots,x_n] =: S$$

como anillos graduados, de donde se deduce (1). Para $i \geq 1$, el Teorema de Leray nos asegura que basta considerar los abiertos afines estándar $U_i \overset{\mathsf{def}}{=} \{x_i \neq 0\}$ de $\mathbb{P}^n$ para calcular $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})$ mediante cohomología de Čech. Para esto último, definimos para cada sub-conjunto $I \subseteq \{0,\dots,n\}$ el abierto

$$U_I := \bigcap_{i\in I} U_i.$$

En particular, tenemos que

$$\mathrm{H}^0(U_I, \mathscr{F}|_{U_I}) \cong \mathrm{Vect}_k \left\langle x_0^{\ell_0} \cdots x_n^{\ell_n} \text{ donde } \ell_j \in \mathbb{Z} \text{ y donde } \ell_j \geq 0 \text{ si } j \notin I \right\rangle.$$

Así, el *complejo de Čech* del cubrimiento estándar de $\mathbb{P}^n$ está dado por[(3)]:

$$C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F}): \qquad \prod S_{x_{i_0}} \xrightarrow{d^0} \prod S_{x_{i_0}x_{i_1}} \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} S_{x_0\cdots x_n} \xrightarrow{d^n} 0$$

donde $\check{\mathrm{H}}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} \ker(d^i)/\operatorname{Im}(d^{i-1})$.

Para probar (2), veremos que $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$ y que hay un *emparejamiento perfecto* (i.e., una forma bilineal no-degenerada)

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \times \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k,$$

(3) Por ejemplo, si $n = 1$, obtenemos el complejo de Čech

$$k[x_0, x_1, x_0^{-1}] \times k[x_0, x_1, x_1^{-1}] \xrightarrow{d^0} k[x_0, x_1, x_0^{-1}, x_1^{-1}] \longrightarrow 0,$$

y $\check{\mathrm{H}}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} k[x_0, x_1, x_0^{-1}, x_1^{-1}]/\operatorname{Im}(d^0) \cong x_0^{-1}x_1^{-1}k[x_0^{-1}, x_1^{-1}] \cong \mathrm{Vect}_k\langle x_0^a x_1^b \text{ con } a, b < 0\rangle$. En particular, la graduación en $\check{\mathrm{H}}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{F})$ está dada por $d = \deg(x_0^a x_1^b) \overset{\mathsf{def}}{=} a + b < 0$.

de donde obtenemos $h^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = h^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))$ y luego (2):

Por definición, $\check{\mathrm{H}}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})$ está dado por

$$\operatorname{coker}\left(\prod_k S_{x_0\cdots\widehat{x_k}\cdots x_n} \xrightarrow{d^{n-1}} S_{x_0\cdots x_n}\right) \cong \operatorname{Vect}_k\langle x_0^{a_0}\cdots x_n^{a_n} \text{ con } a_j < 0\},$$

con graduación $d := \sum_{i=0}^n a_i$. En particular, si $d = -n-1$ sólo hay un monomio posible: $x_0^{-1}\cdots x_n^{-1}$. Luego, $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$.

Más aún, si $d \geq 0$ entonces

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong \operatorname{Vect}_k\langle x_0^{b_0}\cdots x_n^{b_n} \text{ con } b_j \geq 0 \text{ y } \sum b_j = d\rangle,$$

por lo que si $x_0^{a_0}\cdots x_n^{a_n} \in \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))$ y $x_0^{b_0}\cdots x_n^{b_n} \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, entonces

$$x_0^{a_0+b_0}\cdots x_n^{a_n+b_n} \in \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k.$$

Más aún, si $d < 0$ entonces $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) = \{0\}$ pues **no** hay monomios en $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})$ de grado $-d-n-1 > -n-1$.

Para probar (3), usamos indución en n (pues el caso $n = 1$ está cubierto):

Si localizamos respecto a la variable x_n, obtenemos que

$$C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})_{x_n} \cong C^\bullet(\mathscr{U}|_{U_n}, \mathscr{F}|_{x_n}).$$

Además, el Teorema de Serre sobre la cohomología de variedades afines (ver 4.1.25) implica que

$$\mathrm{H}^i(U_n, \mathscr{F}|_{U_n}) = 0 \text{ para todo } i \geq 1, \text{ pues } U_n \cong \mathbb{A}^n.$$

Dado que la localización preserva la exactitud, deducimos que $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})_{x_n} = 0$ para todo $i \geq 1$, i.e., todo elemento de $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})$ es anulado por alguna potencia de x_n. Para concluir, basta verificar entonces que multiplicar por la variable x_n define un morfismo *inyectivo* (de donde obtenemos (3)):

Sea $H := \{x_n = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$, y recordemos (ver Observación 3.4.25) que hay una sucesión exacta corta

$$(\star) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-H) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \iota_*\mathscr{O}_H \longrightarrow 0$$

asociada al divisor efectivo H. Tensorizando $(\star) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y considerando la suma directa $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}$, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\cdot x_n} \mathscr{F} \longrightarrow \iota_*\mathscr{F}_H \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{F}_H := \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathscr{O}_H(d)$. Recordando que $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \iota_*\mathscr{F}_H) \cong \mathrm{H}^i(H, \mathscr{F}_H)$, obtenemos las siguientes sucesiones exactas largas en cohomología:

(a)
$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(H, \mathscr{F}_H) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow 0,$$

donde el último 0 se obtiene por inducción.

(b) $0 \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow 0$ para todo $1 < i < n-1$,

donde el primero y último 0 se obtienen por indución, y en particular (dado que multiplicar por x_n es un isomorfismo en este caso) se tiene $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) = 0$ si $1 < i < n-1$.

(c)
$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(H, \mathscr{F}_H) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow 0,$$

donde el último 0 se obtiene gracias al Teorema de anulación de Grothendieck (pues $\dim(H) = n-1$).

Finalmente, notamos que los primeros términos de (a) se escriben como

$$0 \longrightarrow k[x_0, \dots, x_n] \xhookrightarrow{\cdot x_n} k[x_0, \dots, x_n] \twoheadrightarrow k[x_0, \dots, x_{n-1}] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow 0,$$

y por ende observamos que los primeros tres términos ya forman una sucesión exacta. En otras palabras, podemos sub-dividir la sucesión exacta (a) en dos sucesiones exactas: en los primeros tres términos y en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \longrightarrow 0,$$

i.e., multiplicar por x_n es un isomorfismo y por ende $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) = 0$. De manera similar (usando (2) para obtener sucesiones exactas explícitas), se deduce que $\mathrm{H}^{n-1}(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) = 0$ y con ello se prueba (3). $\square$

Ejercicio 4.2.2. — Utilizar la sucesión exacta de Euler para probar que

$$h^i(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Veamos algunas consecuencias importantes del resultado anterior. Para ello, utilizaremos el siguiente hecho (que volverá a aparecer en reiteradas ocasiones más adelante):

Observación importante 4.2.3. — Sea X una variedad algebraica y sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Entonces, hay una biyección entre:

$$\left\{\begin{array}{c} s \in \Gamma(X, \mathscr{F}) \\ \text{sección global} \end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi : \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{F} \text{ morfismo} \\ \text{de } \mathscr{O}_X\text{-módulos} \end{array}\right\}$$

$$s \longmapsto \varphi_{s,U} : \mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{F}(U),\ \lambda \longmapsto \lambda s|_U$$

$$s_\varphi := \varphi_X(1) \in \mathscr{F}(X) \longleftarrow \varphi$$

Recuerdo 4.2.4. — Sea $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ una variedad algebraica proyectiva y sea $d \in \mathbb{Z}$. Entonces, se define

$$\mathscr{O}_X(d) := \iota^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X.$$

Más generalmente, si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo entonces definimos

$$\mathscr{F}(d) := \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(d).$$

***Lema 4.2.5* (Serre).** — *Sea $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ una variedad algebraica proyectiva y $\mathscr{F}$ un haz* coherente *en X. Entonces, existe $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m \gg 0$ tal que*

$$\mathscr{O}_X(-m)^{\oplus r} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{F}$$

es un morfismo sobreyectivo de $\mathscr{O}_X$-módulos. En otras palabras, tensorizando por $\mathscr{O}_X(m)$, $\mathscr{O}_X^{\oplus r} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{F}(m)$ es un morfismo sobreyectivo de $\mathscr{O}_X$-módulos.

Demostración. — Sea $U_i \overset{\mathsf{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ abierto estándar de $\mathbb{P}^n$, y sea $V_i = X \cap U_i$ abierto *afín* de X.

Dado que $\mathscr{F}$ es coherente, tenemos que $\mathscr{F}|_{V_i} \cong \widetilde{M_i}$ para cierto A_i-módulo M_i finitamente generado, y donde $A_i = \mathscr{O}(V_i)$.

Sean $s_{i,1}, \ldots, s_{i,k_i} \in M_i \cong \Gamma(V_i, \mathscr{F}|_{V_i})$ generadores de M_i, que en particular general el tallo $\mathscr{F}_x$ para todo $x \in V_i$. La idea será que, a pesar de que las s_{ij} **no** se extienden necesariamente a secciones globales de $\mathscr{F}$, se tendrá que $s_{ij} x_i^m \in \Gamma(X, \mathscr{F}(m))$ son secciones globales para cierto $m \gg 0$:

Para ello, notamos que $X \setminus V_i$ se cubre por los abiertos V_k con $k \neq i$, y luego basta probar que $s_{ij} x_i^m$ se extiende a cada V_k para cierto $m \gg 0$: Dado que $\mathscr{F}(V_k) \overset{\mathsf{def}}{=} M_k$ y que $\mathscr{F}(V_i \cap V_k) = (M_k)_{x_i}$ es la localización en la variable x_i, existe $d_k \in \mathbb{N}$ tal que $s_{ij} x_i^{d_k} \in \mathscr{F}(V_k)$. Así, basta considerar $m := \max_k\{d_k\}$.

En otras palabras, para $m \gg 0$ obtenemos r secciones $s_{ij} \in \Gamma(X, \mathscr{F}(m))$ que generan los tallos $\mathscr{F}(m)_x$ para todo $x \in X$, y por ende ellas definen un morfismo sobreyectivo de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$\mathscr{O}_X^{\oplus r} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{F}(m),$$

i.e., $\mathscr{O}_X(-m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ es sobreyectivo. $\square$

El Lema de Serre nos motiva a definir la siguiente noción, que permite reformular el enunciado anterior como:

> Sea $\mathscr{F}$ un haz coherente en una variedad proyectiva $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, entonces $\mathscr{F}(m)$ es *globalmente generado* para cierto $m \gg 0$.

Definición 4.2.6. — Sea X una variedad algebraica y sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Decimos que $\mathscr{F}$ es **globalmente generado** (o bien **generado por finitas secciones**) si existe $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y un morfismo sobreyectivo

$$\mathscr{O}_X^{\oplus N} \twoheadrightarrow \mathscr{F},$$

de $\mathscr{O}_X$-módulos.

Ejercicio 4.2.7. — Sea $E \longrightarrow X$ un fibrado vectorial, y sea $\mathscr{E}$ su haz de secciones asociado. Probar que E es globalmente generado (como fibrado vectorial) si y sólo si $\mathscr{E}$ es globalmente generado (como $\mathscr{O}_X$-módulo).

***Teorema 4.2.8* (de finitud).** — *Sea $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ una variedad algebraica* proyectiva *y $\mathscr{F}$ un haz* coherente *en X. Entonces, los k-espacios vectoriales*

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \text{ son de } \textit{dimensión finita} \text{ para todo } i \in \mathbb{N},$$

i.e., $h^i(X, \mathscr{F}) < +\infty$.

Demostración. — Dado que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \iota_*\mathscr{F})$ y que $\iota_*\mathscr{F}$ es un haz coherente en $\mathbb{P}^n$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X = \mathbb{P}^n$. Más aún, $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) = 0$ si $i > n$ gracias al Teorema de anulación de Grothendieck. Para concluir, procedamos por inducción descendente en $i \in \mathbb{N}$:

Por el Lema de Serre, existen $r, m \in \mathbb{N}$ y una sucesión exacta de haces coherentes en $\mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0,$$

que induce una sucesión exacta larga en cohomología de la forma

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^{\oplus r} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathscr{G}) \longrightarrow \ldots$$

Aquí, el primer término es de dimensión finita gracias al cálculo explícito al comienzo de la sección y el último término es de dimensión infinita por inducción descendente. Finalmente,

$$h^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\delta) + \dim_k \ker(\delta) = \mathrm{rg}(\delta) + \mathrm{rg}(\alpha) < +\infty,$$

de donde se deduce el resultado. $\square$

***Teorema 4.2.9* (Anulación de Serre).** — *Sea* $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ *una variedad algebraica* proyectiva *y* $\mathscr{F}$ *un haz* coherente *en* X. *Entonces, existe* $m_0 = m_0(\mathscr{F}) \in \mathbb{N}$ *tal que*

Para todo $i \geq 1$ *y todo* $m \geq m_0$, *se tiene que* $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}(m)) = 0$.

Demostración. — Tal como en el Teorema de finitud, podemos suponer que $X = \mathbb{P}^n$ y argumentamos por inducción descendente en $i \in \mathbb{N}$ (donde el caso $i > n$ está cubierto por el teorema de anulación de Grothendieck):

El Lema de Serre implica que existen $r, m_1 \in \mathbb{N}$ y una sucesión exacta de haces coherentes en $\mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m_1)^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

Al tensorizar dicha sucesión exacta por $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}(m) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m - m_1)^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F}(m) \longrightarrow 0,$$

la cual induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m{-}m_1))^{\oplus r} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(m)) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{i+1}(\mathbb{P}^n, \mathscr{G}(m)) \longrightarrow \ldots$$

El cálculo explícito al comienzo de la sección implica que el primer término es 0 para $m \geq m_1$ y $i \geq 1$, mientras que la hipótesis de inducción asegura que el último término es 0 para $m \geq m_2 := m_2(\mathscr{G}) = m_2(\mathscr{F})$. Así,

$$\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(m)) = 0$$

para todo $m \geq m_0 := \max\{m_1, m_2\}$. □

Ejemplo importante 4.2.10. — Sea X una variedad algebraica proyectiva y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrado en rectas *amplio*, i.e., existe $m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $L^{\otimes m_0}$ es *muy amplio*:

$$\psi := \varphi_{L^{\otimes m_0}} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

es un incrustamiento cerrado, con $\psi^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L^{\otimes m_0}$.

En particular, tenemos que $L^{\otimes m_0} \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_X(1)$ respecto al incrustamiento $\psi : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Luego, para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en X se tiene que:

(1) $\mathscr{F} \otimes L^{\otimes m m_0} \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(m) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{F}(m)$ es globalmente generado para todo $m \gg 0$.

(2) Para todo $i \geq 1$ y todo $m \gg 0$, se tiene que

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m m_0}) = 0,$$

donde $\mathscr{L}$ es el haz de seccións de L.

El ejemplo anterior, motiva la siguiente definición.

Definición 4.2.11. — Sea X una variedad algebraica y sea $L \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas, cuyo haz de secciones será denotado por $\mathscr{L}$. Decimos que $\mathscr{L}$ es **amplio como $\mathscr{O}_X$-módulo** si:

> Para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en X se tiene que $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m = m(\mathscr{F}) \gg 0$.

Tal como lo ilustra el resultado siguiente, muchas veces los haces de secciones son más fáciles de manipular que los fibrados en rectas.

Proposición 4.2.12. — *Sea X una variedad algebraica y sean $L, M \in \operatorname{Pic}(X)$ con haces de secciones $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$, respectivamente. Entonces:*

(1) *Para todo $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, el haz $\mathscr{L}$ es amplio como $\mathscr{O}_X$-módulo si y sólo si $\mathscr{L}^{\otimes r}$ lo es.*
(2) *Si $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ son amplios como $\mathscr{O}_X$-módulos, entonces $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ también.*
(3) *Si $\mathscr{M}$ es amplio como $\mathscr{O}_X$-módulo, entonces $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r}$ también lo es para todo $r \gg 0$.*

Demostración. — Sea $\mathscr{F}$ un haz coherente arbitrario en X. Entonces tenemos que:

(1) Si $\mathscr{L}$ es amplio entonces $\mathscr{L}^{\otimes r}$ también (pues $mr \geq m$). Si suponemos que $\mathscr{L}^{\otimes r}$ es amplio, entonces para todo $0 \leq s < r$ se tiene que el haz
$$(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes s}) \otimes (\mathscr{L}^{\otimes r})^{\otimes m} \cong \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (s+mr)}$$
es globalmente generado para $m \geq m_s$. Luego, $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m \geq r \cdot \max\{m_0, \ldots, m_{r-1}\}$, i.e., $\mathscr{L}$ es amplio.
(2) Supongamos primero que $\mathscr{L}$ es amplio y que $\mathscr{M}$ es globalmente generado. En tal caso, $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m \gg 0$ y luego $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{M}^{\otimes m}$ también lo es, i.e., $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ es amplio en dicho caso.

En el caso general, si $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ son amplios, entonces $\mathscr{O}_X \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \cong \mathscr{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m \gg 0$ y, dado que $\mathscr{M}^{\otimes m}$ es amplio gracias a (1), se tiene que
$$\mathscr{L}^{\otimes m} \otimes \mathscr{M}^{\otimes m} \cong (\mathscr{L} \otimes \mathscr{M})^{\otimes m}$$
es amplio. Nuevamente, (1) implica que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ es amplio.
(3) Si $\mathscr{M}$ es amplio, entonces $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r}$ es globalmente generado para todo $r \gg 0$. Luego,
$$(\mathscr{F} \otimes \mathscr{M}^{\otimes m}) \otimes (\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes r})^{\otimes m} \cong \mathscr{F} \otimes (\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes (r+1)})^{\otimes m}$$
es globalmente generado para todo $m \gg 0$, i.e., $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}^{\otimes (r+1)}$ es amplio.

Aquí, usamos varias veces el hecho que si $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ son globalmente generados, entonces $\mathscr{L} \otimes \mathscr{M}$ también (cf. Ejercicio 4.2.7). $\square$

Teorema 4.2.13. — *Sea X una variedad algebraica proyectiva y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrado en rectas con haz de secciones $\mathscr{L}$. Entonces,*

> *$\mathscr{L}$ es amplio como $\mathscr{O}_X$-módulo si y sólo si L es un fibrado en rectas amplio (i.e., existe $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $L^{\otimes r}$ es muy amplio).*

Demostración. — Sabemos que si $L^{\otimes r}$ es muy amplio, entonces $\mathscr{L}^{\otimes r}$ es amplio como $\mathscr{O}_X$-módulo (ver Ejemplo 4.2.10) y luego $\mathscr{L}$ también.

Supongamos ahora que $\mathscr{L}$ es amplio como $\mathscr{O}_X$-módulo y veamos que L es un fibrado en rectas amplio:

Para ello, fijemos $x_0 \in X$ y consideremos una vecindad afín V de x_0 tal que $L|_V \cong V \times \mathbb{A}^1$, i.e., $\mathscr{L}|_V \cong \mathscr{O}_V$. Definamos $Y := X \setminus V$, cerrado de X definido por el haz de ideales $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathscr{O}_X$.

Dado que $\mathcal{I}_Y$ es un haz coherente en X y $\mathscr{L}$ es amplio, existe $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $\mathcal{I}_Y \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado. Por otro lado, las secciones de $\mathcal{I}_Y \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ son secciones de $L^{\otimes m}$ que se anulan en Y, y por ende existe

$$s \in \Gamma(X, \mathcal{I}_Y \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) \subseteq \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes m}) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m})$$

que **no** se anula en $x_0 \notin Y$. Luego, el abierto

$$X_s := \{x \in X \text{ tal que } s(x) \neq 0\}$$

está contenido en V y, dado que $\mathscr{L}|_V \cong \mathscr{O}_V$ y que $\sigma := s|_V \in \mathscr{O}(V)$, tenemos que $X_s = V(\sigma)$ es un *abierto afín* que contiene a x_0.

Dado que la construcción anterior se aplica a cada $x_0 \in X$, podemos considerar un cubrimiento finito $X = \bigcup_{i=1}^{p} X_{s_i}$ por dichos abiertos afines y, reemplazando s_i por una potencia si fuese necesario, podemos suponer que m es el mismo para cada X_{s_i} (i.e., $s_i \in \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes m})$ para todo i). Además, notamos que las secciones $s_1, \ldots, s_p$ **no** poseen ceros comunes.

Para concluir, consideremos f_{ij} los (¡finitos!) generadores de la k-álgebra $\mathscr{O}(X_{s_i})$. Así, tal como se probó en el Lema de Serre, existe $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que

$$s_i^r f_{ij} \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes rm}) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes rm}).$$

Más aún, las secciones s_i^r y $s_{ij} := s_i^r f_{ij}$ de $L^{\otimes rm}$ **no** tienen ceros comunes y por ende definen $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$ morfismo regular. Si denotamos por $U_i \stackrel{\mathsf{def}}{=} \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^N$ al abierto estándar de $\mathbb{P}^N$ correspondiente a la coordenada s_i^r de φ, entonces tenemos que los $U_1, \ldots, U_p$ cubren $\varphi(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ y que $\varphi^{-1}(U_i) \stackrel{\mathsf{def}}{=} X_{s_i}$. Finalmente, notamos que $\varphi := \varphi|_{X_{s_i}} : X_{s_i} \longrightarrow U_i$ corresponde al morfismo $\varphi_i^* : \mathscr{O}(U_i) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{O}(X_{s_i})$ que es *sobreyectivo* por construcción de φ, i.e., $\mathscr{O}(X_{s_i}) \cong \mathscr{O}(U_i)/I_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Así, φ_i induce un isomorfismo sobre su imagen $V(I_i) \subseteq U_i$ y por ende define un incrustamiento cerrado, i.e., $L^{\otimes rm}$ es un fibrado en rectas muy amplio. □

De manera similar, tenemos el siguiente *criterio cohomológico de amplitud.*

Teorema 4.2.14. — *Sea X una variedad algebraica proyectiva y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrado en rectas con haz de secciones $\mathscr{L}$. Entonces, son equivalentes:*

(1) *L es un fibrado en rectas amplio.*

(2) *Para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en X, se tiene que*
$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0 \text{ para todo } m \gg 0 \text{ y todo } i \geq 1.$$

(3) *Para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en X, se tiene que*
$$\mathrm{H}^1(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0 \text{ para todo } m \gg 0.$$

Demostración. — Sea $\mathscr{F}$ un haz coherente en X. Entonces, (1) implica (2) ya que si L es amplio entonces existe $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $L^{\otimes r}$ es muy amplio y, por el Teorema de anulación de Serre, tenemos que para todo $0 \leq s < r$
$$\mathrm{H}^i(X, (\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes s}) \otimes (\mathscr{L}^{\otimes r})^{\otimes m}) = 0 \text{ para todo } i \geq 1 \text{ y para todo } m \geq m_s.$$
Así, para $m \geq r \cdot \max\{m_0, \ldots, m_{r-1}\}$ se tiene que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$ para todo $i \geq 1$. Ciertamente (2) implica (3), por lo que basta verificar que (3) implica (1):

Fijemos $x \in X$ y denotemos por $k_x := \iota_x(k)$ al haz rascacielos asociado (ver Ejemplo 1.3.6 (4)), el cual es un haz coherente pues la sucesión
$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_x \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} k_x \longrightarrow 0$$
es exacta. De manera similar, si consideramos el morfismo sobreyectivo $\mathscr{F} \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \mathscr{F} \otimes k_x$ con kernel $\mathscr{G} := \mathscr{F} \otimes \mathcal{I}_x$, obtenemos una sucesión exacta
$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \mathscr{F} \otimes k_x \longrightarrow 0$$
de haces coherentes en X. La hipótesis (3) implica que existe $m_0 = m_0(\mathscr{F}, x)$ tal que $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{G} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0$ para todo $m \geq m_0$, y en particular
$$\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \otimes k_x)$$
es una aplicación lineal sobreyectiva.

Luego, el Lema de Nakayama (ver Recuerdo 3.3.8) implica[4] que existe una vecindad abierta $U = U_{\mathscr{F},m_0}$ de $x \in X$ tal que $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m})|_U$ es globalmente generado. En particular, considerando $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$, existe $m_1 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y un abierto $U_{\mathscr{O}_X,m_1}$ tal que $\mathscr{L}^{\otimes m_1}$ es globalmente generado en el abierto $U_{\mathscr{O}_X,m_1}$.

Así, dado que

$$\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m} \cong (\mathscr{L}^{\otimes m_1})^{\otimes r} \otimes (\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (m_0+s)}) \text{ para ciertos } r \geq 0 \text{ y } 0 \leq s < m_1,$$

tenemos que $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado en el abierto

$$U_x := U_{\mathscr{O}_X,m_1} \cap U_{\mathscr{F},m_0} \cap U_{\mathscr{F},m_0+1} \cap \cdots \cap U_{\mathscr{F},m_0+m_1-1}.$$

Finalmente, basta cubrir X con finitos abiertos U_x y considerar el máximo m_0 para deducir que $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m \geq m_0$, i.e., $\mathscr{L}$ es amplio como $\mathscr{O}_X$-módulo, lo cual equivale a su vez a que L es un fibrado en rectas amplio. $\square$

El Teorema anterior es especialmente útil para estudiar el pullback de fibrados en rectas mediante *morfismos finitos*. Para esto, necesitaremos antes el siguiente resultado auxiliar (que es muy útil en otros contextos).

Lema 4.2.15 **(Fórmula de proyección).** — *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Para todo $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$ y todo haz localmente libre $\mathscr{E}$ de rango r en Y, se tiene que*

$$\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_Y} f_*\mathscr{F} \cong f_*(f^*(\mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}).$$

Demostración. — La afirmación es local en Y, por lo que podemos suponer que $\mathscr{E} \cong \mathscr{O}_Y^{\oplus r}$. Además, todos los términos involucrados conmutan con la suma directa, por lo que basta considerar $\mathscr{E} \cong \mathscr{O}_Y$. En tal caso, el resultado se obtiene al observar que $f^*\mathscr{O}_Y \cong \mathscr{O}_X$. $\square$

Teorema 4.2.16. — *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un* morfismo finito *entre variedades algebraicas* proyectivas. *Entonces, para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en X y $L \in \operatorname{Pic}(Y)$ fibrado en rectas en Y se tiene que:*

---

[4] Más formalmente, $s_1, \ldots, s_r \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ son secciones cuyas imagenes generan el k-espacio vectorial de dimensión finita $\Gamma(X, \mathscr{F} \otimes k_x)$, ellas permiten definir una sucesión exacta

$$\mathscr{O}_X^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{Q} \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{Q} \otimes k_x = 0$. En una vecindad abierta afín U de x, con $\mathscr{O}_X(U) = A$, el haz coherente $\mathscr{Q}$ corresponde a un A-módulo finitamente generado N que cumple $N \otimes_A (A/\mathfrak{m}_x) = 0$, i.e., $\mathfrak{m}_x N = N$. El Lema de Nakayama aplicado al anillo local $A_{\mathfrak{m}_x}$ implica que $N_{\mathfrak{m}_x} = 0$ y por ende existe $f \notin \mathfrak{m}_x$ tal que $fN = 0$, i.e., $\mathscr{Q}$ es nulo en la vecindad U_f de x, i.e., $\mathscr{F}$ es globalmente generado en U_f.

(1) $\mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(Y, f_*\mathscr{F})$ *para todo* $i \geq 0$.
(2) *Si* $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ *es amplio, entonces* $f^*L \in \mathrm{Pic}(X)$ *es amplio.*

Demostración. — Sea $V \subseteq Y$ un abierto afín. Dado que f es un morfismo finito, $U := f^{-1}(V)$ es un abierto afín en X. Luego, si $\mathscr{V}$ es un cubrimiento afín de Y, entonces $\mathscr{U} := f^{-1}(\mathscr{V})$ es un cubrimiento afín de X y, por definición de $f_*\mathscr{F}$, se tiene que

$$C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}) \cong C^\bullet(\mathscr{V}, f_*\mathscr{F}).$$

Dado que f es un morfismo finito, $f_*\mathscr{F}$ es un haz coherente en Y y por ende el Teorema de Leray implica que

$$\mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \cong \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{V}}(Y, f_*\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(Y, f_*\mathscr{F})$$

para todo $i \geq 0$, de donde obtenemos (1).

Para probar (2), notamos que si $\mathscr{L}$ es el haz de secciones de $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ entonces la fórmula de proyección implica que

$$f_*(\mathscr{F} \otimes f^*\mathscr{L}^{\otimes m}) \cong f_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}$$

para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en X. Luego, el ítem (1) implica que

$$\mathrm{H}^1(X,\mathscr{F} \otimes f^*\mathscr{L}^{\otimes m}) \cong \mathrm{H}^1(Y, f_*\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) = 0 \text{ para todo } m \geq m_0,$$

donde la última anulación se obtiene del hecho que L es amplio. Así, el criterio cohomológico de amplitud implica que f^*L es amplio. □

Ejemplo importante 4.2.17. — Recordemos que la normalización

$$\nu : X^\nu \longrightarrow X$$

es un morfismo finito. Más aún, se puede probar que si X es una variedad algebraica *proyectiva* entonces X^ν también es una variedad algebraica proyectiva (cf. [**Sha13**, Ch. 3, Theorem 2.23]). Luego,

> Si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ es un fibrado en rectas amplio, entonces ν^*L es un fibrado en rectas amplio en la normalización X^ν.

Una consecuencia importante de lo anterior (ver §3.4.3) es el hecho que si X es una variedad algebraica *proyectiva* e irreducible y $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas *amplio*, entonces

$$D \cdot C > 0 \text{ para toda curva irreducible } C \subseteq X,$$

donde $D \cdot C \overset{\mathsf{def}}{=} \deg(\nu^*(L|_C))$ y donde $\nu : C^\nu \longrightarrow C$ es la normalización.

Ejercicio 4.2.18. — Sea $\widetilde{S} = \mathrm{Bl}_p(S) \xrightarrow{\varepsilon} S$ el blow-up de un punto de una superficie proyectiva suave e irreducible S, y sea $E \overset{\mathsf{def}}{=} \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ el divisor excepcional. Probar que $\mathscr{O}_{\widetilde{S}}(E)$ **no** es amplio.

4.3. Categorías abelianas y functores exactos

Con todos los ejemplos y aplicaciones vistos en las secciones anteriores, estamos en un buen punto para comenzar nuestro camino hacia la definición formal de grupos de cohomología usando *functores derivados*, basada en el artículo fundacional de Grothendieck [**Gro57**] (típicamente conocido como el *Tohoku paper*). Necesitaremos las siguientes nociones, que pueden consultarse más detalladamente en [**Huy06**].

Definición 4.3.1. — Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Decimos que $\mathscr{C}$ es una **categoría aditiva** si para todos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ es un *grupo abeliano*, y además se verifica que:

(1) La composición

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, C),\ (f, g) \longmapsto g \circ f$$

es bilineal.

(2) Existe un (único) objeto $0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(0, 0) = \{0\}$ es el grupo trivial con 1 elemento.

(3) Para todos $A_1, A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ existe un (único) objeto $B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ junto con morfismos $j_i : A_i \longrightarrow B$ (resp. $p_i : B \longrightarrow A_i$), con $i \in \{1, 2\}$, que hacen de B la **suma directa** (resp. **producto**) de A_1 y A_2 en $\mathscr{C}$.

Más aún, un functor entre categorías aditivas

$$F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

es un **functor aditivo** (covariante) si las aplicaciones inducidas

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$$

son morfismos de grupos para todo par de objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$.

Para poder hablar de *sucesiones exactas*, necesitamos contar con la noción de kernel e imagen. Esta simple observación, motiva la definición más importante de esta sección.

Definición 4.3.2. — Sea $\mathscr{C}$ una categoría aditiva. Decimos que $\mathscr{C}$ es una **categoría abeliana** si además cumple que:

(4) Todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ posee un kernel y un cokernel en $\mathscr{C}$, y la aplicación natural $\mathrm{Coim}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f)$ es un isomorfismo.

Aquí, $\mathrm{Im}(f)$ es el kernel de la aplicación $B \longrightarrow \mathrm{coker}(f)$ y la coimagen $\mathrm{Coim}(f)$ es el cokernel de la aplicación $\ker(f) \longrightarrow A$. Luego, la condición (4) señala que para todo morfismo $f : A \longrightarrow B$ se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr] & & & B \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{coker}(f) \\
& & \operatorname{coker}(\iota) \arrow[r, "\sim"] & \ker(\pi) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

que resumimos escribiendo que "$A/\ker(f) \cong \operatorname{Im}(f)$" (i.e., el Teorema del isomorfismo de Noether es un axioma).

¡Atención! — En una categoría abeliana $\mathscr{C}$ tiene sentido hablar de *sucesiones exactas*. Más precisamente, decimos que

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$$

es una **sucesión exacta** en $\mathscr{C}$ si $\ker(f_2) = \operatorname{Im}(f_1)$.

Naturalmente, ya hemos encontrado en varias ocasiones la noción de categoría abeliana sin haberlo dicho explícitamente.

Ejemplo 4.3.3. —

(1) Sea A un anillo conmutativo. La categoría A-**Mod** de A-módulos es abeliana, y la sub-categoría de A-módulos finitamente generados es abeliana también.
(2) Sea X un espacio topológico. La categoría $\mathbf{Sh}(X)$ de haces de grupos abelianos en X es una categoría abeliana.
(3) Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado. La categoría $\mathscr{O}_X$-**Mod** de $\mathscr{O}_X$-módulos es abeliana.
(4) Sea X una variedad algebraica. Las categorías $\mathbf{Coh}(X)$ y $\mathbf{Qcoh}(X)$ de haces coherentes y quasi-coherentes en X son categorías abelianas.
(5) Sea X una variedad algebraica de $\dim(X) \geq 1$. La categoría $\mathbf{Vect}(X)$ de fibrados vectoriales en X **no** es una categoría abeliana.

Observación importante 4.3.4. — Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un functor aditivo covariante entre categorías abelianas, y sean

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$$

morfismos en $\mathscr{C}$ tal que $f_2 \circ f_1 = 0$, i.e., $\operatorname{Im}(f_1) \subseteq \ker(f_2)$.

Aplicando F, obtenemos morfismos en $\mathscr{D}$

$$F(A_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(A_2) \xrightarrow{F(f_2)} F(A_3)$$

que también cumplen que $F(f_2) \circ F(f_1) \overset{\mathsf{def}}{=} F(f_2 \circ f_1) = 0$.

Definición 4.3.5. — Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un functor aditivo (covariante) entre categorías abelianas. Decimos que F es **exacto por la izquierda** (resp. **exacto por la derecha**) si toda sucesión *exacta* corta en $\mathscr{C}$

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \longrightarrow 0$$

es enviada por F en una sucesión en $\mathscr{D}$

$$(F(S)) \qquad 0 \longrightarrow F(A_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(A_2) \xrightarrow{F(f_2)} F(A_3) \longrightarrow 0$$

que es exacta *salvo quizás* en $F(A_3)$ (resp. en $F(A_1)$), i.e., *quizás* $F(f_2)$ **no** es sobreyectivo (resp. *quizás* $F(f_1)$ **no** es inyectivo).

En particular, decimos que F es un **functor exacto** si es exacto por la izquierda y por la derecha, i.e., si (S) es exacta entonces $F(S)$ es exacta.

Ejemplo importante 4.3.6. —

(1) Sea X una variedad algebraica *afín*, con $A = \mathscr{O}(X)$. El functor de secciones globales

$$\Gamma : \mathbf{Coh}(X) \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$$

es un functor exacto (ver Ejemplo 4.1.23).

(2) Sea A un anillo conmutativo y sea $f \in A$. El functor de localización

$$(\,\cdot\,)_f : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A_f\text{-}\mathbf{Mod},\ M \longmapsto M_f$$

es exacto.

(3) Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana y $A_0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ un objeto fijo. Entonces, el functor

$$\mathrm{Hom}(A_0, \,\cdot\,) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ B \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_0, B)$$

es *exacto por la izquierda.* Los ejemplos típicamente usados son los siguientes:

(a) Si $\mathscr{C} = A\text{-}\mathbf{Mod}$, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es un A-módulo.

(b) Si $\mathscr{C} = \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod}$, entonces $\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es un A-módulo, donde $A = \mathscr{O}_X(X) \overset{\mathsf{def}}{=} \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$.

(c) Si $\mathscr{C} = \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod}$ y consideramos el functor

$$\mathscr{H}\!om(\mathscr{F}, \,\cdot\,) : \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{G} \longmapsto \mathscr{H}\!om(\mathscr{F}, \mathscr{G}).$$

donde el $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{H}\!om(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es el haz en grupos abelianos $U \longmapsto \mathrm{Hom}_U(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$ (ver Observación 1.4.10 (5)).

(4) Sea X un espacio topológico. Entonces, el functor de secciones globales

$$\Gamma : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab},\ \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$$

es *exacto por la izquierda.*

El siguiente ejercicio será utilizado posteriormente, y generaliza al functor de secciones globales (que corresponde al caso en que $Y = \{*\}$ es un punto).

Ejercicio 4.3.7. — Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Probar que el functor imagen directa

$$f_* : \mathbf{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(Y),\ \mathscr{F} \longmapsto f_*\mathscr{F}$$

es *exacto por la izquierda.*

Observación 4.3.8. — Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Se puede probar que el functor (¡contravariante!)

$$f^* : \mathbf{Qcoh}(Y) \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(X),\ \mathscr{G} \longmapsto f^*\mathscr{G}$$

es *exacto por la derecha.* En el caso particular en que f^* también sea exacto por la izquierda (i.e., f^* sea un functor exacto) se dice que f es un **morfismo plano** (en inglés, *flat*), la cual es una noción muy utilizada en Teoría de Deformación. Ver [**Har10**] para más detalles.

Definición 4.3.9. — Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana. Un **complejo** (de cocadenas) en $\mathscr{C}$ es una colección $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que:

(1) $K^n \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es un objeto de $\mathscr{C}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
(2) $d^n : K^n \longrightarrow K^{n+1}$ es un morfismo en $\mathscr{C}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ (i.e., $d^n \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K^n, K^{n+1})$), llamado el **diferencial** o **coborde**, y verifica $d^{n+1} \circ d^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Gráficamente, la información anterior se representa en el diagrama

$$K^\bullet : \cdots \xrightarrow{d^{i-2}} K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

Más aún, para cada $i \in \mathbb{Z}$, el objeto

$$\mathrm{H}^i(K^\bullet) := \ker(d^i)/\operatorname{Im}(d^{i-1}) \overset{\mathsf{def}}{=} \operatorname{coker}\left(\operatorname{Im}(d^{i-1}) \longrightarrow \ker(d^i)\right) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$$

es llamado la **i-ésima cohomología** del complejo $K^\bullet$.

Notación 4.3.10. — Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un functor aditivo (covariante) entre categorías abelianas. Dado un complejo $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathscr{C}$, denotamos por $F(K^\bullet)$ al complejo en $\mathscr{D}$ dado por la familia $(F(K^n), F(d^n))_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $F(K^n) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$ y donde

$$F(d^n) : F(K^n) \longrightarrow F(K^{n+1})$$

es el diferencial asociado. Por abuso de notación, escribimos $d^n = F(d^n)$.

Lema 4.3.11. — *Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un functor* exacto *entre categorías abelianas. Entonces, para todo complejo $K^\bullet$ en $\mathscr{C}$ hay un isomorfismo*

$$\mathrm{H}^i(F(K^\bullet)) \xrightarrow{\sim} F(\mathrm{H}^i(K^\bullet)) \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. — Dado un complejo $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathscr{C}$, definimos

$$Z^i := \ker(d^i) \text{ y } B^i := \mathrm{Im}(d^{i-1}) \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Así, $\mathrm{H}^i(K^\bullet) \overset{\text{def}}{=} Z^i/B^i$. Dado que F es un functor exacto, tenemos que

$$F(Z^i) \overset{\text{def}}{=} \ker(F(d^i)) \text{ y } F(B^i) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(F(d^{i-1})) \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Así, aplicando F a la sucesión exacta corta en $\mathscr{C}$ dada por

$$0 \longrightarrow B^i \longrightarrow Z^i \longrightarrow \mathrm{H}^i(K^\bullet) \longrightarrow 0$$

obtenemos, gracias a que F es un functor exacto, una sucesión exacta en $\mathscr{D}$

$$0 \longrightarrow F(B^i) \longrightarrow F(Z^i) \longrightarrow F(\mathrm{H}^i(K^\bullet)) \longrightarrow 0$$

que nos permite deducir que

$$F(\mathrm{H}^i(K^\bullet)) \cong F(Z^i)/F(B^i) = \ker(F(d^i))/\,\mathrm{Im}(F(d^{i-1})) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(F(K^\bullet))$$

y así obtener el isomorfismo deseado. □

Definición 4.3.12. — Sean $K^\bullet = (K^n, d^n_K)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $L^\bullet = (L^n, d^n_L)_{n\in\mathbb{Z}}$ dos complejos en una categoría abeliana $\mathscr{C}$. Un **morfismo de complejos**

$$\varphi := \varphi^\bullet : (K^\bullet, d^\bullet_K) \to (L^\bullet, d^\bullet_L)$$

es una familia de morfismos $\{\varphi^i : K^i \to L^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ que son compatibles con los diferenciales:

$$\varphi^{i+1} \circ d^i_K = d^i_L \circ \varphi^i \text{para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

En otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K^\bullet : \arrow[d, "\varphi"] & \cdots \arrow[r, "d_K^{i-2}"] & K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "\varphi^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[d, "\varphi^i"] & K^{i+1} \arrow[r, "d_K^{i+1}"] \arrow[d, "\varphi^{i+1}"] & \cdots \\
L^\bullet : & \cdots \arrow[r, "d_L^{i-2}"] & L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i \arrow[r, "d_L^i"] & L^{i+1} \arrow[r, "d_L^{i+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Denotamos por $\mathrm{Kom}(\mathscr{C})$ la categoría cuyos objetos son los complejos $K^\bullet$ en $\mathscr{C}$ y cuyos morfismos son los morfismos de complejos, y la llamamos la **categoría de complejos de** $\mathscr{C}$.

Ejercicio 4.3.13. — Probar que $\mathrm{Kom}(\mathscr{C})$ es una categoría abeliana.
Indicación: Basta definir $0 \in \mathrm{Kom}(\mathscr{C})$ *como el complejo*

$$0^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots ,$$

el kernel de $\varphi : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ *es el complejo formado por los kernel* $\ker(\varphi^i)$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$*, etc.*

4.4. Resoluciones inyectivas y quasi-isomorfismos

Durante toda esta sección, denotamos por $\mathscr{C}$ una *categoría abeliana*. La siguiente noción, introducida por Baer en 1940, será fundamental en lo que sigue (cf. *Teorema de Extensión de Hahn-Banach*):

Definición 4.4.1. — Decimos que un objeto $I \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ es **inyectivo** si para toda sucesión exacta en $\mathscr{C}$ de la forma

$$0 \longrightarrow A \hookrightarrow B$$

y todo morfismo $f : A \longrightarrow I$, existe un morfismo (no necesariamente único) $g : B \longrightarrow I$ tal que $g \circ \varphi = f$. Equivalentemente, el functor *contravariante*

$$\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, I) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ A \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, I)$$

es *exacto*, i.e., siempre es posible completar

$$\begin{tikzcd} I & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook] & B \arrow[ul, dotted, "\exists\, g"'] \end{tikzcd}$$

en un diagrama conmutativo.

El siguiente hecho, demostrado por el mismo Baer en su artículo original [**Bae40**] (e.g. usando adecuadamente el Lema de Zorn), da un criterio muy útil de inyectividad en la categoría de módulos sobre un anillo.

Teorema 4.4.2 **(Criterio de Baer, 1940).** — *Sea A un anillo abeliano. Entonces, un A-módulo M es inyectivo si y sólo si*

> *Para todo ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ y todo morfismo de A-módulos $\varphi : \mathfrak{a} \longrightarrow M$, existe un morfismo de A-módulos $\Phi : A \longrightarrow M$ tal que $\Phi|_{\mathfrak{a}} = \varphi$ (i.e., Φ extiende a φ).*

Nuestras categorías favoritas serán las siguientes.

Definición 4.4.3. — Una categoría abeliana $\mathscr{C}$ **tiene suficientes inyectivos** si todo objeto $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ se incrusta en un objeto inyectivo, i.e., existe $I = I(A) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ objeto inyectivo y $A \hookrightarrow I$ morfismo de kernel nulo.

Recuerdo 4.4.4. — Recordemos que un grupo abeliano G es **divisible** si para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ el morfismo

$$G \twoheadrightarrow G, \ x \longmapsto nx$$

es *sobreyectivo*. Por ejemplo,

(1) Los grupos abelianos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ son divisibles.
(2) Suma directa y producto (no necesariamente finitos) de grupos abelianos divisibles es divisibles.
(3) Todo $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo I es un grupo abeliano divisible. En efecto, si fijamos $m \in I$ y $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, entonces $\mathfrak{a} = n\mathbb{Z}$ es un ideal de $\mathbb{Z}$ y podemos definir un morfismo de grupos abelianos $f : \mathfrak{a} \longrightarrow I$ mediante $f(n) =: m \in I$. Luego, el hecho que I sea inyectivo implica que podemos extender f a $g : \mathbb{Z} \longrightarrow I$ que verifica

$$m = f(n) = g(n) = ng(1),$$

i.e., existe $x := g(1)$ tal que $m = nx$.

Lema 4.4.5. — *En la categoría* **Ab** $\cong$ $\mathbb{Z}$-**Mod** *de grupos abelianos, todo grupo divisible G es inyectivo.*

Demostración. — Sea G un grupo abeliano divisible. Sea $\mathfrak{a} = n\mathbb{Z}$ un ideal de $\mathbb{Z}$ y sea $\varphi : \mathfrak{a} \longrightarrow G$ un morfismo de grupos abelianos. Como G es divisible, existe $x \in G$ tal que $\varphi(n) = nx$. Luego, podemos considerar el morfismo

$$\Phi : \mathbb{Z} \longrightarrow G, \ a \longmapsto ax$$

que verifica $\Phi(n) \stackrel{\text{def}}{=} nx = \varphi(n)$, i.e., Φ extiende a φ. Se concluye que G es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo gracias al Criterio de Baer. $\square$

Proposición 4.4.6. — *La categoría de grupos abelianos* **Ab** *tiene suficientes inyectivos.*

Demostración. — Veamos que todo grupo abeliano G se incrusta en un grupo divisible (i.e., inyectivo):

Definamos $\check{G} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. El emparejamiento natural

$$\check{G} \times G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

induce un morfismo $G \hookrightarrow \check{\check{G}},\ a \longmapsto \mathrm{ev}_a$ que es inyectivo. En efecto, si $a \neq 0$ entonces existe $f : \langle a \rangle \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(a) \neq 0$ y como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo (al ser divisible) en **Ab**, existe $g : G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $g(a) \neq 0$, i.e., $\mathrm{ev}_a(g) \neq 0$.

Notamos que si $L \cong \mathbb{Z}^{(\Lambda)}$ es un grupo abeliano libre, indexado por cierto conjunto Λ, entonces $\check{L}$ es isomorfo a $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, que es divisible. Dado que todo grupo abeliano es cociente de un grupo abeliano libre, podemos considerar a $\check{G}$ como el cociente de un grupo libre L (e.g. $L = \mathbb{Z}^{(\check{G})}$) y luego

$$L \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \check{G} \longrightarrow 0$$

induce $0 \longrightarrow \check{\check{G}} \longhookrightarrow \check{L}$, i.e., $G \hookrightarrow \check{L}$ se incrusta en el grupo divisible $\check{L}$. $\square$

La misma idea permite probar que la categoría A-**Mod** tiene suficientes inyectivos. Dejamos los detalles como ejercicio.

Ejercicio 4.4.7. — Sea A un anillo conmutativo, y sea M un A-módulo. Definimos el grupo abeliano $\check{M} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ y lo dotamos de estructura de A-módulo mediante

$$(a \cdot f)(x) := f(ax) \text{ para todo } f \in \check{M},\ x \in M \text{ y } a \in A.$$

Tal como antes, se tiene que $M \hookrightarrow \check{\check{M}}$ es un morfismo inyectivo de A-módulos.

(1) Para cada $f \in \check{M}$, definimos $\widetilde{f}(x)(a) := f(ax)$. Probar que

$$\check{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \check{A}),\ f \longmapsto \widetilde{f}$$

es un isomorfismo de A-módulos, con inversa $\widetilde{g} \longmapsto g$ dada por $g(x) := \widetilde{g}(x)(1)$.

(2) Deducir que $\check{A}$ es un A-módulo inyectivo (i.e., un objeto inyectivo en la categoría A-**Mod**).

Indicación: Dados $M \overset{\varphi}{\hookrightarrow} N$, $\widetilde{f} : M \to \check{A}$, y $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Probar que si $g : N \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ extiende a f, entonces $\widetilde{g} : N \to \check{A}$ extiende a $\widetilde{f}$.

(3) Deducir que la categoría A-**Mod** tiene suficientes inyectivos.

Los resultados anteriores se pueden extender directamente a categorías de haces.

Teorema 4.4.8. — *Sea X un espacio topológico (resp. un espacio anillado). Entonces, la categoría* $\mathbf{Sh}(X)$ *de haces de grupos abelianos en X (resp. la categoría $\mathscr{O}_X$-**Mod** de $\mathscr{O}_X$-módulos) tiene suficientes inyectivos.*

Demostración. — Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X, y para cada $x \in X$ consideremos una inclusión

$$\mathscr{F}_x \longhookrightarrow I(\mathscr{F}_x),$$

donde $I(\mathscr{F}_x)$ es un grupo abeliano inyectivo en donde se incrusta el tallo $\mathscr{F}_x$.

Sea $I(\mathscr{F}) \in \mathbf{Sh}(X)$ el haz definido por

$$I(\mathscr{F})(U) := \prod_{x\in U} I(\mathscr{F}_x) \text{ para todo } U \subseteq X \text{ abierto.}$$

Así, tenemos un morfismo inyectivo $\mathscr{F} \hookrightarrow I(\mathscr{F})$ y, dado que los morfismos de haces están determinados por los tallos, tenemos que para todo $\mathscr{G} \in \mathbf{Sh}(X)$ se verifica

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{G}, I(\mathscr{F})) \cong \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(\mathscr{G}_x, I(\mathscr{F}_x)) \text{ en } \mathbf{Ab}.$$

Así, $I(\mathscr{F})$ es un objeto inyectivo en la categoría $\mathbf{Sh}(X)$. La demostración para $\mathscr{O}_X$-módulos es identica. $\square$

Recuerdo 4.4.9. — Sea X una variedad algebraica afín con $A = \mathscr{O}(X)$. Entonces, el Teorema 4.1.16 señala que la categoría abeliana $\mathbf{Coh}(X)$ puede verse como una subcategoría de A-**Mod** vía $\mathscr{F} \longmapsto \mathrm{H}^0(X, \mathscr{F})$. La ventaja de esto último es que en la categoría A-**Mod** los cálculos son mucho más simples.

La observación anterior se extiende en gran medida gracias al siguiente resultado fundamental de álgebra homológica, probado por Freyd y Mitchell en 1964.

Teorema 4.4.10* (Freyd-Mitchell).** — *Toda categoría abeliana* (pequeña) $\mathscr{C}$ *puede ser vista como una subcategoría de R-Mod** *para cierto anillo* (*no necesariamente abeliano*) *R.*

Observación importante 4.4.11. — Una consecuencia inmediata del *Teorema de incrustamiento de Freyd-Mitchell* es que todos los cálculos en $\mathscr{C}$ que involucren kernel, cokernel e imágenes pueden hacerse en R-**Mod** mediante "*cacería de diagramas*". Notablemente:

(1) Un morfismo de complejos $\varphi : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ en $\mathscr{C}$, dado por la familia de morfismos $\{\varphi^i : K^i \longrightarrow L^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tales que $\varphi^{i+1} \circ d_K^i = d_L^i \circ \varphi^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, <u>induce un morfismo en cohomología</u>:

$$\mathrm{H}^i(\varphi) : \mathrm{H}^i(K^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^i(L^\bullet) \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

En efecto, recordando que $\mathrm{H}^i(K^\bullet) \overset{\mathsf{def}}{=} \ker(d_K^i)/\,\mathrm{Im}(d_K^{i-1})$, para cada *elemento* (!) $x \in \ker(d_K^i)$ tenemos que

$$0 = (\varphi^{i+1} \circ d_K^i)(x) = d_L^i(\varphi^i(x)), \text{ i.e., } \varphi^i(x) \in \ker(d_L^i).$$

Además, la relación $\varphi^i \circ d_K^{i-1} = d_L^{i-1} \circ \varphi^{i-1}$ implica que si $x' \in \ker(d_K^i)$ es tal que $x' = x + d_K^{i-1}(y)$ para cierto *elemento* $y \in K^{i-1}$, entonces

$\varphi^i(x') = \varphi^i(x) + d_L^{i-1}(\varphi^{i-1}(y))$. En otras palabras, $[\varphi(x)] = [\varphi(x')]$ en $\mathrm{H}^i(L^\bullet) \overset{\mathsf{def}}{=} \ker(d_L^i)/\operatorname{Im}(d_L^{i-1})$.

(2) El **lema de la serpiente** (aplicado en la categoría R-**Mod**) implica que si
$$0 \longrightarrow K^\bullet \xrightarrow{\varphi} L^\bullet \xrightarrow{\psi} M^\bullet \longrightarrow 0$$
es una sucesión exacta de complejos en $\mathscr{C}$, i.e., para todo $i \in \mathbb{Z}$ la sucesión
$$0 \longrightarrow K^i \xrightarrow{\varphi^i} L^i \xrightarrow{\psi^i} M^i \longrightarrow 0$$
es exacta en $\mathscr{C}$, entonces hay una sucesión exacta larga en cohomología asociada
$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} \mathrm{H}^i(K^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(\varphi)} \mathrm{H}^i(L^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(\psi)} \mathrm{H}^i(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^i}$$
$$\xrightarrow{\delta^i} \mathrm{H}^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^{i+1}(\varphi)} \mathrm{H}^{i+1}(L^\bullet) \xrightarrow{\mathrm{H}^{i+1}(\psi)} \mathrm{H}^{i+1}(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i+1}} \cdots$$
Aquí, $\delta^i : \mathrm{H}^i(M^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(K^\bullet)$ es llamado el **i-ésimo morfismo de conexión**.

En muchas ocasiones, dos complejos que posean la misma cohomología serán considerados equivalentes y diremos que son *quasi-isomorfos*. La siguiente definición formaliza esto último.

Definición 4.4.12. — Sea $\varepsilon : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ un morfismo de complejos en $\mathscr{C}$. Decimos que ε es un **quasi-isomorfismo** (qis) si
$$\mathrm{H}^i(\varepsilon) : \mathrm{H}^i(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(L^\bullet) \text{ es un isomorfismo para todo } i \in \mathbb{Z}.$$
Más aún, en este caso decimos que $(\varepsilon, L^\bullet)$ es una **resolución** de $K^\bullet$.

Para relacionar las resoluciones y los objetos inyectivos, necesitamos del siguiente concepto que proviene de la topología algebraica.

Definición 4.4.13. — Sean $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ y $g : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ dos morfismos de complejos en $\mathscr{C}$. Decimos que f y g son **homotópicamente equivalentes**, y escribimos $f \sim g$, si:

Existe una familia de morfismos $h = \{h^i : K^i \longrightarrow L^{i-1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tales que $f^i - g^i = d_L^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_K^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Gráficamente, h está dada por diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[dl, "h^i"'] & K^{i+1} \arrow[dl, "h^{i+1}"] \\ L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"'] & L^i & \end{tikzcd}$$

La familia $h = \{h^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es llamada una **homotopía** entre f y g.

La principal propiedad de la homotopía es la siguiente.

Lema 4.4.14. — *Sean $f, g : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ morfismos de complejos en $\mathscr{C}$. Si $f \sim g$, entonces f y g inducen el mismo morfismo en cohomología, i.e., $\mathrm{H}^i(f) = \mathrm{H}^i(g)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. — Sea $x \in \ker(d_K^i)$, entonces

$$f^i(x) - g^i(x) \overset{\mathsf{def}}{=} d_L^{i-1}(h^i(x)) + h^{i+1}(d_K^i(x)) = d_L^{i-1}(h^i(x))$$

y luego $[f^i(x)] = [g^i(x)]$ en $\mathrm{H}^i(L^\bullet) \overset{\mathsf{def}}{=} \ker(d_L^i)/\operatorname{Im}(d_L^{i-1})$. □

Ejercicio 4.4.15. — Probar que si $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ y $g : L^\bullet \longrightarrow K^\bullet$ son morfismos de complejos en $\mathscr{C}$ tales que

$$f \circ g \sim \mathrm{Id}_{L^\bullet} \ \text{ y } g \circ f \sim \mathrm{Id}_{K^\bullet}$$

entonces f y g son quasi-isomorfismos, y $\mathrm{H}^i(f)^{-1} = \mathrm{H}^i(g)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

El Lema anterior implica que si $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ verifica $f \sim 0$, entonces $\mathrm{H}^i(f) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Para probar el recíproco (en ciertos casos), necesitamos la terminología siguiente.

Definición 4.4.16. — Sea $K^\bullet$ un complejo en una categoría abeliana $\mathscr{C}$. Decimos que $K^\bullet$ es

(1) Un **complejo exacto** si $\mathrm{H}^i(K^\bullet) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, i.e., $\operatorname{Im}(d^{i-1}) = \ker(d^i)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.
(2) Un **complejo positivo** si $K^i = 0$ para todo $i < 0$.

Proposición 4.4.17. — *Sea $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ un morfismo de complejos* positivos *en $\mathscr{C}$, y supongamos que:*

(1) *Todo objeto L^i es* <u>inyectivo</u> *en $\mathscr{C}$, y que*
(2) *El complejo $K^\bullet$ es* <u>exacto</u>, *y en particular $\mathrm{H}^i(f) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Entonces, $f \sim 0$.

Demostración. — Construiremos los morfismos de homotopía h^i por inducción en $i \in \mathbb{N}$ (dado que podemos considerar $h^i = 0$ si $i < 0$):

Supongamos que $h^i : K^i \longrightarrow L^{i-1}$ está construido y verifica la fórmula de homotopía

$$(\star) \qquad f^j = f^j - 0 = d_L^{j-1} \circ h^j + h^{j+1} \circ d_K^j \text{ para todo } j \leq i-1.$$

Definimos entonces $g^i := f^i - d_L^{i-1} \circ h^i$, que *a posteriori* verificará que $g^i = h^{i+1} \circ d_K^i$ gracias a $(\star)$. Los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[dl, "h^i"'] \arrow[d, "g^i"] & K^{i+1} \arrow[dl, dotted, "\exists ?\, h^{i+1}"] \\ L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"'] & L^i & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & K^i \arrow[d, "f^i"] \\ L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"'] & L^i \end{tikzcd}$$

implican, junto con $(\star)$ en el caso $j = i-1$, que

$$\begin{aligned} g^i \circ d_K^{i-1} &= f^i \circ d_K^{i-1} - d_L^{i-1} \circ (h^i \circ d_K^{i-1}) \\ &\underset{(\star)}{=} (f^i \circ d_K^{i-1} - d_L^{i-1} \circ f^{i-1}) + (d_L^{i-1} \circ d_L^{i-2}) \circ h^{i-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

i.e., $g^i = 0$ en $\operatorname{Im}(d_K^{i-1}) = \ker(d_K^i)$. La propiedad universal del cociente implica que g^i se factoriza en

$$g^i : K^i / \ker(d_K^i) \cong \operatorname{Im}(d_K^i) \longrightarrow L^i.$$

Así, dado que L^i es un objeto inyectivo y que $\operatorname{Im}(d_K^i) = \ker(d_K^{i+1}) \hookrightarrow K^{i+1}$, tenemos que existe una extensión

$$h^{i+1} : K^{i+1} \longrightarrow L^i$$

de g que cumple $(\star)$. $\square$

La siguiente construcción es la definición más importante de esta sección.

Construcción 4.4.18. — Sea A un *objeto* de la categoría abeliana $\mathscr{C}$. Se define el **complejo** $\underline{A}^\bullet$, también denotado A si no hay riesgo de confusión, mediante $\underline{A}^i := 0$ si $i \neq 0$ y $\underline{A}^0 := A$, i.e.,

$$\underline{A}^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Luego, una **resolución de** A es una resolución de $\underline{A}^\bullet$ por un *complejo positivo*, i.e., un morfismo

$$\varepsilon : \underline{A}^\bullet \longrightarrow R^\bullet$$

de complejos positivos que es un quasi-isomorfismo. Más concretamente, una resolución de A está dada por un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \underline{A}^\bullet : \arrow[d, "\varepsilon"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ R^\bullet : & R^0 \arrow[r, "d^0"] & R^1 \arrow[r, "d^1"] & R^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots \end{tikzcd}$$

tal que $\mathrm{H}^i(\varepsilon) : \mathrm{H}^i(\underline{A}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(R^\bullet)$ es un isomorfismo para todo $i \geq 0$.

Lo anterior implica, dado que $\mathrm{H}^0(\underline{A}^\bullet) \overset{\mathsf{def}}{=} A$ y $\mathrm{H}^i(\underline{A}^\bullet) = 0$ para $i > 0$, que $\mathrm{H}^i(R^\bullet) = 0$ para todo $i > 0$ y que el **morfismo de aumentación**

$$\varepsilon^0 : A \longrightarrow R^0$$

identifica A con $\mathrm{H}^0(R^\bullet)$, i.e., con el kernel de $d^0 : R^0 \longrightarrow R^1$. En resumen,

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon^0} R^0 \xrightarrow{d^0} R^1 \xrightarrow{d^1} R^2 \xrightarrow{d^2} R^3 \xrightarrow{d^3} \cdots$$

es un *complejo exacto*, también denotado $0 \longrightarrow A \longrightarrow R^\bullet$, que contiene la misma información que $\varepsilon : \underline{A}^\bullet \longrightarrow R^\bullet$.

Finalmente, si todos los objetos R^i de $R^\bullet$ son inyectivos en $\mathscr{C}$, decimos que $\varepsilon : \underline{A}^\bullet \longrightarrow R^\bullet$ es una **resolución inyectiva de** A.

El siguiente resultado será crucial para construir functores derivados. En términos prácticos, nos dice que las propiedades de los objetos inyectivos se extienden a *complejos de objetos inyectivos.*

Teorema 4.4.19. — *Sea $\mathscr{C}$ una categoría abeliana con* suficientes inyectivos*. Entonces:*

(1) *Todo objeto A posee una resolución inyectiva $\varepsilon : A \longrightarrow I^\bullet$.*

(2) *Sea $f : A \longrightarrow I^\bullet$ un morfismo arbitrario (no necesariamente una resolución) de complejos positivos, donde todos los objetos de $I^\bullet$ son inyectivos. Entonces,*

> *Para toda resolución $\varepsilon : A \longrightarrow R^\bullet$ (no necesariamente inyectiva), existe un morfismo de complejos $g : R^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ tal que*
>
> $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "f"'] & R^\bullet \arrow[d, "g"] \\ & I^\bullet \end{tikzcd}$$
>
> *es un diagrama conmutativo.*

Más aún, si $g' : R^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ es otro morfismo tal que $f = g' \circ \varepsilon$, entonces $g \sim g'$. En otras palabras, g es único módulo homotopía*.*

Demostración. — Para el ítem (1), notamos que el hecho que $\mathscr{C}$ tenga suficientes inyectivos nos permite hallar un incrustamiento $A \xhookrightarrow{\varepsilon^0} I^0$ donde I^0 es un objeto inyectivo. Si definimos $A_1 := I^0/A$ en $\mathscr{C}$ y lo incrustamos $A_1 \xhookrightarrow{\delta^1} I^1$ en un objeto inyectivo I^1, entonces tenemos que $\ker(\delta^1) = 0$ en I^0/A, i.e., la composición

$$\varepsilon_1 : I^0 \xrightarrow{\pi} I^0/A \xrightarrow{\delta^1} I^1$$

verifica que $\ker(\varepsilon^1) = A = \mathrm{Im}(\varepsilon^0)$. Inductivamente, construímos $\varepsilon : A \longrightarrow I^\bullet$.

Para el ítem (2), construímos g^i por inducción en $i \in \mathbb{N}$:

Como ε es una resolución, $A \xhookrightarrow{\varepsilon^0} R^0$ es un morfismo inyectivo. Dado que I^0 es un *objeto inyectivo*, $f^0 : A \longrightarrow I^0$ se extiende a $g^0 : R^0 \longrightarrow I^0$.

Supongamos ahora que g^i está construído, y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} R^{i-1} \arrow[r, "d_R^{i-1}"] \arrow[d, "g^{i-1}"'] & R^i \arrow[r, "d_R^i"] \arrow[d, "g^i"'] & R^{i+1} \arrow[d, dotted, "\exists ?\ g^{i+1}"] \\ I^{i-1} \arrow[r, "d_I^{i-1}"] & I^i \arrow[r, "d_I^i"] & I^{i+1} \end{tikzcd}$$

Tal como en la Proposición anterior, el hecho que $g^i \circ d_R^{i-1} = d_I^{i-1} \circ g^{i-1}$ implica que $d_I^i \circ g^i : R^i \longrightarrow I^{i+1}$ se anula en $\mathrm{Im}(d_R^{i-1})$, y donde $\mathrm{Im}(d_R^{i-1}) = \ker(d_R^i)$ ya que $0 \longrightarrow A \xhookrightarrow{\varepsilon^0} R^\bullet$ es un complejo exacto. Luego, podemos ver esta composición como

$$d_I^i \circ g^i : R^i/\ker(d_R^i) \cong \mathrm{Im}(d_R^i) \longrightarrow I^{i+1}.$$

Dado que el objeto I^{i+1} es inyectivo, $d_I^i \circ g^i$ se extiende a $g^{i+1} : R^{i+1} \longrightarrow I^{i+1}$. Así, construímos $g : R^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ inductivamente.

Finalmente, consideremos otro morfismo $g' : R^\bullet \longrightarrow I^\bullet$ tal que $f = g' \circ \varepsilon$. Si definimos el complejo $K^\bullet := R^\bullet/A$ como el complejo positivo cuyos objetos están dados por $K^i := R^i$ si $i > 0$ y por $K^0 := R^0/A$, entonces $g - g'$ se factoriza en un morfismo de complejos

$$G : K^\bullet \longrightarrow I^\bullet.$$

Dado que $K^\bullet$ es un complejo exacto, la Proposición anterior implica que $G \sim 0$, i.e., $g \sim g'$. $\square$

4.5. Functores derivados

Ya estamos en condiciones de construir *functores derivados*, que pueden usarse para definir cohomología de haces, de de Rham, étale, de grupos (e.g. cohomología galoisiana), de álgebras de Lie, de Hochschild, etc.

Construcción 4.5.1. — Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías abelianas, y supongamos que $\mathscr{C}$ *posee suficientes inyectivos.*

Dado un functor *covariante* aditivo $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, se pueden construir functores

$$\mathrm{R}^i F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

para todo $i \geq 0$ de la manera siguiente:

Para cada objeto A en $\mathscr{C}$, escogemos una resolución inyectiva $A \longrightarrow I_A^\bullet$, y definimos para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{R}^i F(A) := \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet)) \text{ en } \mathscr{D}.$$

Más aún, si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\mathscr{C}$, entonces el Teorema 4.4.19 asegura que podemos extender la composición $A \to B \to I_B^\bullet$ a un morfismo de complejos $g : I_A^\bullet \longrightarrow I_B^\bullet$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & I_A^\bullet \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r] & I_B^\bullet \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Más aún, g es *único módulo homotopía* y por ende el morfismo $\mathrm{H}^i(F(g)) : \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet)) \longrightarrow \mathrm{H}^i(F(I_B^\bullet))$ es <u>independiente</u> de la elección de g, y será denotado

$$(\mathrm{R}^i F)(f) : \mathrm{R}^i F(A) \longrightarrow \mathrm{R}^i F(B).$$

Veamos que la construcción del functor $\mathrm{R}^i F$ no depende de elecciones.

Lema 4.5.2. — *Sea $\varepsilon : A \longrightarrow I^\bullet$ una resolución inyectiva de A. Entonces, el morfismo canónico*

$$\mathrm{H}^i(F(I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^i F(A) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet))$$

es un isomorfismo. En otras palabras, la construcción de $\mathrm{R}^i F(A)$ *es* independiente *de la elección de $I_A^\bullet$.*

Demostración. — Considerando la identidad $\mathrm{Id}_A : A \longrightarrow A$, las resoluciones $A \longrightarrow I^\bullet$ y $A \longrightarrow I_A^\bullet$ induce un morfismo $g : I^\bullet \longrightarrow I_A^\bullet$ que es único módulo homotopía.

Invirtiendo el rol de $I^\bullet$ con $I_A^\bullet$ obtenemos un morfismo $h : I_A^\bullet \to I^\bullet$ que es único módulo homotopía. Más aún, $g \circ h \sim \mathrm{Id}_{I_A^\bullet}$ y $h \circ g \sim \mathrm{Id}_{I^\bullet}$, por lo que g y h son quasi-isomorfismos (ver Ejercicio 4.4.15).

Por functorialidad, la imagen por F de una homotopía de morfismos de complejos en $\mathscr{C}$ es una homotopía de morfismos de complejos en $\mathscr{D}$. Así,

$$F(g) : F(I^\bullet) \longrightarrow F(I_A^\bullet)$$

también es invertible módulo homotopía, y por ende un quasi-isomorfismo. En otras palabras,

$$\mathrm{H}^i(F(I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet)) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathrm{R}^i F(A)$$

es un isomorfismo para todo $i \geq 0$. □

Definición 4.5.3. — Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías abelianas, y supongamos que $\mathscr{C}$ *posee suficientes inyectivos*. Dado un functor *covariante* aditivo $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, el functor

$$\mathrm{R}^i F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}, \ A \longmapsto \mathrm{R}^i F(A)$$

es llamado el **i-ésimo functor derivado** (derecho) de F.

Observación importante 4.5.4. — Con la notación de la definición anterior, si consideramos el complejo *exacto* en $\mathscr{C}$ dado por

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon^0} I_A^0 \xrightarrow{d^0} I_A^1 \xrightarrow{d^1} I_A^2 \xrightarrow{d^2} I_A^3 \xrightarrow{d^3} \cdots$$

al aplicar F obtenemos un complejo (*no necesariamente exacto*) en $\mathscr{D}$

$$F(A) \xrightarrow{F(\varepsilon^0)} F(I_A^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(I_A^1) \xrightarrow{F(d^1)} F(I_A^2) \xrightarrow{F(d^2)} F(I_A^3) \xrightarrow{F(d^3)} \cdots$$

Dado que $d^0 \circ \varepsilon^0 = 0$, tenemos que $F(d^0) \circ F(\varepsilon^0) = 0$ y por ende $F(\varepsilon^0) : F(A) \longrightarrow F(I_A^0)$ se factoriza en

$$F(A) \longrightarrow \ker(F(d^0)) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^0(F(I_A^\bullet)) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (\mathrm{R}^0 F)(A)$$

de manera functorial, i.e., existe una transformación natural

$$F \longrightarrow R^0 F$$

entre los functores $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ y $\mathrm{R}^0 F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$.

El siguiente resultado resume las propiedades más importantes de los functores derivados.

Teorema 4.5.5. — *Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un functor* covariante *aditivo entre categorías abelianas, y donde $\mathscr{C}$* tiene suficientes inyectivos. *Entonces:*

(1) *Si F es* exacto por la izquierda*, entonces la transformación natural $F \xrightarrow{\sim} R^0 F$ es un isomorfismo.*

(2) *Toda sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

en $\mathscr{C}$ tiene asociada de manera functorial una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{R}^i F(A) \longrightarrow \mathrm{R}^i F(B) \longrightarrow \mathrm{R}^i F(C) \xrightarrow{\delta^i} \mathrm{R}^{i+1} F(A) \longrightarrow \cdots$$

en $\mathscr{D}$. Más precisamente, para todo morfismo de sucesiones exactas cortas en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R}^i F(C) \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & \mathrm{R}^{i+1} F(A) \arrow[d] \\ \mathrm{R}^i F(C') \arrow[r, "\delta^i"] & \mathrm{R}^{i+1} F(A') \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(3) *Para todo objeto* inyectivo I *en la categoría $\mathscr{C}$, se tiene que*

$$\mathrm{R}^i F(I) = 0 \text{ para todo } i \geq 1.$$

Demostración. — Para probar que $F \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^0 F$ es un isomorfismo, consideramos un objeto A en $\mathscr{C}$ y $\varepsilon : A \longrightarrow I^\bullet$ una resolución inyectiva. Dado que F es exacto por la izquierda, la sucesión exacta en $\mathscr{C}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varepsilon^0} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1$$

es enviada a la sucesión *exacta* en $\mathscr{D}$ dada por

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\varepsilon^0)} F(I^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(I^1)$$

Así, $F(A) \cong \ker(F(d^0)) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (\mathrm{R}^0 F)(A)$, de donde obtenemos (1).

Para probar (2), consideramos una sucesión exacta corta en $\mathscr{C}$

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

y fijamos resoluciones inyectivas $A \xrightarrow{\varepsilon_A} I_A^\bullet$, $B \xrightarrow{\varepsilon_B} I_B^\bullet$ y $C \xrightarrow{\varepsilon_C} I_C^\bullet$. Es importante notar que *a priori* no contamos una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow I_A^\bullet \longrightarrow I_B^\bullet \longrightarrow I_C^\bullet \longrightarrow 0$$

a la cual podamos aplicar el lema de la serpiente para obtener una sucesión exacta larga en cohomología (y por ende de functores derivados). La idea será construir un reemplazo usando la información que tenemos a disposición:

Primero que todo, veamos que podemos construir una resolución inyectiva $B \longrightarrow I^\bullet$ al definir $I^i := I^i_A \oplus I^i_C$, y donde construiremos los diferenciales $d^i : I^i \longrightarrow I^{i+1}$ por inducción en $i \in \mathbb{N}$. En efecto, el morfismo de aumentación $\varepsilon^0_A : A \hookrightarrow I^0_A$ se extiende a $\eta : B \longrightarrow I^0_A$ puesto que $A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ y I^0_A es un objeto inyectivo. Así, usando el morfismo de aumentación $\varepsilon^0_C : C \hookrightarrow I^0_C$, construimos

$$\varepsilon^0 := (\eta, \varepsilon^0_C \circ g) : B \longrightarrow I^0 \overset{\text{def}}{=} I^0_A \oplus I^0_C$$

de tal suerte que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^0_A \arrow[r, hook, "\iota"] & I^0 \arrow[r, two heads, "\pi"] & I^0_C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, hook, "\varepsilon^0_A"] \arrow[r, hook, "f"'] & B \arrow[u, "\varepsilon^0"'] \arrow[ul, dotted, "\eta"'] \arrow[r, two heads, "g"'] & C \arrow[u, hook, "\varepsilon^0_C"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Luego, el Lema de la serpiente[5] implica que $\varepsilon^0 : B \hookrightarrow I^0$ es un morfismo inyectivo, y que la sucesión de cokernels

$$0 \longrightarrow I^1_A \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker}(\varepsilon^0_A) \longrightarrow I^1 \cong \operatorname{coker}(\varepsilon^0) \longrightarrow I^1_C \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coker}(\varepsilon^0_C) \longrightarrow 0$$

es exacta. Así, obtenemos el primer diferencial $d^0 : I^0 \longrightarrow I^1$ deseado.

Intercambiando el rol de $0 \to A \to B \to C \to 0$ por $0 \to I^0_A \to I^0 \to I^0_C \to 0$, obtenemos el segundo diferencial $d^1 : I^1 \longrightarrow I^2$, y así sucesivamente. En conclusión, obtenemos una sucesión *exacta* de complejos

$$0 \longrightarrow I^\bullet_A \overset{\iota}{\longrightarrow} I^\bullet \overset{\pi}{\longrightarrow} I^\bullet_C \longrightarrow 0$$

donde $I^\bullet = I^\bullet_A \oplus I^\bullet_C$. Luego, dado que los functores aditivos preservan las sumas directas, tenemos que $F(I^\bullet) = F(I^\bullet_A) \oplus F(I^\bullet_C)$ y en particular la sucesión

$$0 \longrightarrow F(I^\bullet_A) \longrightarrow F(I^\bullet) \longrightarrow F(I^\bullet_C) \longrightarrow 0$$

---

[5] Explícitamente, el Lema de la serpiente señala que hay una sucesión exacta

$$0 \to \ker(\varepsilon^0_A) \to \ker(\varepsilon^0) \to \ker(\varepsilon^0_C) \to \operatorname{coker}(\varepsilon^0_A) \to \operatorname{coker}(\varepsilon^0) \to \operatorname{coker}(\varepsilon^0_C) \to 0$$

de donde se deduce lo pedido, pues $\ker(\varepsilon^0_A) = 0$ y $\ker(\varepsilon^0_C) = 0$.

es exacta en $\mathscr{D}$. Así, el Lema de la serpiente implica que hay una sucesión exacta larga en cohomología de complejos

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^i(I_A^\bullet) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{R}^iF(A) \longrightarrow \mathrm{H}^i(I^\bullet) \cong \mathrm{H}^i(I_B^\bullet) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{R}^iF(B)$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^i(I_C^\bullet) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{R}^iF(C) \xrightarrow{\delta^i} \mathrm{R}^{i+1}F(A) \longrightarrow \cdots$$

que nos otorga la sucesión exacta larga de functores derivados deseada. Más aún, la construcción es functorial puesto que si consideramos

$$0 \longrightarrow I_{A'}^\bullet \longrightarrow (I')^\bullet \longrightarrow I_{C'}^\bullet \longrightarrow 0$$

asociada a $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$, donde $A' \to I_{A'}^\bullet$, $B' \to (I')^\bullet$ y $C' \to I_{C'}^\bullet$ son resoluciones inyectivas como en el caso anterior, entonces la composición de $B \to B'$ y de $B' \xrightarrow{\eta'} I_{A'}^0$ induce (dado que $I_{A'}^0$ es un objeto inyectivo) un morfismo $I_A^0 \to I_{A'}^0$ tal que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook, "\eta"] \arrow[d] & I_A^0 \arrow[d] \\
B' \arrow[r, hook, "\eta'"] & I_{A'}^0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además, obtenemos un morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_A^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & I_C^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_{A'}^\bullet \arrow[r] & (I')^\bullet \arrow[r] & I_{C'}^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $I^\bullet = I_A^\bullet \oplus I_C^\bullet$ y $(I')^\bullet = I_{A'}^\bullet \oplus I_{C'}^\bullet$. Aplicando F y considerando la sucesión exacta larga asociada, concluímos la demostración de (2).

Finalmente, (3) se deduce del hecho que la definición de functor derivado es independiente de la resolución inyectiva (ver Lema 4.5.2). En efecto, para cada objeto inyectivo I la resolución $I \to R^\bullet$ dada por

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varepsilon^0 := \mathrm{Id}_I} I =: R^0 \xrightarrow{d^0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

es inyectiva. Así, dado que $F(\mathrm{Id}_I) = \mathrm{Id}_{F(I)}$, tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow F(I) \xrightarrow[\sim]{F(\varepsilon^0)} F(I) \xrightarrow{d^0} 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

es *exacta* y por ende $(\mathrm{R}^iF)(A) \cong \mathrm{H}^i(F(R^\bullet)) = 0$ para todo $i \geq 1$. $\square$

Finalmente, estamos listos para "*derivar*" nuestros functores (exactos por la izquierda) favoritos. Los principales functores que usaremos están recopilados y definidos en el siguiente ejemplo (cf. Ejemplo 4.3.6).

Ejemplo importante 4.5.6. —

(1) Sea A un anillo conmutativo con unidad y sea M un A-módulo. Los functores derivados (derechos) del functor

$$N \longmapsto \mathrm{Hom}_A(M,N)$$

se denotan $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$, y son muy usados en topología. En particular, toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \longrightarrow 0$$

de A-módulos induce una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(M,N_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(M,N_3) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Ext}^1_A(M,N_1)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,N_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M,N_3) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Ext}^2_A(M,N_1) \longrightarrow \cdots$$

de A-módulos.

(2) Sea $(X,\mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Los functores derivados del functor

$$\mathscr{G} \longmapsto \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathscr{G})$$

se denotan $\mathrm{Ext}^i_X(\mathscr{F},\mathscr{G})$ o símplemente $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F},\mathscr{G})$. Como antes, una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}_1 \longrightarrow \mathscr{G}_2 \longrightarrow \mathscr{G}_3 \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{O}_X$-módulos induce una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_3) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_1)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_2) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_3) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_X(\mathscr{F},\mathscr{G}_1) \longrightarrow \cdots$$

de $\Gamma(X,\mathscr{O}_X)$-módulos.

(3) Sea $(X,\mathscr{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Los functores derivados del functor

$$\mathscr{G} \longmapsto \mathscr{H}\!om(\mathscr{F},\mathscr{G})$$

se denotan $\mathscr{E}\!xt^i(\mathscr{F},\mathscr{G})$. Como antes, una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}_1 \longrightarrow \mathscr{G}_2 \longrightarrow \mathscr{G}_3 \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{O}_X$-módulos induce una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \mathscr{H}\!om(\mathscr{F},\mathscr{G}_1) \longrightarrow \mathscr{H}\!om(\mathscr{F},\mathscr{G}_2) \longrightarrow \mathscr{H}\!om(\mathscr{F},\mathscr{G}_3) \longrightarrow \mathscr{E}\!xt^1(\mathscr{F},\mathscr{G}_1)$$
$$\longrightarrow \mathscr{E}\!xt^1(\mathscr{F},\mathscr{G}_2) \longrightarrow \mathscr{E}\!xt^1(\mathscr{F},\mathscr{G}_3) \longrightarrow \mathscr{E}\!xt^2(\mathscr{F},\mathscr{G}_1) \longrightarrow \cdots$$

de $\mathscr{O}_X$-módulos.

(4) Sea X una variedad algebraica con $A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Los functores derivados del functor de secciones globales

$$\Gamma : \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$$

se llaman **grupos de cohomología**, y se denotan $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$. En particular, el Teorema anterior implica que $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F})$ y que toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{O}_X$-módulos induce una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{H}^1(X, \mathscr{F})$$
$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{H}^2(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

de A-módulos.

(5) Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Los functores derivados del functor imagen directa

$$f_* : \mathbf{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(Y),\ \mathscr{F} \longmapsto f_*\mathscr{F}$$

se llaman **imágenes directas superiores**, y se denotan $\mathrm{R}^i f_*\mathscr{F}$. En particular, $\mathrm{R}^0 f_*\mathscr{F} \cong f_*\mathscr{F}$ y toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{O}_X$-módulos induce una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow f_*\mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathscr{G} \longrightarrow f_*\mathscr{H} \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{F}$$
$$\longrightarrow \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{H} \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{R}^2 f_*\mathscr{F} \longrightarrow \cdots$$

de $\mathscr{O}_Y$-módulos quasi-coherentes.

Observación importante 4.5.7. — Sea X un espacio topológico, y sea $\mathbf{Sh}(X)$ la categoría de haces de grupos abelianos en X. Los functores derivados del functor de secciones globales

$$\Gamma : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab},\ \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$$

se llaman *grupos de cohomología* de X con valores en el haz $\mathscr{F}$, y también son denotados $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$.

Más adelante veremos que si X es una variedad algebraica, entonces ambos grupos de cohomología asociados a Γ (visto en la categoría de haces de grupos abelianos y en la categoría de $\mathscr{O}_X$-módulos) coinciden.

El siguiente resultado señala que los grupos Ext son relativamente sencillos de calcular en el caso de fibrados vectoriales sobre variedades algebraicas. Para demostrarlo será de utilidad recordar (ver Observación 4.2.3) que si X es una variedad algebraica y $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo, entonces hay una biyección

$$\left\{ \begin{array}{c} s \in \Gamma(X, \mathscr{F}) \\ \text{sección global} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \varphi : \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{F} \text{ morfismo} \\ \text{de } \mathscr{O}_X\text{-módulos} \end{array} \right\}$$

Proposición 4.5.8. — *Sea X una variedad algebraica y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Entonces:*

(1) $\mathscr{E}xt^0(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) \cong \mathscr{F}$ *y* $\mathscr{E}xt^i(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) = 0$ *si* $i \geq 1$.
(2) $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ *para todo* $i \geq 0$.

Más generalmente, si $\mathscr{E}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo localmente libre de rango r, entonces

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F}) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Demostración. — Dado que $\mathscr{H}om(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) \cong \mathscr{F}$, tenemos que

$$\mathscr{H}om(\mathscr{O}_X, \,\cdot\,) \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod}}$$

es un functor *exacto*, de donde se obtiene (1). Para (2), notamos que la biyección entre $\Gamma(X, \mathscr{F})$ y $\mathrm{Hom}_X(\mathscr{O}_X, \mathscr{F})$ implica que los functores

$$\Gamma(X, \,\cdot\,) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathscr{O}_X, \,\cdot\,)$$

son isomorfos, y por ende los functores derivados respectivos

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}) \text{ coinciden para todo } i \geq 0.$$

Finalmente, notemos que por una parte las propiedades del producto tensorial implican que

$$\mathrm{Hom}_X(\mathscr{E}, \,\cdot\,) = \mathrm{Hom}_X(\mathscr{O}_X \otimes \mathscr{E}, \,\cdot\,) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathscr{O}_X, \mathscr{E}^\vee \otimes \,\cdot\,).$$

Por otro lado, si $\mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ es una resolución inyectiva de $\mathscr{F}$ en $\mathscr{O}_X$-$\mathbf{Mod}$, entonces el tensorizar por $\mathscr{E}^\vee$ preserva la exactitud (pues $\mathscr{E}$ es localmente libre) y con ello obtenemos

$$\mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{R}^\bullet := \mathscr{E}^\vee \otimes \mathcal{I}^\bullet,$$

la cual es una resolución inyectiva de $\mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F}$ puesto que en cada trivialización $\mathscr{R}^i|_U = (\mathscr{E}^\vee \otimes \mathcal{I}^i)|_U \cong (\mathcal{I}^i\,|_U)^{\oplus r}$ está dado por objetos inyectivos. Dado que por denifición $\mathrm{R}^i F(A) := \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet))$, tenemos que los complejos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \Gamma(X, \mathscr{R}^\bullet) \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_X(\mathscr{O}_X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_X(\mathscr{E}, \mathcal{I}^\bullet) \end{tikzcd}$$

calculan el mismo functor derivado, i.e., $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F})$ para todo $i \geq 0$. $\square$

Observación 4.5.9. — Todo lo que hicimos en esta sección tiene sentido para functores derivados derechos, que se obtienen al considerar un functor exacto por la izquierda y considerar resoluciones inyectivas.

De manera análoga, decimos que un objeto P en una categoría abeliana $\mathscr{C}$ es **proyectivo** si el functor

$$\mathrm{Hom}(P, \cdot\,) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ A \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, A)$$

es exacto. Usando **resoluciones proyectivas**

$$P_\bullet \longrightarrow A$$

y calculando la **homología** de complejos, se pueden definir los functores derivados *izquierdos*

$$\mathrm{L}_i F(A) := \mathrm{H}_i(F(P_\bullet))$$

asociados a un functor exacto *por la derecha*

$$F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}.$$

Por ejemplo, en la categoría A-**Mod** el functor producto tensorial

$$M \otimes_A (\,\cdot\,) : A\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod},\ N \longmapsto M \otimes_A N$$

es exacto a la derecha, y su functor derivado izquierdo se denota $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$.

4.6. Resoluciones acíclicas y resoluciones flasque

Durante toda esta sección, denotaremos por

$$F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

a un functor covariante aditivo y exacto por la izquierda, entre categorías abelianas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$, y donde $\mathscr{C}$ tiene suficientes inyectivos. Luego, los functores derivados

$$\mathrm{R}^i F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

están bien definidos, y además $\mathrm{R}^0 F \cong F$.

El objetivo principal de esta sección es estudiar otro tipo de resoluciones de un objeto A en $\mathscr{C}$ que nos permitan calcular $\mathrm{R}^i F(A) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet))$ de manera *más sencilla* (y que luego nos permitirán probar el Teorema de Leray sobre cohomología de Čech).

Definición 4.6.1. — Sea A un objeto de $\mathscr{C}$. Decimos que A es **F-acíclico** (o que es **acíclico** respecto a F) si

$$\mathrm{R}^i F(A) = 0 \text{ para todo } i \geq 1.$$

Ejemplo importante 4.6.2. — Todo objeto inyectivo de $\mathscr{C}$ es F-acíclico gracias al Teorema 4.5.5.

El siguiente Lema nos dice que el functor F preserva la exactitud en el caso de complejos acíclicos (positivos). Entonces,

Lema 4.6.3. — *Sea $K^\bullet$ un complejo* positivo *en $\mathscr{C}$ cuyos objetos K^i son F-acíclicos.*

Supongamos que $K^\bullet$ es un complejo exacto en $\mathscr{C}$, entonces $F(K^\bullet)$ es un complejo exacto en $\mathscr{D}$.

Demostración. — Sea $K^\bullet = (K^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ y sean $Z^i := \ker(d^i)$ y $B^i := \mathrm{Im}(d^{i-1})$. Así, la exactitud de $K^\bullet$ equivale a que $Z^i = B^i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, y en particular la sucesión

$$0 \longrightarrow Z^{i-1} \hookrightarrow K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} Z^i \longrightarrow 0$$

es *exacta* para todo $i \in \mathbb{Z}$. Aplicando el functor F, obtenemos que

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow F(Z^{i-1}) \longrightarrow F(K^{i-1}) \longrightarrow F(Z^i) \longrightarrow \mathrm{R}^1 F(Z^{i-1}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \underbrace{\mathrm{R}^1 F(K^{i-1})}_{=0} \longrightarrow \mathrm{R}^1 F(Z^i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^2 F(Z^{i-1}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{R}^2 F(K^{i-1})}_{=0} \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Así, $\mathrm{R}^p F(Z^i) \cong \mathrm{R}^{p+1} F(Z^{i-1})$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ y todo $p \geq 1$. En particular,

$$\mathrm{R}^1 F(Z^{i-1}) \cong \mathrm{R}^2 F(Z^{i-2}) \cong \cdots \cong \mathrm{R}^p F(0) = 0 \text{ si } p \gg 0,$$

y luego la sucesión

$$0 \longrightarrow F(Z^{i-1}) \hookrightarrow F(K^{i-1}) \longrightarrow F(Z^i) \longrightarrow 0$$

es *exacta* para todo $i \in \mathbb{Z}$, i.e., $F(K^\bullet)$ es un complejo exacto. $\square$

Otra propiedad muy útil es que F envía quasi-isomorfismos de complejos acíclicos en quasi-isomorfismos. Para probar esta propiedad, necesitaremos la siguiente construcción (que proviene de topología algebraica).

Construcción 4.6.4. — Sea $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ un morfismo de complejos en $\mathscr{C}$. Definimos el **cono de** f como el complejo $C(f)^\bullet$ dado por

$$C(f)^i := L^i \oplus K^{i+1}$$

y cuyo diferencial $d^i_{C(f)} : C(f)^i \longrightarrow C(f)^{i+1}$ está dado por

$$d^i_{C(f)} := \begin{pmatrix} d^i_L & f^{i+1} \\ 0 & -d^{i+1}_K \end{pmatrix}$$

i.e., si $(x, y) \in L^i \oplus K^{i+1}$ entonces

$$d^i_{C(f)}(x,y) \overset{\mathsf{def}}{=} (d^i_L(x) + f^{i+1}(y), -d^{i+1}_K(y)) \text{ en } L^{i+1} \oplus K^{i+2} \overset{\mathsf{def}}{=} C(f)^{i+1}.$$

En particular, si denotamos por $K[1]^\bullet$ al complejo

$$K[1]^i := K^{i+1} \text{ con diferencial } d^i_{K[1]} := -d^{i+1}_K$$

entonces la sucesión de complejos

$$0 \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{\iota} C(f)^\bullet \xrightarrow{\pi} K[1]^\bullet \longrightarrow 0$$

es *exacta*, y por ende induce una sucesión exacta larga en cohomología

$$(\star) \qquad \cdots \longrightarrow \mathrm{H}^i(L^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^i(C(f)^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^i(K[1]^\bullet) \cong \mathrm{H}^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{\delta^i}$$
$$\xrightarrow{\delta^i} \mathrm{H}^{i+1}(L^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(C(f)^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

donde se tiene por construcción que el morfismo de conexión δ^i coincide con el morfismo

$$\mathrm{H}^{i+1}(f) : \mathrm{H}^{i+1}(K^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(L^\bullet)$$

inducido en cohomología por f.

Proposición 4.6.5. — *Sea $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ un morfismo de complejos* positivos *en $\mathscr{C}$ tal que:*

(1) *f es un quasi-isomorfismo (i.e., $\mathrm{H}^i(f) : \mathrm{H}^i(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(L^\bullet)$ es un isomorfismo para todo i), y que*
(2) *Los objetos de $K^\bullet$ y $L^\bullet$ son F-acíclicos.*

Entonces, $F(f) : F(K^\bullet) \longrightarrow F(L^\bullet)$ es un quasi-isomorfismo.

Demostración. — Las hipótesis (1) y (2) implican, usando $(\star)$, que el complejo $C(f)^\bullet$ es *exacto* y que cada objeto

$$C(f)^i \overset{\mathsf{def}}{=} L^i \oplus K^{i+1}$$

es F-acíclico. Luego, el Lema 4.6.3 discutido anteriormente implica que $F(C(f)^\bullet) \cong C(F(f))^\bullet$ es exacto también. Así, la sucesión exacta larga ($\star$) asociada a la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow F(L^\bullet) \longrightarrow C(F(f))^\bullet \longrightarrow F(K[1]^\bullet) \longrightarrow 0$$

muestra que el morfismo de complejos

$$F(f) : F(K^\bullet) \longrightarrow F(L^\bullet)$$

es un quasi-isomorfismo. $\square$

Estamos en condiciones de probar el primer resultado importante de esta sección, que señala que

> Para calcular los functores derivados $\mathrm{R}^i F$ basta considerar resoluciones F-acíclicas en lugar de resoluciones inyectivas.

Más precisamente, se tiene el siguiente resultado de Grothendieck que puede ser visto como un caso particular de la *sucesión espectral de Grothendieck*, introducida en el Tohoku paper [**Gro57**].

Teorema 4.6.6 **(de de Rham).** — *Sea A un objeto en $\mathscr{C}$ y sea $A \longrightarrow K^\bullet$ una resolución de A tal que todos los objetos de $K^\bullet$ son F-acíclicos. Entonces, hay un isomorfismo canónico*

$$\mathrm{H}^i(F(K^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^i F(A) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Demostración. — Consideremos la resolución inyectiva $A \longrightarrow I_A^\bullet$ que escogimos para calcular $\mathrm{R}^i F(A) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet))$. Entonces, el Teorema 4.4.19 sobre las propiedades de complejos inyectivos implica que la resolución $A \longrightarrow K^\bullet$ induce un morfismo de complejos $f : K^\bullet \longrightarrow I_A^\bullet$, que es único módulo homotopía y tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & K^\bullet \arrow[d, "f"] \\ & I_A^\bullet \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Aplicando F, obtenemos un morfismo de complejos $F(K^\bullet) \longrightarrow F(I_A^\bullet)$ que es único módulo homotopía. Así, obtenemos un *único* morfismo inducido en cohomología

$$\mathrm{H}^i(F(K^\bullet)) \longrightarrow \mathrm{H}^i(F(I_A^\bullet)) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{R}^i F(A).$$

Finalmente, dado $A \longrightarrow K^\bullet$ y $A \longrightarrow I_A^\bullet$ son *resoluciones* del mismo objeto, tenemos que $f : K^\bullet \longrightarrow I_A^\bullet$ es un quasi-isomorfismo. Además, tenemos que

$K^\bullet$ y $I_A^\bullet$ son complejos F-acíclicos (por hipótesis y porque $I_A^\bullet$ es inyectivo, respectivamente), por lo que la Proposición anterior implica que

$$F(K^\bullet) \longrightarrow F(I_A^\bullet) \text{ es un quasi-isomorfismo,}$$

i.e., $\mathrm{H}^i(F(K^\bullet)) \cong \mathrm{R}^i F(A)$ para todo $i \geq 0$. $\square$

Observación importante 4.6.7. — En 1931, Georges de Rham prueba que si X es una variedad diferenciable real y $\mathscr{O}_X = \mathscr{C}_X^\infty$ es su haz de funciones diferenciables, entonces tenemos un complejo asociado

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathscr{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_X^{\dim(X)} \longrightarrow 0$$

llamado el **complejo de de Rham**. Más aún, de Rham calcula (usando el Lema de Poincaré) que, si denotamos $\Omega_X^0 := \mathscr{O}_X$, entonces

$$\mathrm{H}^i(X, \Omega_X^p) = 0 \text{ para todo } i \geq 1 \text{ y todo } p \geq 0.$$

En otras palabras,

> El complejo de de Rham $\underline{\mathbb{R}} \longrightarrow \Omega_X^\bullet$ determina una resolución Γ-acíclica del haz $\underline{\mathbb{R}}$.

Luego, el Teorema de de Rham implica que

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^i(X, \underline{\mathbb{R}}) \cong \mathrm{H}^i(\Gamma(\Omega_X^\bullet)) &\overset{\mathsf{def}}{=} \frac{\ker\{d : \Omega_X^i(X) \longrightarrow \Omega_X^{i+1}(X)\}}{\mathrm{Im}\{d : \Omega_X^{i-1}(X) \longrightarrow \Omega_X^i(X)\}} \\ &\overset{\mathsf{def}}{=} \frac{\{i\text{-formas cerradas en } X\}}{\{i\text{-formas exactas en } X\}} =: \mathrm{H}_{\mathrm{dR}}^i(X). \end{aligned}$$

En 1953, Pierre Dolbeault demuestra resultados análogos para variedades *complejas*.

Inspirados por la discusión anterior, consideremos en lo que sigue un *espacio topológico* X y sea $\mathbf{Sh}(X)$ la categoría de haces de grupos abelianos en X. Así, los functores derivados del functor de secciones globales

$$\Gamma : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}, \; \mathscr{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$$

son los grupos de cohomología $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$.

Definición 4.6.8. — Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Decimos que X es **flasque** (en inglés, *flabby*[(6)]) si para todo abierto $U \subseteq X$, el morfismo de restricción

$$\mathscr{F}(X) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{F}(U)$$

es sobreyectivo.

[(6)] En español, podría traducirse como *blando*.

Nuestro objetivo será probar que todo haz flasque es Γ-acíclico y por ende podemos utilizar resoluciones flasque para calcular cohomología. Para esto necesitaremos algunos resultados previos.

Lema 4.6.9. — *Sea* $0 \longrightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{f} \mathscr{G} \xrightarrow{g} \mathscr{H} \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta de haces de grupos abelianos en* X*, y supongamos que* $\mathscr{F}$ *y* $\mathscr{G}$ *son flasques. Entonces:*

(1) $\Gamma(g) : \Gamma(X, \mathscr{G}) \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathscr{H})$ *es sobreyectivo.*
(2) $\mathscr{H}$ *es flasque.*

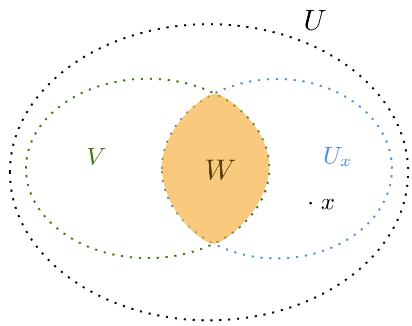
Demostración. — Probaremos un resultado más general: si $\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$ son haces arbitrarios y si $\mathscr{F}$ es flasque, entonces para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que

$$\mathscr{G}(U) \twoheadrightarrow \mathscr{H}(U)$$

es *sobreyectivo.*

Para ello, fijemos $\sigma \in \mathscr{H}(U)$ y consideremos el conjunto parcialmente ordenado y no-vacío de paras (s, V) tales que $V \subseteq U$ es un abierto y donde $s \in \mathscr{G}(V)$ es una sección tal que $g(s) = \sigma|_V$. Luego, el Lema de Zorn implica que existe un elemento maximal (V, s). Veamos que necesariamente $V = U$, de donde deducimos (1):

Supongamos que $V \subsetneq U$, i.e., que existe $x \in U$ tal que $x \notin V$. Dado que $\mathscr{G} \twoheadrightarrow \mathscr{H}$ es un morfismo *de haces* sobreyectivo, existe una vecindad abierta $U_x \subseteq U$ de x y una sección $t \in \mathscr{G}(U_x)$ tal que $g(t) = \sigma|_{U_x}$. Sea $W := V \cap U_x$:



Por construcción, $g(s) = g(t)$ en $\mathscr{H}(W)$, i.e., $s - t \in \ker(g)(W)$. Así, la hipótesis de exactitud implica que

$(\star)$ Existe $\tilde{s} \in \mathscr{F}(W)$ tal que $f(\tilde{s}) = s - t$ en $\mathscr{G}(W)$.

Construyamos $\tau \in \mathscr{G}(V \cup U_x)$ tal que $g(\tau) = \sigma|_{V \cup U_x}$, contradiciendo así la maximalidad de (s, V):

Dado que $\mathscr{F}$ es flasque, $\widetilde{s} \in \mathscr{F}(W)$ es la restricción de cierta sección en $\mathscr{F}(V)$, que también llamaremos $\widetilde{s} \in \mathscr{F}(V)$. Luego, si definimos $\widetilde{t} := s - f(\widetilde{s}) \in \mathscr{G}(V)$ entonces la identidad $(\star)$ implica que $\widetilde{t}|_W = t \in \mathscr{G}(W)$.

Así, $t \in \mathscr{G}(U_x)$ y $\widetilde{t} \in \mathscr{G}(V)$ cumplen que $t|_{U_x \cap V} = \widetilde{t}|_{U_x \cap V}$ y por ende se pegan en una sección $\tau \in \mathscr{G}(V \cup U_x)$. Más aún, $g(\tau) \in \mathscr{H}(V \cup U_x)$ cumple

$$g(\tau)|_{U_x} = g(\tau|_{U_x}) = g(t) = \sigma|_{U_x}$$

y que

$$g(\tau)|_V = g(\tau|_V) = g(\widetilde{t}) \stackrel{\mathsf{def}}{=} g(s) - \underbrace{g(f(\widetilde{s}))}_{=0} = \sigma|_V,$$

i.e., $g(\tau) = \sigma|_{V \cup U_x}$. Esto contradice la maximalidad de (s, V), por ende se deduce (1). Para (2), consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{G}(X) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathscr{H}(X) \arrow[d] \\ \mathscr{G}(U) \arrow[r, two heads] & \mathscr{H}(U) \end{tikzcd}$$

y notamos que para todo $U \subseteq X$ abierto, las flechas horizontales son sobreyectivas gracias a la prueba de (1). Además, la primera flecha vertical es sobreyectiva pues $\mathscr{G}$ es *flasque*. Así, la segunda flecha vertical es sobreyectiva también, i.e., $\mathscr{H}$ es flasque. $\square$

Construcción 4.6.10. — Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado, $U \subseteq X$ un abierto no-vacío y $j : U \hookrightarrow X$ la inclusión. Dado un $\mathscr{O}_U$-módulo $\mathscr{F}$, definimos el prehaz **extensión por cero** $j_!^{\text{pre}}\mathscr{F}$ en X mediante

$$(j_!^{\text{pre}}\mathscr{F})(V) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } V \not\subseteq U \\ \mathscr{F}(V) & \text{si } V \subseteq U \end{cases}$$

Queda como ejercicio al lector probar que que el haz asociado $j_!\mathscr{F} := (j_!^{\text{pre}}\mathscr{F})^+$, el **haz extensión por cero**, es un $\mathscr{O}_X$-módulo y que la correspondencia

$$\mathscr{F}(X) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \Gamma(X, \mathscr{F}) \cong \operatorname{Hom}_X(\mathscr{O}_X, \mathscr{F})$$

de la Observación 4.2.3 se generaliza a una correspondencia

$$\mathscr{F}(U) \cong \operatorname{Hom}_X(j_!\mathscr{O}_U, \mathscr{F})$$

que es válida para todo abierto $U \subseteq X$.

Proposición 4.6.11. — *Sea $(X, \mathscr{O}_X)$ un espacio anillado, y sea $\mathcal{I}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo* inyectivo. *Entonces, $\mathcal{I}$ es un haz* flasque.

Demostración. — Sea $U \subseteq X$ un abierto y $j : U \hookrightarrow X$ la inclusión. Entonces, la sucesión

$$0 \longrightarrow j_!\mathscr{O}_U \hookrightarrow \mathscr{O}_X$$

es exacta. Por otro lado, por definición, $\mathcal{I}$ es un objeto inyectivo si y sólo si el functor contravariante

$$\mathrm{Hom}(\,\cdot\,,\mathcal{I}) : \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ \mathscr{F} \longmapsto \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathcal{I})$$

es un functor exacto. En particular, la sucesión

$$\mathcal{I}(X) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathscr{O}_X,\mathcal{I}) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(U) \cong \mathrm{Hom}_X(j_!\mathscr{O}_U,\mathcal{I}) \longrightarrow 0$$

es exacta, probando así que $\mathcal{I}$ es flasque. □

Observación importante 4.6.12. — En nuestra definición original de espacio anillado $(X,\mathscr{O}_X)$ pedimos que $\mathscr{O}_X$ fuese un haz de k-álgebras. Sin embargo, tal como se remarcó luego de la Definición 1.4.6, se puede considerar sin problemas al haz estructural $\mathscr{O}_X$ como un haz de **anillos** abelianos. En particular, si $\mathscr{O}_X = \underline{\mathbb{Z}}$ entonces $\mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \cong \mathbf{Sh}(X)$, y la Proposición anterior señala que

> En un espacio topológico X, todo haz $\mathcal{I}$ de grupos abelianos **inyectivo** es flasque.

Teorema 4.6.13. — *Sea X un espacio topológico, y sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Supongamos que $\mathscr{F}$ es* flasque*, entonces*

$$\mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } i \geq 1,$$

i.e., $\mathscr{F}$ es Γ-acíclico.

Demostración. — Consideremos un incrustamiento $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es un objeto inyectivo en $\mathbf{Sh}(X)$ (y en particular $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{I}) = 0$ para todo $i \geq 1$).

Sea $\mathscr{G} := \mathcal{I}/\mathscr{F}$, y consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow 0$$

donde $\mathscr{F}$ e $\mathcal{I}$ son flasques (por hipótesis y por la Proposición anterior, respectivamente). Luego, el Lema 4.6.9 implica que $\mathscr{G}$ es flasque y que la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathscr{G}) \longrightarrow 0$$

es *exacta.* Así, la sucesión exacta en cohomología se reduce a

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{H}^1(X,\mathcal{I})}_{=0} \longrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{H}^2(X,\mathcal{I})}_{=0} \longrightarrow \cdots$$

i.e., $\mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}) = 0$ y además $\mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^{i-1}(X,\mathscr{G})$ para todo $i \geq 2$.

Finalmente, deducimos por inducción en $i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $i \geq 1$. $\square$

¡Atención! — En términos prácticos, el Teorema anterior (junto con el Teorema de de Rham) nos dice que

> En un espacio topológico X, para calcular los grupos de cohomología $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ basta considerar resoluciones *flasques* de $\mathscr{F}$, en lugar de resoluciones inyectivas.

Veamos que esto último implica que, en una variedad algebraica X, los functores derivados (i.e., los grupos de cohomología) de los functores $\Gamma : \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow A\text{-}\mathbf{Mod}$, con $A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, y $\Gamma : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}$ coinciden. Más precisamente, tenemos que:

Corolario 4.6.14. — *Sea X una variedad algebraica, y sea $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Entonces, si denotamos por $\mathscr{F}_a$ al haz de grupos abelianos subyacente al $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{F}$, tenemos que*

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}_a) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Demostración. — Sea $\mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ una resolución inyectiva en la categoria $\mathscr{O}_X$-**Mod**. Entonces, gracias a la Proposición anterior, tenemos que $\mathscr{F}_a \longrightarrow \mathcal{I}_a^\bullet$ es una resolución flasque en la categoría $\mathbf{Sh}(X)$.

Luego, el Teorema anterior implica que los objetos de $\mathcal{I}_a^\bullet$ son Γ-acíclicos. Finalmente, el Teorema de de Rham implica que la resolución $\mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{I}_a^\bullet$ permite calcular

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathcal{I}^\bullet)) = \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathcal{I}_a^\bullet)) \underset{\mathsf{dR}}{\cong} \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}_a)$$

para todo $i \geq 0$. $\square$

4.7. Cohomología de variedades afines y Teorema de Leray

En esta sección probaremos el Teorema de Serre y el Teorema de Leray que fueron usados en §4.1 y §4.2 para obtener importantes resultados y calcular cohomología de variedades algebraicas.

Recuerdo 4.7.1. — Sea A un anillo conmutativo con unidad, y sea M un A-módulo. Para todo $f \in A$, definimos

$$M_f := M \otimes_A A_f \overset{\mathsf{def}}{=} \left\{ \frac{m}{f^p} \text{ con } m \in M \text{ y } p \in \mathbb{N} \right\} / \sim,$$

donde $\frac{m}{f^p} \sim \frac{m'}{f^q}$ si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f^r(f^q m - f^p m') = 0$ en M.

Además, si X es una variedad algebraica *afín* con $A = \mathscr{O}(X)$, entonces hay una correspondencia biyectiva entre *haces quasi-coherentes* (resp. *haces coherentes*) y A-módulos (resp. A-módulos finitamente generados) mediante

$$\begin{aligned} \mathscr{F} &\longmapsto \Gamma(X, \mathscr{F}) \\ \widetilde{M} &\longleftarrow M \end{aligned}$$

donde $\widetilde{M}$ es el haz definido en el abierto estándar $U_f \overset{\mathsf{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } f(x) \neq 0\}$ por $\widetilde{M}(U_f) := M_f$.

Necesitaremos un resultado auxiliar de álgebra conmutativa, que dejamos como ejercicios para el lector.

Ejercicio 4.7.2. — Sea X una variedad algebraica *afín* con $A = \mathscr{O}(X)$, y sea I un A-módulo inyectivo. Probar que para todo $f \in A$ no-nulo se tiene:

(1) La proyección natural $I \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} I_f$, $m \longmapsto \frac{m}{1}$ es *sobreyectiva.*
(2) El kernel $K := \ker\{I \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} I_f\}$ es un A-módulo inyectivo.

Geométricamente, el punto (1) del Ejercicio anterior se traduce en:

Lema 4.7.3. — *Sea X una variedad algebraica* afín *con $A = \mathscr{O}(X)$, y sea I un A-módulo inyectivo, con $\mathcal{I} := \widetilde{I}$ el haz quasi-coherente asociado. Entonces, la restricción*

$$\mathcal{I}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(U_f)$$

es sobreyectiva para todo $f \in A$ no-nulo.

Lo anterior nos permitirá probar que el haz asociado a un *módulo* inyectivo es flasque (cf. todo *haz* inyectivo es flasque), i.e., la restricción de secciones globales es sobreyectiva.

Proposición 4.7.4. — *Sea X una variedad algebraica* afín *con $A = \mathscr{O}(X)$, y sea I un A-módulo inyectivo, con $\mathcal{I} := \widetilde{I}$ el haz quasi-coherente asociado. Entonces, $\mathcal{I}$ es un haz flasque.*

Demostración. — Consideremos el *soporte* del haz $\mathcal{I}$, definido por

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{I}) := \{x \in X \text{ tal que } \mathcal{I}_x \neq 0\},$$

y sea $Y := \overline{\mathrm{Supp}(\mathcal{I})} \subseteq X$ su clausura de Zariski.

Si $Y = \emptyset$, entonces $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(U) = 0$ para todo abierto $U \subseteq X$, por lo que $\mathcal{I}$ es flasque. Luego, podemos suponer que $Y \neq \emptyset$ y, por inducción noetheriana, que el resultado se cumple para todo A-módulo inyectivo K tal que el haz asociado $\mathscr{K} = \widetilde{K}$ verifica que $\overline{\mathrm{Supp}(\mathscr{K})} \subsetneq Y$:

Sea $U \subseteq X$ abierto y sea $s \in \mathcal{I}(U)$. Queremos hallar una sección global $\sigma \in \mathcal{I}(X)$ tal que $\sigma|_U = s$. Notamos que si $U \cap Y = \emptyset$ entonces $s = 0$ y por ende basta considerar $\sigma = 0$.

Supongamos que $U \cap Y \neq \emptyset$. Dado que los abiertos estándar U_f forman una base de la topología de Zariski, existe $f \in A$ no-nulo tal que $U_f \subseteq U$ y tal que $U_f \cap \operatorname{Supp}(\mathcal{I}) \neq \emptyset$. Luego, el Lema anterior implica que existe $\sigma' \in \mathcal{I}(X)$ tal que $\sigma'|_{U_f} = s|_{U_f}$.

Consideremos $t := s - \sigma'|_U \in \mathcal{I}(U)$, que verifica por construcción $t|_{U_f} = 0$ y luego t está definida por una sección de $\mathscr{K} := \widetilde{K}$, donde $K := \ker\{I \xrightarrow{\pi} I_f\}$ es un módulo inyectivo (gracias al Ejercicio anterior).

Finalmente, el hecho que $\overline{\operatorname{Supp}(\mathscr{K})} \subsetneq Y$ implica (por inducción noetheriana) que t se extiende a $\tau \in \mathcal{I}(X)$, que por construcción verifica $\tau|_U = t$. Luego, la sección global $\sigma := \sigma' + \tau \in \mathcal{I}(X)$ cumple

$$\sigma|_U \overset{\mathsf{def}}{=} \sigma'|_U + t \overset{\mathsf{def}}{=} s \in \mathcal{I}(U),$$

probando así que $\mathcal{I}$ es un haz flasque. $\square$

Tenemos todos los ingredientes para probar el importante resultado de Jean-Pierre Serre concerniente a la cohomología de variedades algebraicas afines.

***Teorema 4.7.5* (Serre).** — *Sea $\mathscr{F}$ un haz quasi-coherente en una variedad algebraica* afín X. *Entonces,*

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } i \geq 1.$$

Demostración. — Sea $A = \mathscr{O}(X)$, y consideremos el A-módulo $M := \Gamma(X, \mathscr{F})$.

Sea $\varepsilon : M \longrightarrow I^\bullet$ una resolución inyectiva de M en la categoría A-**Mod**. Para cada $p \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{I}^p := \widetilde{I^p}$ al haz quasi-coherente asociado al A-módulo inyectivo I^p.

La Proposición anterior implica que $\mathcal{I}^p$ es un haz *flasque* y en particular es Γ-acíclico (ver Teorema 4.6.13). Así, obtenemos una resolución Γ-acíclica

$$\varepsilon : \widetilde{M} \cong \mathscr{F} \longrightarrow \widetilde{I^\bullet} \overset{\mathsf{def}}{=} \mathcal{I}^\bullet$$

del haz $\mathscr{F}$ en la categoría $\mathscr{O}_X$-**Mod**. Finalmente, el Teorema de de Rham y el hecho que $\Gamma(X, \mathcal{I}^p) \overset{\mathsf{def}}{=} \Gamma(X, \widetilde{I^p}) \cong I^p$ implican que:

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \underset{\mathsf{dR}}{\cong} \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) \cong \mathrm{H}^i(I^\bullet) = 0$$

para todo $i \geq 1$. $\square$

Para cerrar el círculo de ideas, nos resta solamente probar el Teorema de Leray que nos asegura (junto con el Teorema de Serre) que podemos utilizar *cohomología de Čech* para hacer cálculos de cohomología coherente.

Recuerdo 4.7.6. — Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X, donde I es un conjunto ordenado.

Para cada $p \in \mathbb{N}$ se define el grupo de **p-cocadenas** de Čech de $\mathscr{F}$ respecto a $\mathscr{U}$ por:

$$C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) := \prod_{i_0<\cdots<i_p} \mathscr{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}).$$

Además, para cada p-cocadena $s = \{s_{j_0,\ldots,j_p}\}_{j_0<\cdots<j_p}$, se define el **operador de coborde** $d^p : C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F})$, $s \mapsto d^p s$ mediante

$$(\star) \qquad (d^p s)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0,\ldots,i_{k-1},i_{k+1},\ldots,i_{p+1}}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}}}$$

el cual verifica $d^{p+1} \circ d^p = 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$, i.e., $C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ es un *complejo* en la categoría **Ab**, llamado el **complejo de Čech**. Además,

$$\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F}))$$

es el i-ésimo grupo de cohomología de Čech, que verifica $\check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F})$.

La idea clave será asociar un complejo de *haces* al complejo de Čech.

Construcción 4.7.7. — Sea $V \subseteq X$ un abierto, y consideremos el cubrimiento $\mathscr{U}_V$ de V dado por los abiertos $\{U_i \cap V\}_{i\in I}$. Entonces, el prehaz de grupos abelianos

$$V \longmapsto C^p(\mathscr{U}_V, \mathscr{F})$$

es un *haz*, que denotaremos $\mathscr{C}^p(\mathscr{U}, \mathscr{F})$. Más aún, dichos haces vienen dotados de morfismos

$$d^p : \mathscr{C}^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{C}^{p+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F})$$

que hacen de $\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ un complejo en la categoría $\mathbf{Sh}(X)$.

Notar que, por construcción, tenemos que:

(1) Si $\mathscr{F}$ es flasque, entonces $\mathscr{C}^p(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ es flasque para todo $p \in \mathbb{N}$.

(2) El morfismo $\varepsilon^0 : \mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ dado por

$$s \in \mathscr{F}(V) \longmapsto \{s|_{V\cap U_i}\}_{i\in I} \in C^0(\mathscr{U}_V, \mathscr{F})$$

es inyectivo, gracias a los axiomas de haces. En particular,

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xhookrightarrow{\varepsilon^0} \mathscr{C}^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \xrightarrow{d^0} \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

es un complejo en la categoría $\mathbf{Sh}(X)$.

(3) Hay isomorfismos
$$\mathrm{H}^0(\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})) \overset{\mathsf{def}}{=} \ker(d^0) \cong \mathscr{F} \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{Im}(\varepsilon^0),$$
que se obtienen gracias al ítem (2).

El siguiente Lema técnico, cuya demostración pasa por cálculos tediosos (pero explícitos), es un ingrediente esencial para probar el Teorema de Leray.

Lema 4.7.8. — *Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X, donde I es un conjunto ordenado. Entonces,*
$$\varepsilon : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$$
es una resolución *de $\mathscr{F}$ en la categoría* $\mathbf{Sh}(X)$*.*

Idea de Demostración. — Por la discusión anterior, resta verificar que
$$\mathrm{H}^i(\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})) = 0 \text{ para todo } i \geq 1,$$
i.e., que $\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$ es un complejo *exacto*. Esto último puede verificarse en cada tallo, i.e., basta probar que para todo $x \in X$ se tiene que $\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})_x$ es un complejo exacto de grupos abelianos:

Sea U_j un abierto en el cubrimiento $\mathscr{U}$ tal que $x \in U_j$, y construyamos explícitamente una homotopía $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})_x} \sim 0$, lo que concluye la demostración del Lema:

Por definición, la homotopía h está dada por morfismos
$$h^{p+1} : \mathscr{C}^{p+1}(\mathscr{U},\mathscr{F})_x \to \mathscr{C}^p(\mathscr{U},\mathscr{F})_x$$
tales que para todo germen $f \in \mathscr{C}^{p+1}(\mathscr{U},\mathscr{F})_x$ se cumple que
$$(\star\star) \qquad f = d^p \circ h^{p+1}(f) + h^{p+2} \circ d^{p+1}(f) \text{ en } \mathscr{C}^{p+1}(\mathscr{U},\mathscr{F})_x.$$
Para esto, se define $h^{p+1}(f) \overset{\mathsf{def}}{=} (h^{p+1}(f)_{i_0,\dots,i_p})_{i_0<\cdots<i_p}$ mediante
$$h^{p+1}(f)_{i_0,\dots,i_p} := f_{j,i_0,\dots,i_p}.$$
Aquí, $f = (f_{i_0,\dots,i_{p+1}}) \in C^{p+1}(\mathscr{U}_V,\mathscr{F})$ para cierta vecindad abierta V del punto $x \in X$, que podemos suponer tal que $V \subseteq U_j$.

En particular, esta última condición asegura que
$$V \cap (U_j \cap U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}) = V \cap (U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}),$$
y por ende tenemos $(f_{j,i_0,\dots,i_p})_{i_0<\cdots<i_p} \in C^p(\mathscr{U}_V,\mathscr{F})$ y, por definición, su germen en $x \in X$ coincide con $h^{p+1}(f)$. Finalmente, la fórmula $(\star\star)$ se deduce

"*directamente*" de la fórmula ($\star$) que define el operador de coborde en cohomología de Čech. $\square$

Proposición 4.7.9. — *Sea X un espacio topológico y sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X, donde I es un conjunto ordenado. Entonces:*

(1) *Para toda sucesión exacta $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ de haces de grupos abelianos en X tal que*

$$\mathrm{H}^1(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } p \in \mathbb{N} \text{ y todos } i_0, \ldots, i_p \in I,$$

hay una sucesión exacta *larga de cohomología de Čech*

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{G}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^0} \check{\mathrm{H}}^1_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F})$$
$$\longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{G}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{H}) \xrightarrow{\delta^1} \check{\mathrm{H}}^2_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

(2) *Si $\mathscr{F}$ es un haz* flasque, *entonces $\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) = 0$ para todo $i \geq 1$.*

Demostración. — La hipótesis del ítem (1) implica que, para todas las posibles intersecciones, las sucesiones de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}) \longrightarrow \mathscr{G}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}) \longrightarrow \mathscr{H}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}) \longrightarrow 0$$

son *exactas*, i.e., la sucesión de complejos

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}) \longrightarrow C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{G}) \longrightarrow C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{G}) \longrightarrow 0$$

es exacta, de donde se obtiene la sucesión exacta larga (gracias al Lema de la serpiente).

Para el ítem (2), notamos que $\varepsilon : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$ es una resolución *flasque*, y por ende Γ-acíclica. Luego, el Teorema de de Rham, junto con el hecho que $\mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) = 0$ dado que $\mathscr{F}$ es un objeto Γ-acíclico, implica que

$$0 = \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \underset{\mathsf{dR}}{\cong} \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}))) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})) \overset{\mathsf{def}}{=} \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F})$$

para todo $i \geq 1$. $\square$

La definición más importante de esta sección es la siguiente.

Definición 4.7.10. — Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X, donde I es un conjunto ordenado. Decimos que el cubrimiento $\mathscr{U}$ es **$\mathscr{F}$-acíclico** si para todo $p \in \mathbb{N}$ y todos $i_0, \ldots, i_p \in I$ se tiene que

$$\mathrm{H}^i(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}, \mathscr{F}) = 0 \text{ para todo } i \geq 1.$$

***Teorema 4.7.11* (Leray). —** *Sea $\mathscr{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X, donde I es un conjunto ordenado. Entonces:*

(1) *Existe un morfismo canónico*

$$\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \text{ para todo } i \geq 0,$$

que es functorial en $\mathscr{F}$.

(2) *Supongamos que el cubrimiento $\mathscr{U}$ es $\mathscr{F}$-acíclico, entonces*

$$\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F})$$

es un isomorfismo para todo $i \geq 0$.

Demostración. — Para (1), consideramos la resolución

$$\varepsilon : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})$$

de Lema anterior, y fijamos una resolución inyectiva $\mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ que permite calcular $\mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{R}^i\Gamma(\mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathcal{I}^\bullet))$. Así, las propiedades de las resoluciones inyectivas implican que hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr] & \mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathcal{I}^\bullet \end{tikzcd}$$

donde φ es único módulo homotopía. Luego,

$$\Gamma(\varphi) : \Gamma(\mathscr{C}^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})) \overset{\mathsf{def}}{=} C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{I}^\bullet)$$

induce un morfismo en cohomología

$$\mathrm{H}^i(C^\bullet(\mathscr{U},\mathscr{F})) \overset{\mathsf{def}}{=} \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F})$$

que, tal como en secciones anteriores, se prueba que es functorial en $\mathscr{F}$.

Para (2), procedemos por indución en $i \in \mathbb{N}$, donde el paso $i = 0$ se verifica gracias a que

$$\check{\mathrm{H}}^0_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^0(X,\mathscr{F}) \cong \Gamma(X,\mathscr{F}).$$

Además, el ítem (1) y la Proposición anterior implican que para toda sucesión exacta corta $0 \to \mathscr{F} \to \mathcal{I} \to \mathscr{G} \to 0$ en $\mathbf{Sh}(X)$ tal que el cubrimiento $\mathscr{U}$ sea $\mathscr{F}$-acíclico, se tiene un diagrama conmutativo de sucesiones exactas largas de cohomología

$$\begin{tikzcd}
\cdots \to \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathcal{I}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{G}) \arrow[r, "\check{\delta}^i"] \arrow[d] & \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \to \cdots \arrow[d] \\
\cdots \to \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^i(X,\mathcal{I}) \arrow[r] & \mathrm{H}^i(X,\mathscr{G}) \arrow[r, "\delta^i"] & \mathrm{H}^{i+1}(X,\mathscr{F}) \to \cdots
\end{tikzcd}$$

Con lo anterior en mente, consideramos un incrustamiento $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ dentro de un objeto inyectivo $\mathcal{I}$ de la categoría $\mathbf{Sh}(X)$, y definimos $\mathscr{G} := \mathcal{I}/\mathscr{F}$. Dado que el cubrimiento $\mathscr{U}$ es $\mathscr{F}$-acíclico y que $\mathcal{I}$ es un objeto Γ-acíclico (pues $\mathcal{I}$ es un objeto inyectivo), tenemos que para cada intersección

$$U_{i_0\cdots i_p} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$$

tanto $\mathscr{F}$ como $\mathcal{I}$ son Γ-acíclicos, i.e., $\mathrm{H}^i(U_{i_0\cdots i_p},\mathscr{F}) = \mathrm{H}^i(U_{i_0\cdots i_p},\mathcal{I}) = 0$ para todo $i \geq 1$. Luego, la sucesión exacta larga en cohomología implica que el cociente $\mathscr{G}$ también es Γ-acíclico en cada $U_{i_0\cdots i_p}$, i.e., el cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ es $\mathscr{G}$-acíclico también.

Finalmente, el hecho que $\mathcal{I}$ sea *flasque* implica (gracias a la Proposición anterior) que $\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathcal{I}) = 0$ para todo $i \geq 1$. Luego, el diagrama conmutativo de sucesiones exactas largas de cohomología se reduce a:

$$\begin{tikzcd}
0 \to \Gamma(X,\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \Gamma(X,\mathcal{I}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \Gamma(X,\mathscr{G}) \arrow[r, "\check{\delta}^0"] \arrow[d, "\sim"] & \check{\mathrm{H}}^1_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \to 0 \arrow[d] \\
0 \to \Gamma(X,\mathscr{F}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{I}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathscr{G}) \arrow[r, "\delta^0"] & \mathrm{H}^1(X,\mathscr{F}) \to 0
\end{tikzcd}$$

de donde deducimos que la última flecha vertical es un isomorfismo, y se reduce al diagrama siguiente para todo $i \geq 1$

$$\begin{tikzcd}
0 \to \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{G}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] & \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \to 0 \arrow[d] \\
0 \to \mathrm{H}^i(X,\mathscr{G}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{H}^{i+1}(X,\mathscr{F}) \to 0
\end{tikzcd}$$

donde las fechas horizontales son isomorfismos, y donde la primera flecha vertical es un isomorfismo gracias a la hipótesis de inducción. Por lo tanto, deducimos que

$$\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F})$$

es un isomorfismo para todo $i \geq 0$. □

Observación importante 4.7.12. — Tal como adelantamos anteriormente (ver Teorema 4.1.26), el Teorema de Serre y el Teorema de Leray implican que si X es una *variedad algebraica* y $\mathscr{F}$ es un haz quasi-coherente en X, entonces:

Para todo cubrimiento finito $\mathscr{U}$ de X formado por *abiertos afines*,
se tiene que $\check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(X,\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X,\mathscr{F})$ para todo $i \geq 0$.

Así, todos los cálculos realizados en §4.1 y §4.2 están ahora justificados.

Es muy importante señalar que el Teorema de Leray tiene aplicaciones prácticas fuera de la geometría algebraica. Por ejemplo, permite calcular *cohomología singular* de espacios topológicos usando cubrimientos abiertos $\underline{\mathbb{Z}}$-acíclicos (e.g. tales que todas las posibles intersecciones son contractibles).

Ejercicio 4.7.13. — El objetivo de este problema es generalizar la **fórmula de Künneth** discutida anteriormente en el Ejercicio 3.2.7.

Sean X e Y variedades algebraicas, y sea $\mathscr{F} \in \mathbf{Qcoh}(X)$ y $\mathscr{G} \in \mathbf{Qcoh}(Y)$ haces quasi-coherentes (e.g. fibrados vectoriales) en X e Y, respectivamente. Entonces, se tiene que

$$\mathrm{H}^i(X \times Y, \mathscr{F} \boxtimes \mathscr{G}) \cong \bigoplus_{p+q=i} \mathrm{H}^p(X,\mathscr{F}) \otimes_k \mathrm{H}^q(Y,\mathscr{G}) \text{ para todo } i \geq 0,$$

donde $\mathscr{F} \boxtimes \mathscr{G} := (\mathrm{pr}_X^* \mathscr{F}) \otimes (\mathrm{pr}_Y^* \mathscr{G}) \in \mathbf{Qcoh}(X \times Y)$ es el producto tensorial exterior entre $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$.

Para probar lo anterior, puede seguir los siguientes pasos:

(1) Sean $K^\bullet$ y $L^\bullet$ dos complejos en la categoría de espacios vectoriales, y definamos para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$(K \otimes L)^n := \bigoplus_{p+q=n} K^p \otimes L^q$$

dotado del diferencial definido por

$$d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^p x \otimes dy,$$

donde $x \in K^p$ e $y \in L^q$. Probar que lo anterior define un complejo de espacios vectoriales, que denotaremos $K^\bullet \otimes L^\bullet$.

(2) Considerar la aplicación lineal

$$\varphi : \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{H}^p(K^\bullet) \otimes_k \mathrm{H}^q(L^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^n(K^\bullet \otimes L^\bullet)$$

definida en cada factor de la suma directa mediante $[x] \otimes [y] \longmapsto [x \otimes y]$. Probar que φ está bien definida, i.e., que el $[x \otimes y]$ sólo depende de las clases de cohomología $[x]$ e $[y]$.

(3) Sea $Z^i := \ker(d_K^i) \subseteq K^i$ y sea $B^i := \mathrm{Im}(d_K^{i-1}) \subseteq K^i$. Fijamos, para cada $i \in \mathbb{Z}$, un espacio complementario W^i de B^i en Z^i (i.e., $Z^i = B^i \oplus W^i$) y un espacio complementario S^i de Z^i en K^i (i.e., $K^i = B^i \oplus W^i \oplus S^i$), y donde el diferencial induce isomorfismos $S^i \cong B^{i+1}$.

Probar que el complejo con diferencial nulo $W^\bullet := (W^i, 0)$ es un subcomplejo de $K^\bullet$ cuyo complemento $T^\bullet$, dado por $T^i := B^i \oplus S^i$, verifica que $\mathrm{H}^i(T^\bullet) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

(4) Probar que $\mathrm{Id}_{T^\bullet} \sim 0$ es homotópicamente nulo, y que lo mismo ocurre para $T^\bullet \otimes L^\bullet$. Deducir que podemos suponer que los diferenciales de $K^\bullet$ y $L^\bullet$ son nulos.

(5) Probar la fórmula de Künneth en el caso particular en que $K^\bullet$ y $L^\bullet$ son complejos de espacios vectorial con diferenciales nulos, y probar el caso geométrico usando cohomología de Čech respecto a un cubrimiento afín.

4.8. Imágenes directas superiores

Durante esta sección, denotaremos por $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas y por $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Nuestro objetivo será probar una versión del *Teorema de coherencia de imagenes directas de Grauert-Grothendieck* y aplicarlo al estudio de morfismos finitos.

Recuerdo 4.8.1. — El functor imagen directa

$$f_* : \mathbf{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(Y),\ \mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathscr{F}$$

es exacto por la izquierda, donde $(f_*\mathscr{F})(V) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{F}(f^{-1}(V))$ para todo abierto $V \subseteq Y$. Sus functores derivados

$$\mathrm{R}^i f_* : \mathbf{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(Y),\ \mathscr{F} \longrightarrow \mathrm{R}^i f_*\mathscr{F}$$

se llaman **imágenes directas superiores**. En particular, $\mathrm{R}^0 f_*(\mathscr{F}) \cong f_*\mathscr{F}$ y toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

de $\mathscr{O}_X$-módulos induce una sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow f_*\mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathscr{G} \longrightarrow f_*\mathscr{H} &\xrightarrow{\delta^0} \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{F} \\ \longrightarrow \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{G} \longrightarrow \mathrm{R}^1 f_*\mathscr{H} &\xrightarrow{\delta^1} \mathrm{R}^2 f_*\mathscr{F} \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

de $\mathscr{O}_Y$-módulos quasi-coherentes.

Lema 4.8.2. — *La imagen directa superior* $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})$ *es el haz asociado al prehaz que a cada* $V \subseteq Y$ *abierto asigna*

$$V \longmapsto \mathrm{H}^i(f^{-1}(V), \mathscr{F}).$$

Demostración. — Sea $\mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ una resolución inyectiva, que permite calcular $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(f_*(\mathcal{I}^\bullet))$. Por otro lado, la definición de f_* implica que $\mathrm{H}^i(f_*(\mathcal{I}^\bullet))$ es el haz asociado al prehaz

$$V \longmapsto \mathrm{H}^i(\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{I}^\bullet)) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(f^{-1}(V), \mathscr{F}),$$

de donde se obtiene el resultado. $\square$

Observación importante 4.8.3. — Un caso particular importante del Lema anterior es cuando $\mathcal{I}$ es un haz *flasque* en X (e.g. $\mathcal{I}$ es un haz inyectivo en $\mathbf{Qcoh}(X)$). En tal caso, $\mathrm{R}^i f_*(\mathcal{I}) = 0$ para todo $i \geq 1$.

El siguiente resultado de Jean Leray es un caso particular de la *sucesión espectral de Leray* (1943), que a su vez se generaliza en la *sucesión espectral de Grothendieck* (1957). Se recomienda al lector comenzar en [**Vak17**, §1.7] para una introducción amigable a las sucesiones espectrales.

Teorema 4.8.4 **(de imágenes directas de Leray)**
Sea $f : X \longrightarrow Y$ *un morfismo regular entre variedades algebraicas, y sea* $\mathscr{F}$ *un haz quasi-coherente en* X *tal que* $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}) = 0$ *para todo* $p \geq 1$. *Entonces,*

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(Y, f_*\mathscr{F}) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Demostración. — Sea $\mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}^\bullet$ una resolución inyectiva, dada por el complejo exacto

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \xhookrightarrow{\varepsilon^0} \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{I}^2 \longrightarrow \cdots$$

Entonces, por hipótesis, $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^p(f_*(\mathcal{I}^\bullet)) = 0$ para todo $p \geq 1$, i.e.,

$$0 \longrightarrow f_*\mathscr{F} \hookrightarrow f_*\mathcal{I}^0 \longrightarrow f_*\mathcal{I}^1 \longrightarrow \cdots$$

es un complejo exacto, y por ende $f_*\mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución de $f_*\mathscr{F}$ en la categoría $\mathbf{Qcoh}(Y)$. Por otro lado, cada $\mathcal{I}^i$ es un haz flasque y luego (por definición de f_*) cada haz $f_*\mathcal{I}^i$ también es flasque.

Así, $f_*\mathscr{F} \longrightarrow f_*\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución flasque y el Teorema de de Rham implica que

$$\mathrm{H}^i(Y, f_*\mathscr{F}) \underset{\mathsf{dR}}{\cong} \mathrm{H}^i(\Gamma(Y, f_*\mathcal{I}^\bullet)) \underset{\mathsf{def}}{\cong} \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) \underset{\mathsf{def}}{\cong} \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$$

para todo $i \geq 0$. $\square$

Ejemplo 4.8.5. — Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo *finito*. Entonces, si $V \subseteq Y$ es un abierto *afín* se tiene que $f^{-1}(V) \subseteq X$ es un abierto afín también (ver Proposición 2.11.13). Luego, el Teorema de Serre sobre cohomología de variedades afines implica que $\mathrm{H}^p(f^{-1}(V), \mathscr{F}) = 0$ para todo $p \geq 1$. Luego, el Lema 4.8.2 implica que $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}) = 0$ para todo $p \geq 1$. Así, el Teorema de imágenes directas de Leray implica que

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(Y, f_*\mathscr{F}) \text{ para todo } i \geq 0,$$

lo que es una vasta generalización del Teorema 4.2.16.

Recuerdo 4.8.6. — Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas, y sea $\mathscr{F}$ un haz quasi-coherente en X.

Entonces, tal como se discutió en el Corolario 4.1.22, $f_*\mathscr{F}$ es un haz quasi-coherente en Y, pero **no** necesariamente es coherente (incluso si $\mathscr{F}$ es un haz coherente) tal como lo ejemplifica $\mathbb{A}^n \xrightarrow{f} Y = \{\mathrm{pt}\}$ y $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathbb{A}^n}$. Sin embargo, si f es un morfismo *finito* y $\mathscr{F}$ es un haz *coherente*, entonces $f_*\mathscr{F}$ es coherente también.

Esto último es la versión geométrica del hecho que si $\varphi : B \longrightarrow A$ es un morfismo de anillos noetherianos y M es un A-módulo, entonces M es un B-módulo vía $b \cdot m := \varphi(b) \cdot m$, pero **no** necesariamente es finitamente generado. Sin embargo, si A es un B-módulo finitamente generado vía φ, entonces M también lo es (cf. Recuerdo 2.15.1).

Veamos a continuación resultados análogos para las imágenes directas superiores $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})$.

Lema 4.8.7. — *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas, y sea $\mathscr{F}$ un haz quasi-coherente en X. Entonces:*

(1) *Si Y es una variedad algebraica* afín *con $B = \mathscr{O}(Y)$, entonces $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})$ es el haz asociado al B-módulo $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$.*
(2) *Las imágenes directas superiores $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})$ son haces quasi-coherentes.*

Demostración. — Para (1), recordamos que el hecho que Y sea afín implica que el functor de secciones globales

$$\Gamma : \mathbf{Qcoh}(Y) \longrightarrow B\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{G} \longmapsto \Gamma(Y, \mathscr{G})$$

es *exacto*. En particular, para todo complejo $\mathscr{K}^\bullet$ en $\mathbf{Qcoh}(Y)$ se tiene que

$$\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathscr{K}^\bullet)) \cong \Gamma(\mathrm{H}^i(\mathscr{K}^\bullet))$$

para todo $i \geq 0$ (ver Lema 4.3.11). Luego, si $\mathscr{F} \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ es una resolución inyectiva en $\mathbf{Qcoh}(X)$ y consideramos el complejo $\mathscr{K}^\bullet := f_*\mathcal{I}^\bullet$, que calcula $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(f_*\mathcal{I}^\bullet) = \mathrm{H}^i(\mathscr{K}^\bullet)$, entonces tenemos que

$$\Gamma(\mathrm{H}^i(\mathscr{K}^\bullet)) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(Y, \mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})) \cong \mathrm{H}^i(\Gamma(Y, f_*\mathcal{I}^\bullet)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}),$$

i.e., $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}) \cong \widetilde{M}$ con $M = \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$. Finalmente, (2) es una afirmación local en Y, que se deduce[7] directamente de (1). □

Para estudiar el problema de coherencia de imágenes directas superiores, necesitaremos la siguiente importante noción.

Definición 4.8.8. — Un morfismo regular $f : X \longrightarrow Y$ entre variedades algebraicas es un **morfismo proyectivo** si existe $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que f se factoriza como

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & Y \times \mathbb{P}^n \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

donde $\iota : X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^n$ es un incrustamiento cerrado.

Ejemplo importante 4.8.9. —

(1) Sea X una variedad algebraica *proyectiva* y $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular hacia una variedad algebraica (arbitraria), entonces f es un morfismo proyectivo.

En efecto, basta considera el grafo de f

$$X \underset{\sim}{\overset{\iota}{\longrightarrow}} \Gamma(f) \xrightarrow{\mathrm{pr}_Y} Y$$

con $\Gamma(f) \subseteq X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times Y$, lo que permite ver a X como un cerrado de $\mathbb{P}^n \times Y$.

(2) Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo proyectivo y sea $Z \subseteq X$ un cerrado. Entonces, el Teorema 2.7.9 nos asegura que $f(Z) \subseteq Y$ es cerrado.

Ejercicio 4.8.10. — Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo proyectivo, y sea $g : Z \longrightarrow Y$ un morfismo regular arbitrario. Consideremos el **producto fibrado**

$$X \times_Y Z := \{(x, z) \in X \times Z \text{ tal que } f(x) = g(z) \text{ en } Y\},$$

---

(7) Alternativamente, del hecho que el functor derivado $\mathrm{R}^i F$ de un functor $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ también está definido en las mismas categorías de partida y llegada.

y consideremos el morfismo de **cambio de base**

$$f_Z : X \times_Y Z \longrightarrow Z,\ (x,z) \longmapsto z.$$

Probar que f_Z es un morfismo proyectivo.

El siguiente resultado espectacular de Alexandre Grothendieck (1958) y de Hans Grauert (1960), probado por ambos matemáticos en el contexto algebraico y analítico respectivamente, es uno de los resultados fundamentales sobre haces coherentes.

Teorema 4.8.11 **(Grauert-Grothendieck).** — *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *un morfismo* proyectivo *y sea* $\mathscr{F}$ *un haz* coherente *en* X*. Entonces, las imágenes directas superiores*

$$\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}) \text{ son haces coherentes en } Y \text{ para todo } i \geq 0.$$

Demostración. — Consideramos una factorización $f : X \xhookrightarrow{\iota} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_Y} Y$, y recordemos que $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})$ es el haz asociado al prehaz

$$V \longmapsto \mathrm{H}^i(f^{-1}(V), \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(\mathrm{pr}_Y^{-1}(V), \iota_*\mathscr{F}).$$

Luego, podemos suponer que $X = Y \times \mathbb{P}^n$ y que $f = \mathrm{pr}_Y$. Mas aún, dado que la coherencia es una propiedad local, podemos suponer sin pérdida de generalidad que Y es una variedad algebraica *afín* con $B = \mathscr{O}(Y)$. En tal caso, el Lema anterior nos dice que $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F}) \cong \widetilde{M}$ con $M = \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$. Luego, basta verificar que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ es un B-módulo finitamente generado:

La misma demostración del Lema de Serre (ver Lema 4.2.5) se adapta a este contexto y nos permite probar la existencia de $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y de $m \gg 0$ tales que

$$\mathscr{O}_X(-m)^{\oplus r} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{F}$$

es un morfismo sobreyectivo de $\mathscr{O}_X$-módulos, y con ello obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathscr{G} \hookrightarrow \mathscr{O}_X(-m)^{\oplus r} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

sucesión exacta en $X = Y \times \mathbb{P}^n$. La conclusión se obtiene mediante inducción descendente en $i \in \mathbb{N}$, y considerando la sucesión exacta larga en cohomología

$$\to \mathrm{H}^i(X, \mathscr{G}) \to \mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(-m))^{\oplus r} \to \mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^{i+1}(X, \mathscr{G}) \cong \Gamma(Y, \mathrm{R}^{i+1} f_*\mathscr{G}) \to$$

donde $\Gamma(Y, \mathrm{R}^{i+1} f_*\mathscr{G})$ es un B-módulo finitamente generado por hipótesis inductiva. Así, resta verificar que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(-m))$ es un B-módulo finitamente generado.

Para este último paso, notamos que para todo $d \in \mathbb{Z}$ es posible calcular $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(d))$ usando cohomología de Čech respecto al cubrimiento *afín*

$V_i := Y \times U_i \cong Y \times \mathbb{A}^n$ de $X = Y \times \mathbb{P}^n$, donde $i \in \{0, \ldots, n\}$. De lo anterior, y notando que $C^\bullet(\mathscr{V}, \mathscr{O}_X(d)) \cong B \otimes_k C^\bullet(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(d)) &\underset{\text{Leray}}{\cong} \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{V}}(X, \mathscr{O}_X(d)) \cong B \otimes_k \check{\mathrm{H}}^i_{\mathscr{U}}(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \\ &\underset{\text{Leray}}{\cong} B \otimes_k \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)), \end{aligned}$$

de donde deducimos que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(d))$ es finitamente generado, pues $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ es de dimensión finita. Así, $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F})$ es finitamente generado, i.e., $\mathrm{R}^i f_*(\mathscr{F})$ es un haz coherente. □

Una aplicación muy útil de lo anterior, es el siguiente criterio que permite verificar si un morfismo es finito.

Teorema 4.8.12. — *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo* proyectivo *tal que*

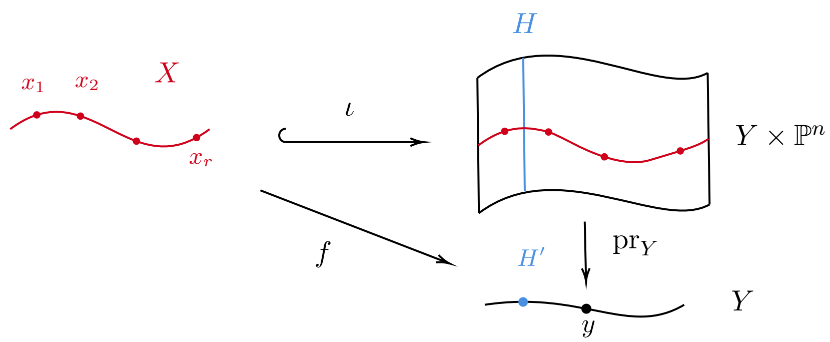
Para todo $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y) \subseteq X$ es un conjunto finito.

Entonces, f es un morfismo finito.

Demostración. — El resultado es local en Y, por lo que podemos suponer que Y es una variedad algebraica *afín*. Notar que, a priori, no sabemos si X es afín (a posteriori, si lo es gracias a las propiedades de morfismos finitos):

El Teorema de Grauert-Grothendieck implica que $f_*\mathscr{O}_X$ es un haz coherente en Y, donde $f_*\mathscr{O}_X \cong \widetilde{M}$ con $M = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{O}(X)$. Luego, $\mathscr{O}(X)$ es un $\mathscr{O}(Y)$-módulo finitamente generado vía $f^* : \mathscr{O}(Y) \longrightarrow \mathscr{O}(X)$ (lo que implicaría que f es un morfismo finito si supieramos que X es afín). La idea será cubrir Y por abiertos afines $V \subseteq Y$ tales que $f^{-1}(V)$ sea afín, y de tal suerte que el argumento anterior nos permita concluir:

Sea $y \in Y$ en la imagen de f, con fibra dada por $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_r\}$, y sea $f : X \overset{\iota}{\hookrightarrow} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_Y} Y$ factorización del morfismo proyectivo f.



Sea $H \subsetneq Y \times \mathbb{P}^n$ un hiperplano (vertical) tal que $\iota(x_1), \ldots, \iota(x_r) \notin H$. Dado que ι es un incrustamiento cerrado, $H \cap \iota(X)$ es cerrado en $Y \times \mathbb{P}^n$ y luego $H' := \mathrm{pr}_Y(H \cap \iota(X))$ es un cerrado en Y, puesto que f es un morfismo proyectivo. Así, $V := Y \setminus H'$ es una vecindad abierta afín de $y \in Y$, tal que $f^{-1}(V) \cong \mathrm{pr}_Y^{-1}(V) \cap \iota(X)$ es un cerrado en la variedad afín $(Y \times \mathbb{P}^n) \setminus H \cong Y \times \mathbb{A}^n$, y luego $f^{-1}(V)$ es afín. □

Corolario 4.8.13. — *Sea C una curva algebraica proyectiva irreducible, y sea $f : C \longrightarrow X$ un morfismo regular no-constante hacia X una variedad algebraica arbitraria. Entonces, f es un morfismo* finito.

Demostración. — Dado que C es proyectiva, f es un morfismo proyectivo. Luego, basta notar que las fibras son conjuntos finitos, pues en caso contrario existiría $x_0 \in X$ tal que $\dim(f^{-1}(x_0)) \geq 1$ y luego (dado que C es una *curva* irreducible) tendríamos que $f^{-1}(x_0) = C$, i.e., $f(C) = \{x_0\}$ y f constante. □

El siguiente resultado numérico, que es usualmente conocido como *fórmula de proyección* (cf. Lema 4.2.15) y que se prueba usando métodos cohomológicos. Ver [**Deb01**, §1.9] para más detalles.

Observación importante 4.8.14. — Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas *proyectivas irreducibles*, y sea $C \subsetneq X$ curva irreducible. Definimos el grado de C respecto a f como

$$d := \deg_f(C) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(C) = \{\mathrm{pt}\} \\ \deg(f|_C : C \to f(C)) & \text{si } f(C) \subseteq Y \text{ curva irreducible} \end{cases}$$

donde $\deg(f|_C) \stackrel{\mathsf{def}}{=} [k(C) : k(f(C))]$ cuenta las fibras de $f|_C$ con multiplicidad (ver Proposición 3.4.30). La **fórmula de proyección** afirma que para todo divisor de Cartier $D \in \mathrm{Div}(Y)$ en Y se tiene

$$f^*D \cdot C = \deg_f(C)(D \cdot f(C)).$$

Corolario 4.8.15. — *Sea X una variedad algebraica* proyectiva *irreducible, y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrado en rectas sin puntos de base, i.e.,*

$$\varphi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(X, L)^\vee) \cong \mathbb{P}^n \text{ es un morfismo regular.}$$

Entonces, L es amplio si y sólo si las fibras $\varphi_L^{-1}(y)$ de φ_L son conjuntos finitos.

Demostración. — En este caso, φ_L es un morfismo proyectivo pues X es una variedad proyectiva.

Luego, si las fibras de φ_L son conjuntos finitos, entonces φ_L es un morfismo finito. En tal caso, el hecho que φ_L sea finito y que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ sea amplio implica que el pullback $\varphi_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$ es amplio (ver Teorema 4.2.16).

Recíprocamente, si $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ es amplio, entonces $D \cdot C > 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$ (ver Ejemplo 4.2.17). Luego, si por contradicción existe $y_0 \in \mathbb{P}^n$ tal que $\dim(\varphi_L^{-1}(y_0)) \geq 1$, basta considerar $C \subseteq \varphi_L^{-1}(y_0)$ una curva irreducible. Por definición, se tiene que $\varphi_L(C) = \{y_0\}$ y luego, por la fórmula de proyección, tendríamos que

$$D \cdot C = \varphi_L^* H \cdot C = d(H \cdot \varphi_L(C)) = 0$$

donde $H \subseteq \mathbb{P}^n$ es un hiperplano. Esta contradicción implica que las fibras de φ_L son conjuntos finitos. $\square$

CAPÍTULO 5

DUALIDAD DE GROTHENDIECK-SERRE Y TEOREMA DE RIEMANN-ROCH

En 1955, Jean-Pierre Serre publica su artículo “*Un teorema de dualidad*” donde, usando técnicas L^2 para estudiar formas diferenciales armónicas mediante Teoría de Hodge, prueba que si E es un fibrado vectorial holomorfo en una variedad compacta compleja entonces:

$$\mathrm{H}^i(X,E) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee,$$

donde $n = \dim(X)$ y $\omega_X \overset{\mathsf{def}}{=} \det(\Omega^1_X)$ es el fibrado en rectas canónico.

El 15 de diciembre de 1955, Alexandre Grothendieck envía una carta a Serre diciendo:

> “*Pensando un poco sobre tu teorema de dualidad, me di cuenta que su generalización es más o menos evidente y que se encuentra implícitamente en tu artículo* (...).
> *Estoy muy convencido,* bastardo*, que las secciones §3 y §4 del Capítulo 3 se pueden hacer sin ningún cálculo.*”

En 1957, Grothendieck da un Seminario Bourbaki titulado “*Teoremas de dualidad para haces algebraicos coherentes*”, donde demuestra el famoso *Teorema de dualidad de Grothendieck.*

En este capítulo, comenzaremos dando las ideas principales de la demostración del Teorema de dualidad de Grothendieck, y luego lo utilizaremos para demostrar el Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch para curvas algebraicas proyectivas suaves. Finalmente, discutiremos aplicaciones geométricas de dichos resultados.

5.1. Dualidad de Grothendieck y Dualidad de Serre

Recordemos que si X es una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible, entonces $\omega_X := \det(\Omega^1_X) \in \mathrm{Pic}(X)$ es su fibrado en rectas canónico.

***Teorema 5.1.1* (Dualidad de Grothendieck). —** *Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible de* $\dim(X) = n$. *Entonces:*

(1) $\dim_k \mathrm{H}^n(X, \omega_X) = 1$. *En particular, toda aplicación k-lineal no-nula*

$$t : \mathrm{H}^n(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k$$

es un isomorfismo. Decimos que dicho t es un **morfismo de traza**, *o símplemente* una traza.

(2) *Sea $\mathscr{F}$ un haz coherente en X. Para toda traza $t : \mathrm{H}^n(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ asociamos un morfismo de functores* contravariantes *en $\mathscr{F}$*

$$D : \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \omega_X) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X, \mathscr{F})^\vee,\ f \longmapsto D(f) := t \circ \mathrm{H}^n(f),$$

donde $\mathrm{H}^n(f) : \mathrm{H}^n(X, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(X, \omega_X)$ es el morfismo en cohomología inducido por $f : \mathscr{F} \to \omega_X$. Entonces, la transformación natural

$$D : \mathrm{Hom}_X(\,\cdot\,, \omega_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(X, \,\cdot\,)^\vee$$

es un isomorfismo.

(3) *El isomorfismo D se extiende a un isomorfismo functorial en $\mathscr{F}$*

$$D : \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F})^\vee \text{ para todo } i \geq 0.$$

En particular, la elección de una traza $t : \mathrm{H}^n(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ determina un emparejamiento perfecto

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \times \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F}) \longrightarrow k.$$

***Recuerdo 5.1.2.* —** Sea X una variedad algebraica y $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-módulo. Entonces, el functor $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \,\cdot\,)$ dado por

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \,\cdot\,) : \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab},\ \mathscr{G} \longmapsto \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathscr{G})$$

es exacto por la izquierda. Del mismo modo, el functor $\mathscr{H}\!om(\mathscr{F}, \,\cdot\,)$ dado por

$$\mathscr{H}\!om(\mathscr{F}, \,\cdot\,) : \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod} \longrightarrow \mathscr{O}_X\text{-}\mathbf{Mod},\ \mathscr{G} \longmapsto \mathscr{H}\!om_X(\mathscr{F}, \mathscr{G})$$

es exacto por la izquierda. Los functores derivados asociados se denotan, respectivamente, por $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ y $\mathscr{E}\!xt^i(\mathscr{F}, \mathscr{G})$.

Además, si $\mathscr{E}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo libre de rango r (i.e., el haz de secciones de un fibrado vectorial $E \longrightarrow X$ de rango r), entonces

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{E}, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^i(X, \mathscr{E}^\vee \otimes \mathscr{F}) \text{ para todo } i \geq 0.$$

De este modo, la dualidad de Grothendieck implica:

***Teorema 5.1.3* (Dualidad de Serre). —** *Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible de* $\dim(X) = n$*, y sea* $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$*. Entonces, para todo fibrado vectorial $E \longrightarrow X$, la elección de una traza $t : \mathrm{H}^n(X, \omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ determina un emparejamiento perfecto*

$$\mathrm{H}^i(X, E) \times \mathrm{H}^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X) \longrightarrow k \text{ para todo } i \geq 0.$$

En particular, $\mathrm{H}^i(X, E) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee$*.*

Demostración. — Aplicar dualidad de Grothendieck y usar el hecho que $\mathrm{H}^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{n-i}(\mathscr{E}, \omega_X)$. □

En otras palabras, "*basta*" con probar la dualidad de Grothendieck. En esta sección, nos contentaremos con dar las ideas generales de la demostración. Más detalles pueden encontrarse en [**Vak17**, Ch. 30] y en [**Har77**, Ch. III.7].

Comencemos por describir la estrategia de la prueba. Esto nos permitirá identificar los pasos "simples" de aquellos que requieren más trabajo y/o nuevas herramientas. En todo lo que sigue, usaremos la numeración (1), (2) y (3) para referirnos a los resultados presentados en el Teorema de dualidad de Grothendieck.

Estrategia de demostración. —

Paso 1. Caso $X = \mathbb{P}^n$, donde $\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$.

Ya calculamos en el Teorema 4.2.1 que $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$, i.e., (1) se verifica para $\mathbb{P}^n$. En particular, escogiendo una traza $t : \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} k$ obtenemos (de manera functorial) un morfismo

$$D : \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee$$

para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en $\mathbb{P}^n$. □

Paso 2. En el caso $X = \mathbb{P}^n$, D es un isomorfismo.

Comencemos por notar que $\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, \omega_{\mathbb{P}^n})$ y $\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \,\cdot\,)^\vee$ definen functores *contravariantes* exactos por la izquierda, i.e., si $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ es una sucesión exacta de haces coherentes en $\mathbb{P}^n$, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{H}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n})$$

es exacta. De manera similar, y gracias al Teorema de anulación de Grothendieck, tenemos que

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{H})^\vee \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{G})^\vee \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee$$

es una sucesión exacta. Por otro lado, el Lema de Serre implica que para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en $\mathbb{P}^n$ existen $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m \gg 0$ tales que $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ es sobreyectivo. Así, las dos sucesiones exactas anteriores nos permiten escribir

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m), \omega_{\mathbb{P}^n})^{\oplus r} \\ & & \downarrow D & & \downarrow D \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee & \longrightarrow & (\mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^\vee)^{\oplus r} \end{array}$$

y reducirnos a verificar que

$$D : \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m), \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^\vee$$

es un isomorfismo, i.e., que para todo m existe un emparejamiento perfecto

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^n}) \times \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}_n}) \cong k.$$

Esto último ya fue demostrado en el Teorema 4.2.1 usando cohomología de Čech. Así, (2) se verifica para $\mathbb{P}^n$. □

Paso 3. Extender $D : \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee$ a un isomorfismo

$$D : \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathscr{F})^\vee$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Para esto último necesitamos nuevas harramientas: los *δ-functores* (también conocidos como *functores cohomológicos*) permiten probar (3) para $\mathbb{P}^n$, y con ello finalizar la demostración de la Dualidad de Grothendieck en tal caso. □

Paso 4. Caso general $X \overset{j}{\hookrightarrow} Y$, donde $Y = \mathbb{P}^{n+r}$ (i.e., $\mathrm{codim}_Y(X) = r$).

La primera observación es que para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en X tenemos (eg. gracias al Teorema de imágenes directas de Leray) que $\mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^{n-i}(Y, j_*\mathscr{F})$. Así, ya habiendo probado la Dualidad de Grothendieck en $Y = \mathbb{P}^{n+r}$, tenemos isomorfismos functoriales:

$$\mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F})^\vee \cong \mathrm{H}^{n-i}(Y, j_*\mathscr{F})^\vee \underset{\mathsf{DG}}{\cong} \mathrm{Ext}^{n+r-(n-i)}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y) = \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y).$$

Así, nos reducimos a probar el isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y).$$

Esto último es la parte más delicada de la demostración, y requiere relacionar los *haces $\mathscr{E}xt$* con los *grupos* Ext. Nos contentaremos con dar las ideas generales de cómo probarlo.

Finalmente, una vez probado que $\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F})^\vee$ para todo $i \geq 0$, notamos que:

(a) El caso $i = 0$ implica que $\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \omega_X) \cong \mathrm{H}^n(X, \mathscr{F})^\vee$, i.e., el punto (2) se verifica para X.

(b) El caso $i = 0$ y $\mathscr{F} = \omega_X$ implica que

$$\mathrm{H}^n(X, \omega_X) \cong \mathrm{Hom}(\omega_X, \omega_X)^\vee \cong \mathrm{H}^0(X, \omega_X^\vee \otimes \omega_X)^\vee \cong \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X)^\vee \cong k,$$

i.e., el punto (1) se verifica para X.

Con esto, concluímos la demostración del Teorema de Dualidad de Grothendieck para toda variedad proyectiva suave e irreducible. □

Comencemos por completar el **Paso 3** de la demostración.

Definición 5.1.4. — Un **δ-functor** entre dos categorías abelianas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ consiste en una *colección* de functores *contravariantes* $\{T^i : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ junto con morfismos de conexión $\delta^i : T^i(A) \longrightarrow T^{i+1}(C)$ para toda sucesión exacta corta $0 \to A \to B \to C \to 0$ en $\mathscr{C}$, verificando que:

(1) La sucesión en $\mathscr{D}$ dada por

$$\cdots \to T^i(C) \to T^i(B) \to T^i(A) \xrightarrow{\delta^i} T^{i+1}(C) \to T^{i+1}(B) \to T^{i+1}(A) \to \cdots$$

es exacta.

(2) Para todo morfismo de sucesiones exactas cortas en $\mathscr{C}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

el diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^i(A') & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(A) & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(C) \end{array}$$

es conmutativo.

Ejemplo importante 5.1.5. — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) = n$, y sea $\omega_X = \det(\Omega_X^1)$ el fibrado en rectas canónico. Entones, las familias de functores contravariantes

$$\{\mathscr{F} \longmapsto \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X)\}_{i\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \{\mathscr{F} \longmapsto \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F})^\vee\}_{i\in\mathbb{N}}$$

desde la categoria de $\mathscr{O}_X$-módulos a la categoría de k-espacios vectoriales, son δ-functores.

Definición 5.1.6. — Sea $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ un functor *contravariante* entre dos categorías abelianas. Decimos que F es **borrable** (en francés, *effaçable*) si:

> Para todo objeto A de $\mathscr{C}$, existe $P \xrightarrow{u} A$ morfismo sobreyectivo tal que $F(u) : F(A) \longrightarrow F(P)$ es el morfismo nulo.

Ejemplo importante 5.1.7. — En $\mathbb{P}^n$, los functores

$$\mathscr{F} \longmapsto \operatorname{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \quad \text{y} \quad \mathscr{F} \longmapsto \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{F})^\vee$$

son borrables para todo $i \geq 1$ y para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en $\mathbb{P}^n$. En efecto, el Lema de Serre nos permite encontrar $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m \gg 0$ tal que $\mathscr{P} := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r} \xrightarrow{u} \mathscr{F}$. Así, basta probar que

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m), \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^n}) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{H}^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)) = 0$$

para todo $i \geq 1$. Esto se deduce directamente de los cálculos explícitos de cohomología en $\mathbb{P}^n$ obtenidos en el Teorema 4.2.1.

Teorema 5.1.8. — *Sean S y T dos δ-functores entre categorías abelianas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. Supongamos que para todo $i \geq 1$ el functor $S^i : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es* borrable. *Entonces,*

> *Todo morfismo functorial $f^0 : S^0 \longrightarrow T^0$ se extiende en un* único *morfismo functorial $f^i : S^i \longrightarrow T^i$ compatible con los morfismos de conexión.*

Idea de demostración. — Se construye $f^i : S^i \longrightarrow T^i$ por inducción en $i \in \mathbb{N}$:

Sea A un objeto de $\mathscr{C}$ y sea $P \xrightarrow{u} A$ morfismo sobreyectivo tal que $S^{i+1}(u) = 0$. Sea $K := \ker(u)$ y consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow K \overset{j}{\hookrightarrow} P \overset{u}{\twoheadrightarrow} A \longrightarrow 0$$

en $\mathscr{C}$. Dicha sucesión exacta induce una sucesión exacta larga

$$(\star) \qquad \begin{tikzcd} S^i(A) \arrow[r, "S^i(u)"] \arrow[d, "f^i_A"'] & S^i(P) \arrow[r, "S^i(j)"] \arrow[d, "f^i_P"'] & S^i(K) \arrow[r, two heads, "\delta^i_S"] \arrow[d, "f^i_K"'] & S^{i+1}(A) \arrow[r, "S^{i+1}(u) \overset{\text{def}}{=} 0"] \arrow[d, dotted, "\exists ?\, f^{i+1}_A"] & 0 \\ T^i(A) \arrow[r, "T^i(u)"] & T^i(P) \arrow[r, "T^i(j)"] & T^i(K) \arrow[r, "\delta^i_T"] & T^{i+1}(A) & \end{tikzcd}$$

donde las filas son *exactas*. El Teorema de Freyd-Mitchell[(1)] (ver Teorema 4.4.10) implica que podemos construir $f_A^{i+1} : S^{i+1}(A) \longrightarrow T^{i+1}(A)$ de manera única usando "*cacería de diagramas*":

Sea $x \in S^{i+1}(A)$, y consideremos $y \in S^i(K)$ tal que $\delta_S^i(y) = x$. Definamos

$$f_A^{i+1}(x) := (\delta_T^i \circ f_K^i)(y) \in T^{i+1}(A).$$

Para ver que está bien definido, consideramos $y' \in S^i(K)$ tal que $\delta_S^i(y') = x$, de tal suerte que $y - y' \in \ker(\delta_S^i)$. Así, basta verificar que $(\delta_T^i \circ f_K^i)(y) = (\delta_T^i \circ f_K^i)(y')$, lo que a su vez implica que $y - y' \in \ker(\delta_T^i \circ f_K^i)$:

La inclusión $\ker(\delta_S^i) \subseteq \ker(\delta_T^i \circ f_K^i)$, así como el hecho que f^{i+1} **no** depende de A y que es functorial en A, se deducen de $(\star)$ por cacería de diagramas. El lector interesado puede referirse a [**Lan02**, Ch. XX §7] para más detalles. $\square$

Corolario 5.1.9. — *Sean S y T dos δ-functores entre categorías abelianas $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. Supongamos que los functores S^i y T^i son* borrables *para todo $i \geq 1$. Entonces,*

> *Todo isomorfismo functorial $D^0 : S^0 \xrightarrow{\sim} T^0$ se extiende a un* único *isomorfismo functorial $D^i : S^i \xrightarrow{\sim} T^i$ compatible con los morfismos de conexión para todo $i \geq 0$.*

Lo anterior nos permite concluír la demostración de la Dualidad de Grothendieck en el caso de $\mathbb{P}^n$.

Demostración del Paso 3. — El isomorfismo functorial

$$D : \mathrm{Hom}(\,\cdot\,, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\mathbb{P}^n, \,\cdot\,)^\vee$$

construído en el Paso 2 se extiende de manera única a isomorfismos functoriales

$$D : \mathrm{Ext}^i(\,\cdot\,, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n-i}(\mathbb{P}^n, \,\cdot\,)^\vee$$

para todo $i \geq 0$. Así, se verifica (3) para $\mathbb{P}^n$. $\square$

Para probar el **Paso 4**, y con ello concluir la demostración, nos resta probar que si X e Y son variedades algebraicas proyectivas suaves e irreducibles con $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = n + r$, y $j : X \hookrightarrow Y$ es un incrustamiento cerrado, entonces

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y) \text{ para todo } i \geq 0$$

y para todo haz coherente $\mathscr{F}$ en X.

[(1)]En estricto rigor, la demostración aquí presentada es válida en *categorías abelianas pequeñas*. Sin embargo, esto será suficiente para nuestros propósitos.

Recuerdo 5.1.10. — Recordemos que ω_X y ω_Y están relacionados mediante la **fórmula de adjunción** (ver Teorema 3.7.3):

$$\omega_X \cong \omega_Y|_X \otimes \det(\mathscr{N}_{X/Y}) \overset{\text{def}}{=} j^*\omega_Y \otimes \det(\mathscr{N}_{X/Y}),$$

donde $\mathscr{N}_{X/Y}$ es el fibrado normal de X en Y, de $\mathrm{rg}(\mathscr{N}_{X/Y}) = r$. Más aún, si $X = V(s)$ para cierta sección global no-nula $s \in \mathrm{H}^0(Y, E) \setminus \{0\}$ de un fibrado vectorial $E \longrightarrow Y$ de $\mathrm{rg}(E) = r$, entonces $\mathscr{N}_{X/Y} \cong E|_X$. En particular,

$$\omega_X \cong (\omega_Y \otimes \det(E))|_X \overset{\text{def}}{=} j^*(\omega_Y \otimes \det(E))$$

en este caso. Por otra parte, la **fórmula de proyección** (ver Lema 4.2.15) afirma que si $\mathscr{E}$ es un haz localmente libre en Y y si $\mathscr{F}$ es un $\mathscr{O}_X$-módulo, entonces

$$\mathscr{E} \otimes j_*\mathscr{F} \cong j_*(j^*\mathscr{E} \otimes \mathscr{F}) \text{ en } Y.$$

Al combinar ambas fórmulas, tenemos que

$$j_*\omega_X \cong j_*(j^*\omega_Y \otimes \det(\mathscr{N}_{X/Y})) \cong \omega_Y \otimes j_* \det(\mathscr{N}_{X/Y}),$$

o más simplemente $j_*\omega_X \cong \omega_Y \otimes \det(E)$ si $X = V(s)$.

Ejercicio 5.1.11. — Sea $\mathscr{E}$ un haz localmente libre en Y, y sea $\mathscr{G}$ y $\mathscr{H}$ dos $\mathscr{O}_Y$-módulos arbitrarios. Probar que para todo $i \geq 0$ se tiene que

$$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{G} \otimes \mathscr{E}^\vee, \mathscr{H}) \cong \mathscr{E}xt^i(\mathscr{G}, \mathscr{E} \otimes \mathscr{H}) \cong \mathscr{E}xt^i(\mathscr{G}, \mathscr{H}) \otimes \mathscr{E}.$$

Indicación: Las ideas usadas para probar la Proposición 4.5.8, junto con las propiedades de $\mathscr{H}om$ y el producto tensorial, permiten concluir.

En particular, el Ejercicio anterior asegura que

$$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{G}, \mathscr{O}_Y) \otimes \omega_Y \cong \mathscr{E}xt^i(\mathscr{G}, \omega_Y) \text{ para todo } i \geq 0.$$

El siguiente resultado, que asumiremos sin demostración, nos permitirá concluir.

***Lema 5.1.12* (Hecho clave).** — *Bajo las hipótesis del* Paso 4*, se tiene que*

$$\mathscr{E}xt^i(j_*\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_Y) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j_* \det(\mathscr{N}_{X/Y}) & \text{si } i = r \end{cases}$$

En particular, por el Ejercicio anterior y la fórmula de adjunción, se tiene que

$$\mathscr{E}xt^i(j_*\mathscr{O}_X, \omega_Y) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j_*\omega_X & \text{si } i = r \end{cases}$$

Veamos ahora como el **Hecho clave** permite probar que

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F},\omega_X)\cong \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F},\omega_Y)$$

y con ello concluir. Primero que todo, recordemos que (por definición) para calcular los grupos Ext necesitamos de resoluciones inyectivas $\omega_X\longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ en $\mathscr{O}_X$-**Mod** y $\omega_Y\longrightarrow \mathscr{R}^\bullet$ en $\mathscr{O}_Y$-**Mod**, respectivamente. Mediantes dichas resoluciones, se calcula

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F},\omega_X)\overset{\mathsf{def}}{=}\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathcal{I}^\bullet))\ \text{ y }\ \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F},\omega_Y)\overset{\mathsf{def}}{=}\mathrm{H}^{i+r}(\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathscr{F},\mathscr{R}^\bullet))$$

La estrategia será construir $\omega_X\longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ a partir de $\omega_Y\longrightarrow \mathscr{R}^\bullet$, y poder relacionar dichas resoluciones usando el **Hecho clave**.

Recuerdo 5.1.13. — Sea $j:X\hookrightarrow Y$ un incrustamiento cerrado entre variedades algebraicas. Entonces, hay una sucesión exacta de $\mathscr{O}_Y$-módulos

$$0\longrightarrow \mathcal{I}_X\hookrightarrow \mathscr{O}_Y\twoheadrightarrow j_*\mathscr{O}_X\longrightarrow 0$$

que permite pensar las secciones locales de $j_*\mathscr{O}_X$ como secciones locales de $\mathscr{O}_Y$ que son anuladas por el haz de ideales $\mathcal{I}_X$. De manera más general, j_* identifica $\mathscr{O}_X$-módulos con $\mathscr{O}_Y$-módulos que se anulan por $\mathcal{I}_X$.

Proposición 5.1.14. — *Sea $\omega_Y\longrightarrow \mathscr{R}^\bullet$ una resolución inyectiva en $\mathscr{O}_Y$-**Mod**, y sea $\mathscr{R}^\bullet_X\hookrightarrow \mathscr{R}^\bullet$ el subcomplejo dado por los subhaces $\mathscr{R}^i_X\subseteq \mathscr{R}^i$ de secciones locales de $\mathscr{R}^i$ que se anulan por $\mathcal{I}_X$. Entonces, $\mathcal{I}^\bullet:=j^*\mathscr{R}^\bullet_X$ es un complejo* inyectivo *en $\mathscr{O}_X$-**Mod** que cumple*

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{I}^\bullet)\cong\begin{cases}0 & \text{si } i\neq r\\ \omega_X & \text{si } i=r\end{cases}$$

Demostración. — Por definición de $\mathcal{I}^\bullet$ y de j_*, tenemos que

$$\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathscr{F},\mathscr{R}^i)\cong \mathrm{Hom}_X(\mathscr{F},\mathcal{I}^i)\text{ para todo }\mathscr{O}_X\text{-módulo }\mathscr{F}.$$

Por un lado, $\mathscr{F}\longmapsto j_*\mathscr{F}$ es un functor *exacto*, pues $j:X\hookrightarrow Y$ es un morfismo finito y luego $\mathrm{R}^pj_*=0$ para todo $p\geq 1$ (ver Ejemplo 4.8.5). Por otro lado, por definición se tiene que $\mathscr{R}^i$ es inyectivo si y sólo si el functor $\mathrm{Hom}_Y(\,\cdot\,,\mathscr{R}^i)$ es *exacto*. En particular, la composición

$$\mathrm{Hom}_Y(j_*(\,\cdot\,),\mathscr{R}^i)\cong \mathrm{Hom}_X(\,\cdot\,,\mathcal{I}^i)\text{ es un functor exacto,}$$

i.e., $\mathcal{I}^i$ es inyectivo en $\mathscr{O}_X$-**Mod**.

Finalmente, notemos que $\mathcal{I}^i\overset{\mathsf{def}}{=}\mathscr{H}\!om(\mathscr{O}_X,\mathcal{I}^i)$, y que por definición de $\mathcal{I}^\bullet$ y de j_* tenemos que

$$j^*\,\mathscr{H}\!om(j_*\mathscr{O}_X,\mathscr{R}^i)\cong \mathscr{H}\!om(\mathscr{O}_X,\mathcal{I}^i).$$

De estas dos observaciones, obtenemos que

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{I}^\bullet) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(\mathscr{H}\!om(\mathscr{O}_X, \mathcal{I}^\bullet)) \cong j^* \,\mathrm{H}^i(\mathscr{H}\!om(j_*\mathscr{O}_X, \mathscr{R}^\bullet)) \overset{\mathsf{def}}{=} j^* \,\mathscr{E}\!xt^i(j_*\mathscr{O}_X, \omega_Y)$$
$$\underset{\mathsf{Hecho}}{\cong} \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j^*(j_*\omega_X) \cong \omega_X & \text{si } i = r \end{cases}$$

donde $j^*(j_*\omega_X) \cong \omega_X$ se prueba gracias a la fórmula de proyección. □

Con la notación de la Proposición anterior, estamos en condiciones de concluir la demostración del **Paso 4**, y con ello la prueba del Teorema de Dualidad de Grothendieck.

Demostración del Paso 4. — A partir del complejo inyectivo $\mathcal{I}^\bullet$, y usando el hecho que $\mathrm{H}^i(\mathcal{I}^\bullet) = 0$ si $i \neq r$ y que $\mathrm{H}^r(\mathcal{I}^\bullet) \cong \omega_X$, obtenemos una resolución inyectiva

$$\omega_X \longrightarrow \mathscr{J}^\bullet$$

tal que $d^i_{\mathscr{J}} := d^{i+r}_{\mathcal{I}}$, i.e., consideramos una traslación en r. Luego, se tiene que

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega_X) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathscr{J}^\bullet)) \underset{\mathsf{Prop}}{\cong} \mathrm{H}^{i+r}(\mathrm{Hom}_X(\mathscr{F}, \mathcal{I}^\bullet))$$
$$\cong \mathrm{H}^{i+r}(\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathscr{F}, \mathscr{R}^\bullet)) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathscr{F}, \omega_Y),$$

de donde se concluye la demostración. □

Observación importante 5.1.15. — La demostración del **Hecho clave** es puramente algebraica, y se realiza utilizando el llamado **complejo de Koszul** asociado a la incrustación cerrada $j : X \hookrightarrow Y$.

Para más detalles, el lector interesado puede consultar [**FL85**, Ch. IV §2] para leer sobre las versiones algebraicas y geométricas del complejo de Koszul. Por otro lado, la demostración detallada del Lema 5.1.12 se puede encontrar en [**LP01**, Ch. III §6.1].

5.2. Teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas

Comencemos por recordar las nociones relevantes sobre divisores y sistemas lineales (ver Observación 3.4.25).

Recuerdo 5.2.1. — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible. Entonces, todo fibrado en rectas $L \in \mathrm{Pic}(X)$ es de la forma $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ para cierto divisor de Cartier $D \in \mathrm{Div}(X)$ que es *único módulo equivalencia lineal*, i.e., si $L \cong \mathscr{O}_X(D')$ entonces $D \sim D'$. Esto último, por definición, significa que existe $f \in k(X)^*$ función racional no-nula tal que $D - D' = \mathrm{div}(f)$.

Más aún, el hecho que X sea suave nos permite identificar divisores de Cartier con divisores de Weil en X. Explícitamente, podemos pensar a D como una suma finita formal

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot Y_i \quad \text{donde } n_i \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_i \subseteq X \text{ hipersuperficie irreducible.}$$

En particular, si $n_i \geq 0$ para todo i entonces decimos que D es un *divisor efectivo*, y escribimos $D \geq 0$ en tal caso.

El k-espacio vectorial $\mathrm{H}^0(X, L) \cong \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))$ es llamado el **espacio de Riemann-Roch** de D y, gracias al Teorema de finitud (ver Teorema 4.2.8), es de dimensión finita. Hoy en día, la dimensión de este espacio se denota por

$$\dim_k \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) := h^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \text{ o bien } h^0(X, D),$$

o incluso $h^0(D)$ si la variedad X es clara en el contexto. Sin embargo, la notación clásica para esta dimensión es $\ell(D)$.

Más aún, podemos describir explícitamente el espacio de Riemann-Roch

$$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \{f \in k(X)^* \text{ tal que } \mathrm{div}(f) + D \geq 0\},$$

así como su sistema lineal asociado

$$|D| := \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim D\}.$$

En 1857, Riemann estudia sistemas lineales de divisores en curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles (en realidad, en *superficies de Riemann compactas*). En dicho caso, un divisor es una curva C es una suma forma de la forma

$$D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i \quad \text{donde } n_i \in \mathbb{Z} \text{ y } p_i \in C \text{ es un punto,}$$

y en particular podemos considerar la función *grado* dada por

$$\deg : \mathrm{Pic}(C) \twoheadrightarrow \mathbb{Z},\ L \cong \mathscr{O}_C\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i\right) \longmapsto \deg(L) \overset{\mathsf{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} n_i.$$

En este contexto, y bajo la hipótesis que $k = \mathbb{C}$, Riemann prueba que para todo $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ se verifica la **desigualdad de Riemann**:

$$\ell(D) \geq \deg(D) - g(C) + 1,$$

donde $g(C) \overset{\mathsf{def}}{=} \dim_k \mathrm{H}^0(C, \omega_C)$ es el *género* de la curva C, y donde $\Omega_C^1 \cong \omega_C \cong \mathscr{O}_C(K_C)$ es el fibrado en rectas canónico (pues $\dim(C) = 1$).

En 1865, Gustav Roch (estudiante de Riemann) prueba que la igualdad se alcanza al considerar un "*término de corrección*":

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) - g(C) + 1,$$

obteniendo así el **Teorema de Riemann-Roch** (para $k = \mathbb{C}$).

En esta sección, probaremos el Teorema de Riemann-Roch para todo cuerpo $k = \overline{k}$ algebraicamente cerrado. Para ello, utilizaremos métodos cohomológicos que además servirán para generalizar el resultado a fibrados vectoriales de rango ≥ 2, y probar el **Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch** para curvas algebraicas.

Comencemos por reinterpretar el enunciado del Teorema de Riemann-Roch usando *dualidad de Serre.*

Recuerdo 5.2.2 **(Dualidad de Serre).** — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) = n$. Entonces, para todo fibrado vectorial $E \longrightarrow X$ tenemos que

$$\mathrm{H}^i(X, E) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee \text{ para todo } i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

donde $\omega_X \stackrel{\mathsf{def}}{=} \det(\Omega^1_X) \cong \mathscr{O}_X(K_X) \cong \Lambda^n \Omega^1_X$. En particular, tenemos las siguientes consecuencias:

(1) **Fibrados en rectas.** Si $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas en X, con $L^\vee \cong \mathscr{O}_X(-D)$, entonces la dualidad de Serre se reduce

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, \mathscr{O}_X(K_X - D))^\vee$$

para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$. En particular, las dimensiones correspondientes $h^i(X, \mathscr{O}_X(D)) = h^{n-i}(X, \mathscr{O}_X(K_X - D))$ coinciden.

(2) **Números de Hodge.** Si $E = \mathscr{O}_X$, entonces

$$\mathrm{H}^i(X, \mathscr{O}_X) \cong \mathrm{H}^{n-i}(X, \omega_X)^\vee.$$

Más generalmente, dado que $\omega_X \otimes (\Omega^{n-p}_X)^\vee \cong \Omega^p_X$ (ver Ejercicio 1.4.15) tenemos que para $p + q = n$ hay isomorfismos:

$$\mathrm{H}^q(X, \Omega^p_X) \cong \mathrm{H}^q(X, (\Omega^q_X)^\vee \otimes \omega_X) \cong \mathrm{H}^p(X, \Omega^q_X)^\vee.$$

Luego, si definimos el **número de Hodge**

$$h^{p,q}(X) := \dim_k \mathrm{H}^q(X, \Omega^p_X),$$

entonces $h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$ para todo $p, q \geq 0$ tales que $p + q = n$.

Ejemplo importante 5.2.3. — En el caso de una *curva* proyectiva suave e irreducible C, la dualidad de Serre implica que:

(1) $h^1(C, \mathscr{O}_C(D)) = h^0(C, \mathscr{O}_C(K_C - D)) \overset{\text{def}}{=} \ell(K_C - D)$.
(2) $g(C) \overset{\text{def}}{=} h^0(C, \omega_C) = h^1(C, \mathscr{O}_C)$.

Así, el término $\ell(D) - \ell(K_C - D)$ se reescribe como

$$h^0(C, \mathscr{O}_C(D)) - h^1(C, \mathscr{O}_C(D)).$$

De manera similar, el término $1 - g(C)$ se reescribe como

$$1 - h^1(C, \mathscr{O}_C) = h^0(C, \mathscr{O}_C) - h^1(C, \mathscr{O}_C)$$

pues C es una curva proyectiva irreducible.

¡Atención! — Si C es una curva algebraica proyectiva irreducible (*no necesariamente suave*), se define su **género aritmético** como

$$p_a(C) := h^1(C, \mathscr{O}_C).$$

El género aritmético está bien definido y coincide con el género geométrico $g(C)$ cuando C es una curva suave.

Definición 5.2.4. — Sea X una variedad algebraica proyectiva de $\dim(X) = n$, y sea $\mathscr{F}$ un haz coherente en X. Definimos la **característica de Euler-Poincaré** de $\mathscr{F}$ como

$$\chi(X, \mathscr{F}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathscr{F}) = h^0(X, \mathscr{F}) - h^1(X, \mathscr{F}) + \ldots + (-1)^n h^n(X, \mathscr{F}),$$

donde $h^i(X, \mathscr{F}) < +\infty$ para todo $i \geq 0$ y donde $h^i(X, \mathscr{F}) = 0$ para todo $i > \dim(X)$ gracias a los teoremas de finitud y anulación de Grothendieck, respectivamente.

¡Atención! — Con la notación anterior, el Teorema de Riemann-Roch se reduce a probar que para todo $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ se tiene que

$$\chi(C, \mathscr{O}_C(D)) = \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(D).$$

Lema 5.2.5. — *Sea X una variedad algebraica proyectiva, y sea*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de haces coherentes en X. Entonces,

$$\chi(X, \mathscr{G}) = \chi(X, \mathscr{F}) + \chi(X, \mathscr{H}).$$

Demostración. — La sucesión exacta larga en cohomología

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathscr{H}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathscr{F}) \longrightarrow \cdots$$

nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow V_1 \xhookrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_m \xrightarrow{f_m} 0 \xrightarrow{f_{m+1}} 0$$

de k-espacios vectoriales de dimensión finita. Si denotamos $d_i := \dim_k(V_i)$ y $\kappa_i := \dim_k \ker(f_i)$, entonces la exactitud y el Teorema del rango implican que $d_i = \kappa_i + \mathrm{rg}(f_i) = \kappa_i + \kappa_{i+1}$. Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(-1)^i d_i = \sum_{i=1}^{m}(-1)^i(\kappa_i + \kappa_{i+1}) &= \sum_{i=1}^{m}\Big((-1)^i\kappa_i - (-1)^{i+1}\kappa_{i+1}\Big)\\ &= -\kappa_1 - (-1)^{m+1}\kappa_{m+1} \stackrel{\mathsf{def}}{=} 0.\end{aligned}$$

Así, $0 = h^0(X,\mathscr{F}) - h^0(X,\mathscr{G}) + h^0(X,\mathscr{H}) - h^1(X,\mathscr{F}) + \cdots$, i.e., se tiene que $\chi(X,\mathscr{F}) - \chi(X,\mathscr{G}) + \chi(X,\mathscr{H}) = 0$. $\square$

En virtud del Lema anterior, necesitamos relacionar $\mathscr{O}_C(D)$ y $\mathscr{O}_C$, lo cual ya fue discutido en la Observación 3.4.25 (4).

Recuerdo 5.2.6. — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $j : D \hookrightarrow X$ una hipersuperficie *irreducible* en X (i.e., un divisor primo). Entonces, $\mathcal{I}_D \cong \mathscr{O}_X(-D)$ y en particular tenemos una sucesión exacta de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X(-D) \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow j_*\mathscr{O}_D \longrightarrow 0,$$

donde $\mathrm{H}^i(X, j_*\mathscr{O}_D) \cong \mathrm{H}^i(D,\mathscr{O}_D)$ para todo $i \geq 0$. Más generalmente, si $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot Y_i$ es un *divisor efectivo* (i.e., $n_i \geq 0$ para todo i) entonces se tiene *la misma* sucesión exacta, pero $j_*\mathscr{O}_D$ se define como el cociente de $\mathscr{O}_X$ por el ideal de funciones regulares que se anulan en Y_i con multiplicidad $\geq n_i$.

Ejemplo importante 5.2.7. — Sea C una curva proyectiva suave e irreducible, y sea $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot p_i$ un divisor efectivo, donde sólo escribimos los términos con $n_i \geq 1$. Entonces,

$$\mathrm{H}^0(D,\mathscr{O}_D) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{O}_{C,p_i}/\mathfrak{m}_{p_i}^{n_i}.$$

Luego, dado que $\dim(D) = 0$, tenemos que

$$\chi(D,\mathscr{O}_D) = h^0(D,\mathscr{O}_D) = n_1 + \ldots + n_r \stackrel{\mathsf{def}}{=} \deg(D).$$

Más aún, notamos que si $L \in \mathrm{Pic}(C)$ es un fibrado en rectas y $D = p$ es un único punto, entonces (escogiendo una vecindad U de $p \in C$ tal que $L|_U \cong \mathscr{O}_U$ está trivializado) tenemos que la *fórmula de proyección* implica

$$L \otimes \mathscr{O}_D := L \otimes j_*\mathscr{O}_D \cong j_*(j^*L \otimes \mathscr{O}_D) \cong j_*\mathscr{O}_D \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_D,$$

i.e., *todo fibrado en rectas en un punto es trivial.* Análogamente, y denotando $j_*\mathscr{O}_D$ por $\mathscr{O}_D$, tenemos que

$$L \otimes \mathscr{O}_D \cong \mathscr{O}_D$$

para todo divisor efectivo D en la curva C.

Tenemos todos los ingredientes para probar la versión clásica del Teorema de Riemann-Roch.

***Teorema 5.2.8* (Riemann-Roch).** — *Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, de género $g(C) \overset{\mathsf{def}}{=} h^0(C, \omega_C) = h^1(C, \mathscr{O}_C)$. Entonces, para todo $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ se tiene que*

$$\chi(C, \mathscr{O}_C(D)) = \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(D),$$

o equivalentemente, se tiene que

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) + 1 - g(C).$$

Demostración. — Escribamos al divisor D como diferencia de divisores *efectivos* $D = E - F$. Entonces, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(-E) \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{O}_E \longrightarrow 0$$

asociada a E, y una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(-F) \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{O}_F \longrightarrow 0$$

asociada a F. Tensorizando ambas sucesiones exactas por el fibrado en rectas $L = \mathscr{O}_C(E)$, y recordando que $L \otimes \mathscr{O}_E \cong \mathscr{O}_E$ y $L \otimes \mathscr{O}_F \cong \mathscr{O}_F$, obtenemos

$$(\star) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{O}_C(E) \longrightarrow \mathscr{O}_E \longrightarrow 0,$$

y obtenemos

$$(\star\star) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(E - F) \cong \mathscr{O}_C(D) \longrightarrow \mathscr{O}_C(E) \longrightarrow \mathscr{O}_F \longrightarrow 0.$$

La sucesión $(\star)$ implica que

$$\chi(C, \mathscr{O}_C(E)) = \chi(C, \mathscr{O}_C) + \chi(E, \mathscr{O}_E) = \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(E),$$

puesto que $\chi(E, \mathscr{O}_E) = \deg(E)$. Por otra parte, la sucesión $(\star\star)$ implica que

$$\chi(C, \mathscr{O}_C(E)) = \chi(C, \mathscr{O}_C(D)) + \deg(F).$$

Así, deducimos que

$$\begin{aligned}\chi(C, \mathscr{O}_C(D)) &= \chi(C, \mathscr{O}_C(E)) - \deg(F) \\ &= \chi(C, \mathscr{O}_C) + (\deg(E) - \deg(F)) \overset{\mathsf{def}}{=} \chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(D)\end{aligned}$$

y con ello concluímos la demostración del teorema. $\square$

Veamos algunas consecuencias directas del Teorema de Riemann-Roch.

Ejemplo importante 5.2.9. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$.

(1) Si consideramos $D = K_C$, entonces el Teorema de Riemann-Roch se reduce a

$$\ell(K_C) - \ell(0) \overset{\mathsf{def}}{=} h^0(C, \omega_C) - h^0(C, \mathscr{O}_C) = g - 1 \overset{\mathsf{RR}}{=} \deg(K_C) - g + 1.$$

Así, tenemos que

$$\deg(\omega_C) \overset{\mathsf{def}}{=} \deg(K_C) = 2g - 2.$$

En particular, $\deg(T_C) = \deg(-K_C) = 2 - 2g$.

(2) Notemos que $\ell(D) = h^0(C, \mathscr{O}_C(D)) = 0$ si $\deg(D) < 0$. En efecto, si existiera $E \geq 0$ divisor efectivo tal que $E \sim D$, entonces $\deg(D) = \deg(E) \geq 0$, una contradicción. En particular, dado que

$$\deg(K_C - D) = 2g - 2 - \deg(D),$$

tenemos que si $\deg(D) \geq 2g-1$ entonces $\ell(K_C-D) = h^1(C, \mathscr{O}_C(D)) = 0$, y en tal caso

$$\ell(D) = \deg(D) - g + 1 \geq g.$$

(3) Supongamos que $\deg(D) = 2g - 2$ pero que $D \not\sim K_C$ (i.e., no existe $f \in k(C)^*$ tal que $D - K_C = \operatorname{div}(f)$). Entonces,

$$\ell(D) = g - 1.$$

En efecto, tenemos que

$$\ell(D) \overset{\mathsf{RR}}{=} 2g - 2 - g + 1 + \ell(K_C - D) = g - 1 + \ell(K_C - D).$$

Luego, si tuvieramos que $\ell(K_C-D) \geq 1$ entonces existiría $E \geq 0$ divisor *efectivo* tal que $E \sim K_C - D$, y luego tendríamos que

$$\deg(E) = \deg(K_C - D) = 0, \text{i.e, } E = 0,$$

lo cual equivale a que $D \sim K_C$. En otras palabras, para todo divisor D tal que $\deg(D) = \deg(K_C)$ se tiene que

$$D \sim K_C \text{ si y sólo si } \ell(K_C - D) = h^1(C, \mathscr{O}_C(D)) \neq 0.$$

(4) **Curvas elípticas.** Supongamos que $\omega_C \cong \mathscr{O}_C$ es el fibrado en rectas trivial (i.e., $K_C = 0$), entonces $g \overset{\mathsf{def}}{=} h^0(C, \omega_C) = 1$. Recíprocamente, si $g = 1$ entonces $\deg(K_C) = \deg(-K_C) = 0$ gracias a (1). Así, el Teorema de Riemann-Roch se reduce a

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D).$$

En particular, si $D = -K_C$ obtenemos que

$$\ell(-K_C) = \ell(2K_C) \geq 1$$

pues si $s \in \mathrm{H}^0(C, \omega_C) \setminus \{0\}$ es no-nula, entonces $s^{\otimes 2} \in \mathrm{H}^0(C, \omega_C^{\otimes 2})$ es no-nula. En otras palabras, el fibrado en rectas canónico verifica que $h^0(C, \omega_C) \neq 0$ y $h^0(C, \omega_C^\vee) \neq 0$, y por ende $\omega_C \cong \mathscr{O}_C$ es trivial (ver Ejemplo 3.2.8). De este modo:

$$g(C) = 1 \text{ si y sólo si } \omega_C \cong \mathscr{O}_C,$$

y en tal caso decimos que C es una **curva elíptica**. El Teorema de Riemann-Roch toma una forma particularmente sencilla en este caso:

$$\ell(D) = \ell(-D) + \deg(D).$$

En particular, $\ell(D) = \deg(D)$ si $\deg(D) \geq 1$ y $\ell(D) = 0$ si $\deg(D) = 0$ y $D \not\sim 0$ (i.e., si $\mathscr{O}_C(D) \not\cong \mathscr{O}_C$).

Un importante consecuencia del Teorema de Riemann-Roch es la siguiente caracterización numérica de la amplitud.

Corolario 5.2.10. — *Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$. Entonces,*

$$L \text{ es amplio si y sólo si } \deg(L) \overset{\mathsf{def}}{=} \deg(D) > 0.$$

Demostración. — Ya hemos visto anteriormente que si L es amplio entonces $\deg(L) > 0$ (ver Observación 3.4.32). Supongamos que $\deg(D) > 0$, y notemos que por Riemann-Roch se tiene que para $m \gg 0$

$$\ell(mD) - \underbrace{\ell(K_C - mD)}_{=0} = h^0(C, \mathscr{O}_C(mD)) \overset{\mathsf{RR}}{=} m\deg(D) + 1 - g > 0.$$

Así, reemplazando L por $L^{\otimes m}$ si fuese necesario, podemos suponer que D es un divisor *efectivo*. Luego, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(-D) \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{O}_D \longrightarrow 0,$$

que al tensorizar por el fibrado en rectas $\mathscr{O}_C(mD)$, nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C((m-1)D) \longrightarrow \mathscr{O}_C(mD) \longrightarrow \mathscr{O}_D \longrightarrow 0.$$

En cohomología, obtenemos una sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C((m-1)D)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(mD)) \to \mathrm{H}^0(D, \mathscr{O}_D) \\ &\longrightarrow \mathrm{H}^1(C, \mathscr{O}_C((m-1)D)) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1(C, \mathscr{O}_C(mD)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

donde el último cero se obtiene por anulación de Grothendieck, dado que $\dim(D) = 0$. Luego, si denotamos $h_m := h^1(C, \mathscr{O}_C(mD))$ entonces

$$h_{m-1} \geq h_m \geq h_{m+1} \geq h_{m+2} \geq \cdots$$

y así, dado que $h_m < +\infty$, obtenemos que

$$\mathrm{H}^1(C, \mathscr{O}_C((m-1)D)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(C, \mathscr{O}_C(mD))$$

es un isomorfismo para todo $m \gg 0$. En otras palabras, la aplicación

$$\mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(mD)) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^0(D, \mathscr{O}_D) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathscr{O}_{C,p_i}/\mathfrak{m}_{p_i}^{n_i}$$

es sobreyectiva para todo $m \gg 0$, donde el divisor $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot p_i$ está dado por $n_i > 0$ y $p_i \in C$. En particular, el morfismo de evaluación

$$\mathrm{ev}_x : \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(mD)) \twoheadrightarrow \mathscr{O}_C(mD)_x$$

es sobreyectivo para todo $x = p_i$ tal que p_i aparece en $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot p_i$ con $n_i > 0$.

Por otra parte, si consideramos $s \in \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(mD))$ tal que $\mathrm{div}(s) = mD$, entonces $s(x) \neq 0$ para $x \neq p_1, \ldots, p_r$. En otras palabras, $M := \mathscr{O}_C(mD)$ es un fibrado en rectas *globalmente generado*, i.e., la aplicación

$$\varphi_M : C \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(C, M)^\vee) \cong \mathbb{P}^n$$

es un morfismo regular. En particular, dado que $M \ncong \mathscr{O}_C$ (pues para $m \gg 0$ podemos suponer, por Riemann-Roch, que $\ell(mD) \geq 2$) tenemos que φ_M es un morfismo no-constante. Más aún, dado que C es un curva proyectiva, se tiene que φ_M es un morfismo *finito* y por ende

$$\varphi_M^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong M \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_C(mD) \text{ es amplio.}$$

Luego, $L = \mathscr{O}_C(D)$ es amplio también. $\square$

Ejemplo 5.2.11. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$. Entonces, una consecuencia del resultado anterior y del hecho que $\deg(\omega_C) = 2g - 2$ es que la curva C es:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fano} \\ \text{Calabi-Yau} \\ \text{Can. polarizada} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \omega_C^\vee \text{ amplio} \\ \omega_C \cong \mathscr{O}_C \\ \omega_C \text{ amplio} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} g = 0 \\ g = 1 \\ g \geq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \kappa(C) = -\infty \\ \kappa(C) = 0 \\ \kappa(C) = 1 \end{array} \right\}$$

La gran ventaja del uso de métodos cohomológicos, es que podemos generalizar el Teorema de Riemann-Roch a fibrados vectoriales de rango ≥ 2.

Lema 5.2.12. — *Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $E \longrightarrow C$ un fibrado vectorial de rango* $\mathrm{rg}(E) = r$. *Entonces, E admite una* filtración *decreciente*

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_{r-1} \subseteq E_r := E$$

por sub-fibrados vectoriales $E_i \longrightarrow C$ de $\mathrm{rg}(E_i) = i$.

Demostración. — Argumentamos por inducción en $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y, dado que el resultado es cierto para $r = 1$, podemos asumir que $r \geq 2$.

Sea $C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ un incrustamiento cerrado, y recordemos que para $m \in \mathbb{Z}$ se define $\mathscr{O}_C(m) := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)|_C$. Más generalmente, definimos $E(m) := E \otimes \mathscr{O}_C(m)$.

Luego, el Lema de Serre (ver Lema 4.2.5) afirma que $E(m)$ es globalmente generado para $m \gg 0$. Por otro lado, dado que $\mathrm{rg}(E(m)) = r \geq 2 > \dim(C) = 1$, tenemos que[(2)] existe

$$s \in \mathrm{H}^0(C, E(m)) \setminus \{0\} \text{ tal que } s(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in C.$$

Gracias a la Observación 4.2.3, sabemos que dicha sección $s \in \mathrm{H}^0(C, E(m))$ determina un morfismo de $\mathscr{O}_C$-módulos

$$\varphi_s : \mathscr{O}_C \lhook\joinrel\longrightarrow E(m),$$

que resulta ser un morfismo inyectivo de fibrados vectoriales, gracias a que s no se anula nunca. Luego, tensorizando por $\mathscr{O}_C(-m)$ obtenemos una sucesión exacta de fibrados vectoriales

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(-m) \lhook\joinrel\longrightarrow E \xrightarrow{\ \pi\ }\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{Q} \longrightarrow 0.$$

Definamos entonces $E_1 := \mathscr{O}_C(-m)$ de $\mathrm{rg}(E_1) = 1$, y notemos que $\mathscr{Q} = E/E_1$ es de $\mathrm{rg}(\mathscr{Q}) = r - 1$. Luego, la hipótesis de inducción implica que existe una filtración

$$\mathscr{Q}_2 \subseteq \mathscr{Q}_3 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{Q}_{r-1} \subseteq \mathscr{Q}_r := \mathscr{Q}$$

donde $\mathrm{rg}(\mathscr{Q}) = i - 1$. Considerando los sub-fibrados

$$E_i := \pi^{-1}(\mathscr{Q}_i) \text{ de } \mathrm{rg}(E_i) = i,$$

obtenemos la filtración $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots E_{r-1} \subseteq E_r = E$ deseada. □

(2) Sea X variedad proyectiva irreducible de $\dim(X) = n$, y sea $E \to X$ un fibrado vectorial de rango r globalmente generado. Si denotamos $W = \mathrm{H}^0(X, E)$ y $w = \dim_k(W)$, entonces

$$X \times W \longrightarrow E,\ (x, s) \longmapsto s(x)$$

es un morfismo sobreyectivo de fibrados vectoriales, cuyo kernel es un sub-fibrado vectorial $\mathscr{K}$ de rango $w - r$. En particular, $\dim(\mathscr{K}) = n + w - r$. Luego, si $n < r$ entonces $p := \mathrm{pr}_2|_K : \mathscr{K} \to W$ no puede ser dominante, i.e., existe una sección $s \in W$ que no pertenece a la imagen de p, i.e., $s(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.

Definición 5.2.13. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $E \longrightarrow C$ un fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r$. Definimos el **grado** de E como el entero

$$\deg(E) := \deg(\det(E)) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \deg(\Lambda^r E),$$

donde $\det(E) \cong \Lambda^r E \in \mathrm{Pic}(C)$ es el fibrado en rectas determinante.

Con la definición anterior en mente, podemos enunciar la generalización del Teorema de Riemann-Roch. Es un caso particular (para dimensión 1) del *Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch*, probado por Friedrich Hirzebruch en 1954 y generalizado por Grothendieck en 1957.

Teorema 5.2.14 **(Hirzebruch-Riemann-Roch).** — *Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$. Entonces, para todo fibrado vectorial $E \longrightarrow C$ de $\mathrm{rg}(E) = r$ y $\deg(E) = d$, se tiene que:*

$$\chi(C, E) = \mathrm{rg}(E)\chi(C, \mathscr{O}_C) + \deg(E) = r(1 - g) + d.$$

Demostración. — Argumentamos por inducción en $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y, dado que el caso $r = 1$ corresponde al Teorema de Riemann-Roch, podemos asumir que $r \geq 2$. Consideremos una filtración

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_{r-1} \subseteq E_r := E$$

por sub-fibrados vectoriales $E_i \longrightarrow C$ de $\mathrm{rg}(E_i) = i$. Entonces, la inclusión $E_i \subseteq E_{i+1}$ induce una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow E_i \hookrightarrow E_{i+1} \twoheadrightarrow L_i \longrightarrow 0$$

de fibrados vectoriales en C, con $L_i \in \mathrm{Pic}(C)$. Así, nos reducimos a probar que para toda sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

de fibrados vectoriales en C, se tiene que el Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch para E y para Q implican la validez del mismo para F. Esto último resulta de observar que:

(a) $\mathrm{rg}(F) = \mathrm{rg}(E) + \mathrm{rg}(Q)$.
(b) $\det(F) \cong \det(E) \otimes \det(Q)$ y luego $\deg(F) = \deg(E) + \deg(Q)$.
(c) $\chi(C, F) = \chi(C, E) + \chi(C, Q)$.

Así, obtenemos el resultado deseado por inducción en r. □

5.2.1. Fibrados vectoriales en $\mathbb{P}^1$. — Una aplicación típica del Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch para curvas es estudiar *extensiones* de fibrados vectoriales.

Construcción 5.2.15. — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible, y sean E y Q fibrados vectoriales en X. Una **extensión** de Q por E es una sucesión exacta corta de fibrados vectoriales

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow E \xhookrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0.$$

Decimos que la extensión (S) **escinde**(3) (o que es trivial) si $F \cong E \oplus Q$.

Ejercicio 5.2.16. — Probar que (S) es trivial si y sólo si existe una *sección* $s : Q \longrightarrow F$ verificando $\beta \circ s = \mathrm{Id}_Q$.

Indicación: Para todo $x \in X$, cada $v \in F_x$ pertenece a $\ker(\beta)_x + \mathrm{Im}(s)_x$ puesto que $v = (v - (s \circ \beta)(v)) + (s \circ \beta)(v)$. Además, $\ker(\beta)_x \cap \mathrm{Im}(s)_x = 0$ pues $\beta(v) = 0$ y pues $s(w) = v$ implica que $0 = (\beta \circ s)(w) = w$. Dado que $E \cong \mathrm{Im}(\alpha) \cong \ker(\beta)$, y dado que $\beta \circ s = \mathrm{Id}_Q$ implica que s es inyectiva y por ende $\mathrm{Im}(s) \cong Q$, se puede concluir que $F \cong E \oplus Q$.

En el caso particular en que $Q = L \in \mathrm{Pic}(X)$ es un fibrado en rectas, tenemos la sucesión exacta tensorizada siguiente

$$(S) \otimes L^\vee \qquad 0 \longrightarrow E \otimes L^\vee \xhookrightarrow{\iota} F \otimes L^\vee \xrightarrow{\pi} \mathscr{O}_X \longrightarrow 0.$$

Luego, (S) es trivial si y sólo si existe una sección $s : \mathscr{O}_X \longrightarrow F \otimes L^\vee$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{\mathscr{O}_X}$. En virtud de la Observación 4.2.3, sabemos que lo anterior equivale a la existencia de

$$(\star) \qquad s \in \mathrm{H}^0(X, F \otimes L^\vee) \text{ tal que } \Gamma(\pi)(s) = 1 \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X).$$

Finalmente, al considerar la sucesión exacta larga en cohomología

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, F \otimes L^\vee) \xrightarrow{\Gamma(\pi)} \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(X, E \otimes L^\vee) \longrightarrow \cdots$$

y usando que $\mathrm{Im}(\Gamma(\pi)) = \ker(\delta)$, tenemos que $(\star)$ equivale a que la clase de cohomología

$$\delta_{(S)} := \delta(1) \text{ sea nula en } \mathrm{H}^1(X, E \otimes L^\vee) \cong \mathrm{Ext}^1(L, E).$$

En conclusión, la extensión (S) es trivial si y sólo si $\delta_{(S)} = 0$ en $\mathrm{H}^1(X, E \otimes L^\vee)$.

(3)En inglés, *split*.

La construcción anterior permite caracterizar completamente *todos* los fibrados vectoriales en $\mathbb{P}^1$, algo que fue observado por Grothendieck en 1957 (que extiende la *factorización de Birkhoff* de matrices, un resultado de George Birkhoff en 1909).

***Teorema 5.2.17* (Birkhoff-Grothendieck).** — *Sea* $E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ *un fibrado vectorial de* $\mathrm{rg}(E) = r$ *en* $\mathbb{P}^1$*. Entonces,*

$$E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d_r)$$

para únicos *enteros* $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_r$*.*

Demostración. — Comencemos por ilustrar el caso $r = 2$: reemplazando E por $E(m) \overset{\text{def}}{=} E \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$, y notando que $\det(E(m)) \cong \det(E) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(2m)$ dado que $r = 2$, tenemos que $\deg(E(m)) = \deg(E) + 2m$. Luego, podemos suponer que $d = \deg(E)$ es 0 o -1 (dependiendo de la paridad).

En cualquier caso, el Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch en $C \cong \mathbb{P}^1$, con $g(\mathbb{P}^1) \overset{\text{def}}{=} h^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$, implica que

$$h^0(C, E) = 2(1 - g(\mathbb{P}^1)) + d + h^1(C, E) \geq d + 2 \geq 1.$$

Luego, existe una sección no-nula $s \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, E) \setminus \{0\}$ que corresponde a un morfismo de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$-módulos $s : \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow E$, i.e., $s^\vee : E^\vee \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$.

La imagen $\mathrm{Im}(s^\vee)$ es un haz de ideales de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$, y luego

$$\mathrm{Im}(s^\vee) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-D) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)$$

para cierto $D \geq 0$ divisor efectivo de grado $k \geq 0$. En otras palabras, la aplicación $E^\vee \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)$ es *sobreyectiva*, y por ende (al dualizar nuevamente) obtenemos una sucesión exacta

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \longrightarrow E \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \longrightarrow 0, \text{ donde } a + k = d.$$

Así, la clase $\delta_{(S)}$ de la extensión es un elemento de

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k - a)) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(2k - d)) = 0 \text{ pues } 2k - d \geq -1,$$

y luego $E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d - k)$ es una suma directa.

El caso general se trata por inducción en r, y sigue las mismas ideas: si $m \gg 0$, entonces $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, E^\vee(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^1}) = 0$ gracias al Teorema de anulación de Serre aplicado al haz coherente $\mathscr{F} = E^\vee \otimes \omega_{\mathbb{P}^1}$. Luego, por Dualidad de Serre, tenemos que $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, E(-m)) = 0$.

Por otro lado, y tal como antes, el Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch nos asegura que existe un entero maximal m tal que $h^0(\mathbb{P}^1, E(-m)) \neq 0$.

Luego, podemos considerar el morfismo sobreyectivo

$$(E(-m))^{\vee} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)$$

determinado por una sección no-nula, que al dualizar nos da $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \hookrightarrow E(-m)$, y que al tensorizar nos da $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow E(-m-k)$ que corresponde a una sección no-nula de $E(-m-k)$. Por maximalidad de m, tenemos que $k = 0$ y obtenemos (tensorizando nuevamente) una sucesión exacta

$$(S) \qquad 0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

donde $Q \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i)$ por hipótesis de inducción.

Observemos que $d_i \leq m$ para todo i, pues si por ejemplo $\ell := d_1 - m - 1 \geq 0$ entonces tendríamos (tensorizando por $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-m-1)$) que

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \longrightarrow E(-m-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell) \oplus Q' \longrightarrow 0,$$

y con ello obtendríamos una sucesión exacta en cohomología

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, E(-m-1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)) \oplus \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1, Q') \longrightarrow 0$$

con $h^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = h^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0$. El hecho que $h^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)) \geq 1$ implicaría $h^0(\mathbb{P}^1, E(-m-1)) \neq 0$, contradiciendo la maximalidad de m.

Con la observación anterior en mente, consideramos la sucesión exacta dual de (S) y obtenemos una extensión

$$(S)^{\vee} \qquad 0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-d_i) \longrightarrow E^{\vee} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-m) \longrightarrow 0,$$

cuya clase asociada $\delta_{(S)^{\vee}}$ pertenece al grupo de cohomología

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \otimes Q^{\vee}) \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m-d_i)) = 0,$$

donde la última anulación se obtiene gracias a que $m - d_i \geq 0$ (ver Teorema 4.2.1). Luego, $E \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus Q$ es una suma directa de fibrados en rectas.

Finalmente, la unicidad de los enteros $d_1 \leq \cdots \leq d_r$ se deduce del hecho que podemos recuperar cada d_i a partir de las dimensiones $h^i(\mathbb{P}^1, E(m))$ para $i \in \{0,1\}$ y $m \in \mathbb{Z}$ conveniente. Los detalles de esto último se dejan como Ejercicio para el lector. □

Observación importante 5.2.18. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible tal que $C \ncong \mathbb{P}^1$, entonces es posible construir fibrados vectoriales $E \longrightarrow C$ de $\mathrm{rg}(E) = 2$ que **no** son suma directa de fibrados en rectas (ver [**Bea96**, Ch.III, p.32] para más detalles).

De manera similar, existen fibrados vectoriales en $\mathbb{P}^n$, con $n \geq 2$, que **no** son suma directa de fibrados en rectas. Una excelente referencia para esto último es [**OSS11**].

Finalmente, cabe mencionar la siguiente conjetura (abierta en el momento de escribir estas notas).

***Conjetura 5.2.19* (Hartshorne).** — *Si $n \geq 7$, entonces todo fibrado de rango 2 en $\mathbb{P}^n$ es suma directa de fibrados en rectas.*

5.3. Aplicaciones del Teorema de Riemann-Roch

En esta sección estudiaremos algunas aplicaciones geométricas del Teorema de Riemann-Roch. Comencemos por recordar la siguiente caracterización de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$, que discutimos al probar el Teorema de Abel-Jacobi (ver Teorema 3.4.31).

Recuerdo 5.3.1. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible. Entonces, el morfismo de grupos

$$\deg : \operatorname{Pic}(C) \twoheadrightarrow \mathbb{Z},\ L \cong \mathscr{O}_C\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i\right) \longmapsto \deg(L) \overset{\mathsf{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} n_i$$

está bien definido y es sobreyectivo. Además, por definición, deg es inyectivo si y sólo si para todo par de puntos distintos $p, q \in C$, el hecho que $\deg \mathscr{O}_C(p-q) = 0$ implica que $p \sim q$. Mejor aún, el Teorema de Abel-Jacobi implica que deg es inyectivo si y sólo si $C \cong \mathbb{P}^1$.

Proposición 5.3.2. — *Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, entonces $g(C) = 0$ si y sólo si $C \cong \mathbb{P}^1$.*

Demostración. — Si $C \cong \mathbb{P}^1$ entonces $\omega_{\mathbb{P}^1} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ y luego se tiene que $g(\mathbb{P}^1) \overset{\mathsf{def}}{=} h^0(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}) = 0$.

Recíprocamente, si $g(C) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathrm{H}^0(C, \omega_C) = 0$ entonces el Teorema de Riemann-Roch se reduce a

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) \overset{\mathsf{RR}}{=} \deg(D) + 1 - g = \deg(D) + 1$$

para todo divisor D en la curva C. Así, si $p, q \in C$ son puntos distintos y definimos $D := p - q$ con $\deg(D) = 0$ y $\deg(K_C - D) = 2g - 2 - \deg(D) = -2 < 0$, entonces tenemos que $\ell(K_C - D) = 0$.

Luego, $\ell(D) = 1$ y por ende el sistema lineal asociado

$$|D| = \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim D\} \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1} \cong \{\mathrm{pt}\}$$

consiste en un único divisor efectivo, i.e., $E = 0$ y por ende $p - q \overset{\text{def}}{=} D \sim E = 0$. Así, $p \sim q$ y por ende $C \cong \mathbb{P}^1$ gracias al Teorema de Abel-Jacobi. $\square$

Nuestro siguiente objetivo será obtener criterios numéricos que nos aseguren que un fibrado en rectas en una curva algebraica sea *globalmente generado* o *muy amplio*. Para ello, recordemos la terminología relevante.

Terminología 5.3.3. — Sea X una variedad algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot Y_i$ un divisor de Weil en X. Definimos el **soporte** de D como el cerrado

$$\operatorname{Supp}(D) := \bigcup_{i=1}^r Y_i \subseteq X.$$

Por otro lado, dada una hipersuperficie irreducible $Y \subseteq X$ definimos la **multiplicidad** de Y en D como

$$\operatorname{mult}_Y(D) := \begin{cases} n_i & \text{si } Y = Y_i \text{ para cierto } i \in \{1, \ldots, r\} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Finalmente, recordemos que el **sistema lineal** asociado a D está dado por

$$|D| := \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D)) \cong \{E \geq 0 \text{ divisor efectivo tal que } E \sim D\}.$$

Luego, definimos el **lugar de base** del divisor D como el lugar de base de $\mathscr{O}_X(D) \in \operatorname{Pic}(X)$. Explícitamente,

$$\begin{aligned} \operatorname{Bs}(D) &:= \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0 \text{ para toda } s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(D))\} \\ &\overset{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } x \in \operatorname{Supp}(E) \text{ para todo } E \geq 0 \text{ efectivo tal que } E \sim D\} \\ &\overset{\text{def}}{=} \bigcap_{E \in |D|} \operatorname{Supp}(E). \end{aligned}$$

Luego, el fibrado en rectas $L \cong \mathscr{O}_X(D)$ es **globalmente generado**, i.e.,

$$\varphi_L : X \longrightarrow |D| \cong \mathbb{P}^{h^0(D)-1} \text{ es un morfismo regular,}$$

si y sólo si $\operatorname{Bs}(D) = \emptyset$. Más aún, gracias al Corolario 3.3.11, sabemos que L es **muy amplio** (i.e., φ_L define un incrustamiento cerrado) si y sólo si

(a) L **separa puntos**, i.e., para todo par de puntos distintos $x, y \in X$, existe una sección $s \in \mathrm{H}^0(X, L)$ tal que $s(x) = 0$ y $s(y) \neq 0$.

(b) L **separa tangentes**, i.e., para todo $x \in X$ y todo vector tangente $v \in T_x X$ existe una sección $s \in \mathrm{H}^0(X, L)$ tal que $s(x) = 0$ y $(d_x s)(v) \neq 0$.

En el caso de curvas algebraicas, podemos dar una caracterización mucho más precisa.

Proposición 5.3.4. — *Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ un fibrado en rectas. Entonces:*

(1) *L es globalmente generado si y sólo si $\ell(D-p) = \ell(D) - 1$ para todo punto $p \in C$.*

(2) *L es muy amplio si y sólo si $\ell(D-p-q) = \ell(D) - 2$ para todo par de puntos $p, q \in C$* (no necesariamente distintos)*.*

Demostración. — Para (1), consideramos un punto $p \in C$ y consideramos la sucesión exacta asociada

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(-p) \longrightarrow \mathscr{O}_C \longrightarrow \mathscr{O}_p \longrightarrow 0.$$

Al tensorizar por $\mathscr{O}_C(D)$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_C(D-p) \longrightarrow \mathscr{O}_C(D) \longrightarrow \mathscr{O}_p \longrightarrow 0$$

que induce en cohomología la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(D-p)) \xhookrightarrow{\alpha} \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(D)) \xrightarrow{\beta} k.$$

Así, $\ell(D) \overset{\text{def}}{=} h^0(C, \mathscr{O}_C(D)) = \dim_k \ker(\beta) + \mathrm{rg}(\beta) = \ell(D-p) + b$, con $b = \mathrm{rg}(\beta) \in \{0, 1\}$. Luego,

$$(\star) \qquad \ell(D-p) = \ell(D) \text{ o bien } \ell(D) - 1.$$

Por otro lado, la aplicación

$$\psi_p : |D-p| \cong \mathbb{P}^{\ell(D-p)-1} \hookrightarrow |D| \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1}, \ E \longmapsto E + p$$

es inyectiva para todo $p \in C$. Así, $\ell(D-p) = \ell(D)$ si y sólo si ψ_p es sobreyectiva, y esto último equivale (¡por definición!) a que para todo divisor efectivo $E \geq 0$ tal que $E \sim D$ se tiene que $p \in \mathrm{Supp}(E)$, i.e., $p \in \mathrm{Bs}(D)$. De lo anterior, deducimos que D es globalmente generado si y sólo si $\ell(D-p) = \ell(D) - 1$ para todo $p \in C$.

Para probar (2), primero notamos que podemos asumir que (1) se verifica. En efecto, si L es muy amplio entonces es globalmente generado, y si se cumple que $\ell(D-p-q) = \ell(D) - 2$ para todo par de puntos $p, q \in C$ entonces el mismo cálculo $(\star)$ implica que

$$\ell(D) - 2 = \ell(D-p-q) = \ell(D-p) \text{ o bien } \ell(D-p) - 1,$$

por lo que necesariamente se tiene que $\ell(D-p)=\ell(D)-1$ para todo $p\in C$. En particular, $L\cong \mathscr{O}_C(D)$ define un morfismo regular

$$\varphi_L : C \longrightarrow |D| \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1} \text{ donde } \ell(D)=\ell(D-p-q)+2\geq 2,$$

y que es no-constante (pues $\ell(D)\geq 2$). Para probar que φ_L es un incrustamiento cerrado (i.e., que L es muy amplio) debemos verificar que:

(a) L separa puntos, i.e., para todo par de puntos *distintos* $p,q\in C$ existe un divisor efectivo $E\geq 0$ tal que $E\sim D$, con $p\in \operatorname{Supp}(E)$ y $q\notin \operatorname{Supp}(E)$. Esto equivale a que q **no** es un punto de base de $|D-p|$ y, por (1), equivale a su vez a que

$$\ell((D-p)-q)=(\ell(D)-1)-1)=\ell(D)-2.$$

(b) L separa tangentes, i.e., para todo punto $p\in C$ existe un divisor efectivo $E\geq 0$ tal que $E\sim D$, con $p\in\operatorname{Supp}(E)$ pero $\operatorname{mult}_p(E)=1$. Esto equivale a que p **no** es un punto de base de $|D-p|$ y, por (1), equivale a su vez a que $\ell(D-2p)=\ell(D)-2$.

En otras palabras, ambas condiciones están aseguradas por la condición $\ell(D-p-q)=\ell(D)-2$. □

El Teorema de Riemann-Roch motiva a hacer la siguiente distinción entre divisores.

Definición 5.3.5. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea $L\cong\mathscr{O}_C(D)$ un fibrado en rectas. Decimos que D (o que L) es un **divisor especial** si

$$\ell(K_C-D)>0 \text{ o, equivalentemente, } h^1(C,\mathscr{O}_C(D))>0.$$

En caso contrario (i.e., si $h^1(C,\mathscr{O}_C(D))=0$) decimos que D es un **divisor no-especial**, y en tal caso se tiene que

$$\ell(D)\overset{\mathsf{RR}}{=}\deg(D)+1-g(C).$$

Ejemplo 5.3.6. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible, y sea D un divisor en C. Entonces, el Ejemplo 5.2.9 (2) señala que si $\deg(D)\geq 2g(C)-1$ entonces D es no-especial. De manera similar, el Ejemplo 5.2.9 (3) señala que un divisor D de $\deg(D)=2g-2$ verifica $D\sim K_C$ si y sólo si D es especial.

El siguiente criterio numérico es muy útil en la práctica para construir incrustamientos de curvas algebraicas en espacios proyectivos.

Corolario 5.3.7. — *Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$, y sea $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ un fibrado en rectas. Entonces,*

(1) *Si* $\deg(D) \geq 2g$, *entonces L es globalmente generado.*
(2) *Si* $\deg(D) \geq 2g + 1$, *entonces L es muy amplio.*

Demostración. — Sean $p, q \in C$. En el caso (1), tanto D como $D - p$ son no-especiales, y luego

$$\ell(D) \overset{\mathsf{RR}}{=} \deg(D) + 1 - g \text{ y } \ell(D-p) \overset{\mathsf{RR}}{=} \deg(D-p) + 1 - g = (\deg(D) + 1 - g) - 1,$$

i.e., $\ell(D - p) = \ell(D) - 1$ para todo $p \in C$, y por ende L es globalmente generado.

En el caso (2), los divisores D, $D - p$ y $D - p - q$ son no-especiales, y el mismo cálculo muestra que en tal caso $\ell(D - p - q) = \ell(D) - 2$ para todo par de puntos $p, q \in C$, y por ende L es muy amplio. $\square$

Ejemplo 5.3.8. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = 0$. Entonces, L es amplio si y sólo si L es muy amplio, y esto equivale a su vez a que $\deg(L) > 0$.

Dado que $g(C) = 0$ si y sólo si $C \cong \mathbb{P}^1$, lo anterior se condice con el hecho que $L \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ para cierto $d \in \mathbb{Z}$, y que dicho fibrado en rectas es muy amplio si y sólo si $d > 0$ (en cuyo caso el morfismo asociado coincide con el incrustamiento de Veronese).

Antes de poder dar más ejemplos en curvas de género ≥ 1, necesitamos definir la noción de *grado* de una variedad proyectiva X. Es muy importante señalar que dicha noción *depende* del incrustamiento $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$.

Recuerdo 5.3.9. — Sea $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva, y sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces, $\mathscr{O}_X(m)$ es el fibrado en rectas en X dado por

$$\mathscr{O}_X(m) := j^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \overset{\mathsf{def}}{=} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)|_X.$$

Más generalmente, si $\mathscr{F}$ es un haz coherente en X entonces escribimos $\mathscr{F}(m) := \mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_X(m)$. En particular, el Teorema de anulación de Serre implica que la función

$$h_{\mathscr{F}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ m \longmapsto \chi(X, \mathscr{F}(m)) \overset{\mathsf{def}}{=} \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathscr{F}(m))$$

verifica que $h_{\mathscr{F}}(m) = h^0(X, \mathscr{F}(m))$ para todo $m \gg 0$. Decimos que $h_{\mathscr{F}}$ es la **función de Hilbert** de $\mathscr{F}$ respecto al incrustamiento $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$.

Lema 5.3.10. — *Sea $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva, y sea $\mathscr{F}$ un haz coherente en X. Entonces, $h_{\mathscr{F}}(m) \in \mathbb{Q}[m]$ es una función* polinomial *con coeficientes racionales.*

Idea de demostración. — Dado que $\mathrm{H}^i(X, \mathscr{F}(m)) \cong \mathrm{H}^i(\mathbb{P}^n, (j_*\mathscr{F}) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$ para todo $i \geq 0$, basta suponer que $X = \mathbb{P}^n$ y probar el resultado por inducción en $n \in \mathbb{N}$:

Si $n = 0$, entonces $\mathscr{F}(m) = \mathscr{F}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ y luego $h_{\mathscr{F}}(m)$ es una función constante. Para simplificar los cálculos, supongamos que $\mathscr{F}$ es localmente libre (este será el caso que nos interesará después; el caso general es similar). En tal caso, consideramos la sucesión exacta corta asociada al hiperplano $\iota : H \cong \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathscr{O}_H \longrightarrow 0,$$

y tensorizamos por el *haz localmente libre* $\mathscr{F}(m)$ para obtener la sucesión exacta siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}(m-1) \longrightarrow \mathscr{F}(m) \longrightarrow \mathscr{F}_H(m) \longrightarrow 0,$$

donde $\mathscr{F}_H := \mathscr{F}|_H$ es un haz coherente en $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Luego,

$$\chi(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(m)) = \chi(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(m-1)) + \chi(H, \mathscr{F}_H(m)),$$

i.e., $h_{\mathscr{F}}(m) - h_{\mathscr{F}}(m-1) = h_{\mathscr{F}_H}(m)$. Por hipótesis de inducción, $h_{\mathscr{F}_H}(m)$ es un polinomio en la variable m con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

Luego de limpiar denominadores, nos reducimos a probar que si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es una función tal que $g(m) := f(m) - f(m-1)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$, entonces f también. Dejamos esto último como Ejercicio al lector (para más detalles, ver [**Har77**, Ch. I Prop. 7.3]). $\square$

Definición 5.3.11. — Sea $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva irreducible de $\dim(X) = n$. El **polinomio de Hilbert** de la variedad X respecto al incrustamiento $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ es

$$h_X(m) := h_{\mathscr{O}_X(1)}(m) \overset{\mathsf{def}}{=} \chi(X, \mathscr{O}_X(m)).$$

El **grado** de X es $n!$ veces el coeficiente principal de $h_X(m)$, y se denota $\deg(X)$.

Ejemplo 5.3.12. — Usando los valores conocidos de $h^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$ calculados en el Teorema 4.2.1 se verifica directamente que

$$h_{\mathbb{P}^n}(m) \overset{\mathsf{def}}{=} \chi(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \binom{n+m}{n} = \frac{m^n}{n!} + \cdots$$

y en particular $\deg(\mathbb{P}^n) = 1$.

Ejercicio 5.3.13. — Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie definida por un polinomio homogéneo no-nulo de grado d. Probar que

$$h_X(m) = \binom{n+m}{n} - \binom{n+m-d}{n} = \frac{dm^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

y por ende $\deg(X) = d$.
Indicación: Considerar la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-d) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathscr{O}_X, \longrightarrow 0$$

y seguir las ideas de la demotración del Lema anterior.

Ejemplo importante 5.3.14. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$, y sea $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ un fibrado en rectas *muy amplio*, i.e.,

$$\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

es un incrustamiento cerrado, donde $n \overset{\mathsf{def}}{=} \ell(D) - 1$. Entonces, dado que $\mathscr{O}_C(1) \overset{\mathsf{def}}{=} \varphi_L^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$ y por ende calculamos

$$\begin{aligned} h_C(m) &\overset{\mathsf{def}}{=} \chi(C, \mathscr{O}_C(m)) = \chi(C, L^{\otimes m}) = \chi(C, \mathscr{O}_C(mD)) \\ &\overset{\mathsf{RR}}{=} \deg(mD) + 1 - g = \deg(D) \cdot m + 1 - g \end{aligned}$$

es el polinomio de Hilbert de C respecto a L. En particular,

$$\deg_L(C) := \deg(\varphi_L(C)) = \deg(D).$$

Además, el Teorema de Bertini implica que en términos geométricos $\deg(\varphi_L(C))$ coincide con la cantidad de puntos en la intersección $\varphi_L(C) \cap H$, donde $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ es un hiperplano general en $\mathbb{P}^n$.

Un caso particular importante es cuando C es una *curva elíptica* (i.e., $g(C) = 1$, lo que equivale a que $\omega_C \cong \mathscr{O}_C$). Si $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ es un fibrado en rectas con $\deg(D) = 3$ (e.g. $D = p+q+r$) entonces L es muy amplio, pues $\deg(D) = 3 \geq 2g + 1$ en tal caso.

Además, D es no-especial y por ende $\ell(D) \stackrel{\mathsf{RR}}{=} \deg(D) = 3$. Así, L define un incrustamiento cerrado

$$\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$$

donde la curva imagen tiene grado $\deg(\varphi_L(C)) = \deg(D) = 3$. Así,

Toda curva elíptica es isomorfa a una cúbica en $\mathbb{P}^2$.

Notar además que en una curva elíptica C, un fibrado en rectas $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ es muy amplio si y sólo si $\deg(D) \geq 3$. En efecto, si $\deg(D) = 1$ entonces $\ell(D) = 1$ y luego $\mathbb{P}^{\ell(D)-1} \cong \{\mathrm{pt}\}$. Del mismo modo, si $\deg(D) = 2$ entonces $\ell(D) = 2$ y basta notar que

$$\varphi_L : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

no puede ser un incrustamiento cerrado, pues $g(C) = 1 \neq 0 = g(\mathbb{P}^1)$.

Ejemplo 5.3.15. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$.

(1) Si $g = 2$, todo fibrado en rectas $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ con $\deg(D) \geq 5 = 2g + 1$ es muy amplio. Además, si $\deg(D) = 5$ entonces $\ell(D) \stackrel{\mathsf{RR}}{=} 5 + 1 - 2 = 4$. Así, toda curva de género 2 es isomorfa a una curva de grado 5 en $\mathbb{P}^3$.

(2) En general, el criterio $\deg(D) \geq 2g + 1$ **no** es óptimo. Por ejemplo, si $C \subseteq \mathbb{P}^2$ es una curva plana de grado 4, entonces $\mathscr{O}_C(1)$ es muy amplio de $\deg(\mathscr{O}_C(1)) = 4$. Sin embargo, la fórmula de Plücker

$$g(C_d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

implica para $d = 4$ que $g(C) = 3$, y luego $2g + 1 = 7 > 4$.

Finalmente, terminemos por dar algunas consecuencias geométricas importantes de lo que hemos discutido en esta sección.

5.3.1. Curvas hiperelípticas.

— Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$. Si $g = 0$, entonces $C \cong \mathbb{P}^1$ y $|K_C| = \emptyset$, mientras que si $g = 1$ entonces $|K_C|$ es un punto y en particular la *aplicación canónica*

$$\varphi_{\omega_C} : C \longrightarrow \mathbb{P}\,\mathrm{H}^0(C, \omega_C)^\vee$$

es constante.

Lema 5.3.16. — *Supongamos que $g \geq 2$, entonces el fibrado en rectas canónico $\omega_C \cong \mathscr{O}_C(K_C)$ es* globalmente generado.

Demostración. — Basta verificar que $\ell(K_C - p) = \ell(K_C) - 1$ para todo punto $p \in C$. Sabemos que en general se tiene que

$$\ell(K_C - p) = \ell(K_C) \text{ o bien } \ell(K_C) - 1,$$

por lo que supondremos por contradicción que $\ell(K_C - p) = \ell(K_C) \overset{\text{def}}{=} g$. Entonces, el Teorema de Riemann-Roch aplicado al divisor $D = p$ señala que

$$\ell(D) - \ell(K_C - p) = \ell(D) - g \overset{\text{RR}}{=} \deg(D) + 1 - g = 2 - g,$$

y luego $\ell(D) = 2$. Por otro lado, para todo par de puntos $q, r \in C$ tenemos que $\deg(D - q - r) = -1 < 0$ y por ende $\ell(D - q - r) = 0 = \ell(D) - 2$, por lo que tendríamos que $L \cong \mathscr{O}_C(D)$ es muy amplio. En tal caso, el morfismo

$$\varphi_L : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$$

sería un *isomorfismo*, lo cual es una contradicción con la hipótesis $g \geq 2$. $\square$

***Terminología 5.3.17* (Max Noether, 1883).** — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible. Un g_d^r en C es un par (L, M) donde $L \cong \mathscr{O}_C(D) \in \operatorname{Pic}(C)$ es un fibrado en rectas con $\deg(L) = d$, y $M \subseteq \mathrm{H}^0(C, L)$ es un sistema lineal globalmente generado de $\dim_k(M) = r + 1$, que define

$$\varphi_M : C \longrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^r.$$

En particular, el hecho algebraico discutido en la Proposición 3.4.29 señala que si $r \geq 1$, entonces $\deg(\varphi_M) = d$.

Definición 5.3.18. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible. Decimos que C es una **curva hiperelíptica** si posee un g_2^1, i.e., si existe un morfismo regular

$$f : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

de $\deg(f) = 2$.

Ejemplo 5.3.19. — Si $g(C) = 2$, entonces $\deg(\omega_C) = 2g - 2 = 2$ y $\dim_k \mathrm{H}^0(C, \omega_C) \overset{\text{def}}{=} 2 = 1 + 1$, i.e., *toda* curva de género 2 es hiperelíptica y la aplicación canónica

$$\varphi_{\omega_C} : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

es de $\deg(\varphi) = \deg(\omega_C) = 2$.

Teorema 5.3.20. — *Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g \geq 2$. Entonces, el fibrado en rectas canónico $\omega_C \cong \mathscr{O}_C(K_C)$ es* muy amplio *si y sólo si C* **no** *es hiperelíptica.*

Demostración. — Recordemos que ω_C es muy amplio si y sólo si para todo par de puntos $p, q \in C$ se tiene que $\ell(K_C - p - q) = \ell(K_C) - 2$. Más aún, sabemos que

$$\ell(K_C - p - q) = \ell(K_C) - 2 \text{ o bien } \ell(K_C) - 1,$$

donde $\ell(K_C) \stackrel{\mathsf{def}}{=} g$. El Teorema de Riemann-Roch aplicado al divisor $D = p + q$ implica que

$$\ell(D) - \ell(K_C - p - q) \stackrel{\mathsf{RR}}{=} \deg(D) + 1 - g = 3 - g,$$

y por ende $\ell(D) = 1$ o bien $\ell(D) = 2$. Así, nos reducimos a determinar si existe o no $D = p + q$ tal que $\ell(D) = 2$, pues es el único caso en que ω_C **no** es muy amplio:

Si C posee un g_2^1 (i.e., si C es hiperelíptica) dado por (L, M) con $M \subseteq \mathrm{H}^0(C, L)$, entonces cualquier sección no-nula $s \in M \setminus \{0\}$ determina un divisor efectivo $E = \mathrm{div}(s) \geq 0$ con $\deg(E) = \deg(L) \stackrel{\mathsf{def}}{=} 2$, i.e., $E = p_0 + q_0$ para cierto par de puntos $p_0, q_0 \in C$. Además, por definición de g_2^1 se tiene que $\ell(E) \geq 2$ en tal caso, y por ende ω_C **no** es muy amplio.

Recíprocamente, si existe un divisor $D = p + q$ tal que $\ell(D) = 2$, entonces el par $(\mathscr{O}_C(D), \mathrm{H}^0(C, \mathscr{O}_C(D)))$ es un g_2^1 en C puesto que $\deg(D) = 2$ y $|D| \cong \mathbb{P}^1$, i.e., C es una curva hiperelíptica. □

5.3.2. Espacio de moduli de curvas. — La discusión de la subsección anterior motiva la siguiente definición.

Definición 5.3.21. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g \geq 3$ tal que C **no** es hiperelíptica (i.e., ω_C es muy amplio). Entonces, el incrustamiento cerrado

$$\varphi_C := \varphi_{\omega_C} : C \hookrightarrow |K_C| \cong \mathbb{P}^{g-1}$$

es llamado el **incrustamiento canónico** de C, el cual es único módulo cambio de coordenadas en $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{g-1}) \cong \mathrm{PGL}_g(k)$. La curva imagen $\varphi_C(C) \subseteq \mathbb{P}^{g-1}$ es de $\deg(\varphi_C(C)) = 2g - 2$, y es llamada una **curva canónica** en $\mathbb{P}^{g-1}$.

Una modificación de lo anterior nos permite construir un *espacio de moduli* (noción introducida por Riemann, donde la palabra *moduli* se debe entender como *parámetros*) que permite parametrizar curvas de un género dado.

Construcción 5.3.22. — Sea C una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g \geq 2$. Entonces,

$$\deg(3K_C) = 6g - 6 \geq 2g + 1$$

y luego $L = \omega_C^{\otimes 3}$ es un fibrado en rectas muy amplio. Más aún, dado que

$$\ell(3K_C) \overset{\mathsf{RR}}{=} (6g-6) + 1 - g = 5g - 5$$

tenemos que L determina un incrustamiento cerrado

$$\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^{5g-6},$$

cuya imagen $C_{\mathrm{tri}} := \varphi_L(C)$ es una curva de grado $6g-6$ en $\mathbb{P}^{5g-6}$, que llamamos usualmente una **curva tricanónica**. Cabe destacar que

$$\begin{aligned} P(m) := h_{C_{\mathrm{tri}}}(m) &\overset{\mathsf{def}}{=} \chi(C_{\mathrm{tri}}, \mathscr{O}_{C_{\mathrm{tri}}}(m)) = \chi(C, \mathscr{O}_C(3mK_C)) \\ &\overset{\mathsf{RR}}{=} 3m(2g-2) + 1 - g = (6m-1)(g-1). \end{aligned}$$

Esto último es muy importante para construir el **espacio de móduli** $\mathfrak{M}_g$, que es una variedad singular[4] cuyos puntos parametrizan clases de isomorfismo de curvas proyectivas suaves irreducibles de género g fijo:

El primer ingrediente clave es la existencia (probada por Grothendieck en 1961) de un **esquema de Hilbert** $\mathscr{H} := \mathrm{Hilb}^P(X)$ que parametriza subvariedades Z de $X := \mathbb{P}^{5g-6}$ con polinomio de Hilbert $h_Z = P$ *fijo*, y que un abierto $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{H}$ parametriza las curvas *suaves e irreducibles* en X. El segundo ingrediente clave es la *Teoría Geométrica de Invariantes*[5], introducida por Mumford en 1965, que permite resolver subsanar la ambiguedad proveniente de cambios de coordenadas y construir el cociente $\mathfrak{M}_g := \mathscr{U} / \mathrm{PGL}_{5g-5}$.

Utilizando estas ideas, Deligne y Mumford construyen en [**DM69**] una compactificación *proyectiva e irreducible* $\overline{\mathfrak{M}_g}$ del espacio de moduli $\mathfrak{M}_g$, y estudian sus propiedades. Por ejemplo, usando Teoría de la deformación (ver [**Har10**]) se prueba que

$$\dim_{[C]}(\mathfrak{M}_g) = h^1(C, T_C),$$

y por dualidad de Serre se calcula $h^1(C, T_C) = h^0(C, \omega_C^{\otimes 2}) \overset{\mathsf{RR}}{=} 3g - 3$. Cabe señala que el hecho que $\mathfrak{M}_g$ debiese ser de dimensión $3g-3$ fue algo predicho por Riemann en 1857. Para más detalles en la construcción de $\mathfrak{M}_g$, recomiendo las notas expositivas [**Edi00**].

5.3.3. Teorema de Riemann-Hurwitz. — Para concluir, veamos una fórmula muy útil para relacionar la geometría de dos curvas algebraicas.

---

(4) En realidad, es un *stack*.

(5) En inglés, Geometric Invariant Theory (GIT).

Sean X e Y dos curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles, y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular no-constante. La *fórmula de Riemann-Hurwitz* busca relacionar los fibrados en rectas canónicos de X e Y. Para ello, recordemos (ver Observación 3.6.3) que el fibrado cotagente relativo se define mediante

$$f^*\omega_Y \xrightarrow{\alpha} \omega_X \longrightarrow \Omega^1_f \longrightarrow 0,$$

y se tiene exactitud por la izquierda cuando f es un morfismo suave (i.e., étale en este caso, pues f es un morfismo finito). Al tensorizar el morfismo α por $(f^*\omega_Y)^\vee$ obtenemos

$$\mathscr{O}_X \longrightarrow \omega_X \otimes (f^*\omega_Y)^\vee$$

que corresponde a una sección global $s \in \mathrm{H}^0(X, \omega_X \otimes (f^*\omega_Y)^\vee)$.

Construcción 5.3.23. — Supongamos que f es un **morfismo separable**, i.e., la extensión de cuerpos $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ es separable (e.g. $\mathrm{car}(k) = 0$).

En tal caso, la demostración del Teorema de suavidad genérica (cf. Lema 2.14.7) implica que existe un abierto no-vacío $U \subseteq X$ tal que $f|_U : U \longrightarrow Y$ es étale, i.e., $\alpha|_U$ es un morfismo inyectivo de fibrados en rectas (y es por ende un isomorfismo). En otras palabras, $s|_U$ no se anula en U y en particular $s \neq 0$.

Definimos el **divisor de ramificación** de f como el divisor efectivo obtenido mediante

$$\mathscr{O}_X(\mathrm{Ram}_f) := \mathscr{O}_X(\mathrm{div}(s)) \cong \omega_X \otimes (f^*\omega_Y)^\vee.$$

En particular, $\Omega^1_f \cong f^*(\omega_Y) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Ram}_f}$. Así, para cada punto $p \in X$ el coeficiente en Ram_f es igual a la dimensión[(6)] del tallo $(\Omega^1_f)_p$.

Para calcular dichos coeficientes, consideramos parámetros locales $u \in \mathscr{O}_{Y,f(p)}$ y $v \in \mathscr{O}_{X,p}$. Luego, el pullback de gérmenes

$$f^* : \mathscr{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,p}$$

verifica $f^*(u) = v^e w$ para cierto elemento *invertible* $w \in \mathscr{O}_{X,p}$ y cierto entero positivo $e := e_p(f) \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ llamado el **índice de ramificación** de f en $p \in X$.

Dado que dv genera el $\mathscr{O}_{X,p}$-módulo $\omega_{X,p}$ y que du genera el $\mathscr{O}_{Y,f(p)}$-módulo $\omega_{Y,f(p)}$, la sucesión exacta que define a Ω^1_f implica que la dimensión de $(\Omega^1_f)_p$ es el menor entero no-negativo m tal que $\alpha(du)$ pertene a $\langle v^m \rangle \cdot dv$. Así, dado que $f^*(u) = v^e w$ podemos calcular

$$\alpha(du) \overset{\mathsf{def}}{=} d(f^*(u)) = d(v^e w) = e v^{e-1} w \; dv + v^e \; dw.$$

(6) En estricto rigor, es el *largo* como módulo.

Así, tenemos que el coeficiente de p en Ram_f es exactamente $e_p(f) - 1$, *a menos que* $\mathrm{car}(k) > 0$ y que ella divida a $e_p(f)$. En este último caso, lo único que podemos asegurar es que el coeficiente es $\geq e_p(f)$.

La discusión anterior nos lleva a la siguiente definición.

Definición 5.3.24. — Sean X e Y dos curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles, y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular *separable*. Decimos que f tiene:

(1) **ramificación salvaje** en $p \in X$ si $\mathrm{car}(k) > 0$ divide a $e_p(f)$.
(2) **ramificación moderada** en $p \in X$ si no tiene ramificación salvaje.

Así, la construcción anterior se resumen en el siguiente resultado.

Teorema 5.3.25 **(Riemann-Hurwitz).** — *Sean X e Y dos curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles, y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular* separable *no-constante. Entonces,*

$$\omega_X \cong f^*(\omega_Y) \otimes \mathscr{O}_X(\mathrm{Ram}_f),$$

donde $\mathrm{Ram}_f = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ *es un divisor efectivo que verifica $n_p = e_p(f) - 1$ si f tiene ramificación moderada en $p \in X$, y que verifica $n_p \geq e_p$ si f tiene ramificación salvaje en p.*

Una consecuencia importante de lo anterior, que en el caso de $k = \mathbb{C}$ se puede probar usando métodos topológicos, es la siguiente:

Corolario 5.3.26. — *Sean X e Y dos curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles, y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular* separable *no-constante. Entonces,*

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + \deg(\mathrm{Ram}_f).$$

En particular, si f tiene ramificación moderada en todo punto $p \in X$, entonces

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (e_p(f) - 1).$$

Demostración. — Basta calcular el grado de los divisores que aparecen en la fórmula de Riemann-Hurwitz, y notar que el hecho algebraico discutido en la Proposición 3.4.29 implica que $\deg(f^*\omega_Y) = \deg(f)\deg(\omega_Y)$. □

Lo anterior permite relacionar la geometría de la curva X y la curva Y, y poder comparar sus géneros.

Corolario 5.3.27. — *Sean X e Y dos curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles, y sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo regular* separable *no-constante. Entonces,*

$$g(X) \geq g(Y).$$

Más aún, $g(X) = g(Y)$ si y sólo si f es un isomorfismo, o bien $X \cong Y \cong \mathbb{P}^1$, o bien X e Y son curvas elípticas.

Demostración. — Dado que Ram_f es un divisor efectivo, el Corolario anterior implica que

$$g(X) - 1 \geq \deg(f)(g(Y) - 1).$$

Si $g(Y) = 0$ entonces lo anterior implica que $g(X) \geq g(Y)$, y ciertamente la igualdad $g(X) = g(Y) = 0$ implica que $X \cong Y \cong \mathbb{P}^1$.

Por otra parte, si $g(Y) \geq 1$ entonces tenemos que $g(X) \geq g(Y)$ puesto que $\deg(f) \geq 1$. Más aún, en tal caso la igualdad implica que $g(X) = g(Y) = 1$ (i.e., X e Y son curvas elípticas) o bien que $\deg(f) = 1$. En el último caso, tenemos que f es un morfismo birracional entre curvas proyectivas suaves e irreducibles, y por ende un isomorfismo. □

Observación 5.3.28. — En característica 0, el Teorema de Bertini permite extender el Teorema de Riemann-Hurwitz a dimensión superior. Concretamente, si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo *finito* entre dos variedades algebraicas proyectivas suaves e irreducibles, entonces

$$K_Y = f^*(K_X) + \mathrm{Ram}_f,$$

donde $\mathrm{Ram}_f = \sum_i n_i \cdot \Gamma_i$ es un divisor efectivo, llamado el **divisor de ramificación** y los coeficientes n_i son de la forma $n_i = e_i(f) - 1$, donde $e_i(f)$ es el **índice de ramificación** de f a lo largo de la hipersuperficie $\Gamma_i \subseteq X$.

En efecto, tomando (imágenes inversas de) secciones hiperplanas generales $S \subseteq X$ y $T \subseteq Y$ podemos reducirnos al caso de curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles. El hecho que la fórmula se extienda a dimensión superior es consecuencia de la fórmula de adjunción

$$K_S = (K_X + S)|_S \text{ y } K_T = (K_Y + T)|_T.$$

Observación importante 5.3.29. — Supongamos que $\mathrm{car}(k) = 0$. En 1893, Hurwitz utiliza esta fórmula para probar que si C es una curva algebraica proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g \geq 2$ entonces

$$|\,\mathrm{Aut}(C)| \leq 42 \deg(\omega_C) = 84(g - 1).$$

En general, dicha desigualdad puede ser estricta y las curvas para las cuales se alcanza la igualdad son conocidas como **curvas de Hurwitz**. El ejemplo de género más pequeño fue descrito por Klein en 1878 y es la **cuártica de Klein**

$$C_K := \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2 \text{ tal que } x^3y + y^3z + z^3x = 0\},$$

que verifica $\mathrm{Aut}(C_K) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$. Para más detalles, ver [**Har77**, Ch. IV, Exercise 2.5].

Comentarios finales

Para finalizar, quisiera mencionar que algunas referencias para leer sobre tópicos adicionales sobre curvas algebraicas son las siguientes:

(1) **Geometría algebraica**. Capítulo IV de [**Har77**].
(2) **Geometría analítica**. Ver [**Mir95**].
(3) **Geometría aritmética**. Ver [**Liu02**].

Además, una continuación natural de este curso consiste en estudiar *superficies algebraicas* y *variedades de dimensión superior*. Para ello, excelentes introducciones son [**Bea96**] y [**Deb01**], respectivamente.

ÍNDICE

BIBLIOGRAFIA

[Bae40] Reinhold Baer. Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46:800–806, 1940.

[Bea96] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces*, volume 34 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.

[Deb01] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[DM69] P. Deligne and D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (36):75–109, 1969.

[Edi00] Dan Edidin. Notes on the construction of the moduli space of curves. In *Recent progress in intersection theory (Bologna, 1997)*, Trends Math., pages 85–113. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000.

[EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[FL85] William Fulton and Serge Lang. *Riemann-Roch algebra*, volume 277 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[Fuj90] Takao Fujita. *Classification theories of polarized varieties*, volume 155 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Gro57] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Math. J. (2)*, 9:119–221, 1957.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Har10] Robin Hartshorne. *Deformation theory*, volume 257 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2010.

[Huy06] D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006.

[Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[Laz04a] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series.

[Laz04b] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.

[Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

[LP01] Joseph Le Potier. *Géométrie Algébrique*. Cours de DEA, `https://www.imj-prg.fr/tga/jlp/coursM2_le_potier.pdf`, 2001.

[Mil13] James S. Milne. Lectures on etale cohomology (v2.21), 2013. Available at www.jmilne.org/math/.

[Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[MS87] V. B. Mehta and V. Srinivas. Varieties in positive characteristic with trivial tangent bundle. *Compositio Math.*, 64(2):191–212, 1987. With an appendix by Srinivas and M. V. Nori.

[Mum08] David Mumford. *Abelian varieties*, volume 5 of *Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics*. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Hindustan Book Agency, New Delhi, 2008. With appendices by C. P. Ramanujam and Yuri Manin, Corrected reprint of the second (1974) edition.

[OSS11] Christian Okonek, Michael Schneider, and Heinz Spindler. *Vector bundles on complex projective spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. Corrected reprint of the 1988 edition, With an appendix by S. I. Gelfand.

[Per08] Daniel Perrin. *Algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag London, Ltd., London; EDP Sciences, Les Ulis, 2008. An introduction, Translated from the 1995 French original by Catriona Maclean.

[Ser55] Jean-Pierre Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math. (2)*, 61:197–278, 1955.

[Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Varieties in projective space.

[Vak17] Ravi Vakil. *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*. Stanford, `http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf`, 2017.