Geometría Diferencial (MAT290)

Pedro Montero
pedro.montero@usm.cl

El objetivo de este curso es que las y los estudiantes se introduzcan a la geometría diferencial. El principal objeto de estudio de la geometría diferencial son las variedades diferenciables, las cuales son objetos geométricos que lucen localmente como abiertos de $\mathbf{R}^n$. Una clase importante de ejemplos son las variedades diferenciables que están dadas por ciertos subconjuntos de $\mathbf{R}^N$, como por ejemplo la 2-esfera

$$\mathbf{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \text{ tal que } x^2+y^2+z^2=1\} \subseteq \mathbf{R}^3,$$

que luce localmente como $\mathbf{R}^2$, y que puede ser vista en el espacio euclideano $\mathbf{R}^3$. Por otra parte, existen variedades definidas por condiciones geométricas tales como el espacio projectivo real

$$\mathbf{P}^n(\mathbf{R}) = \{\text{rectas vectoriales } \ell \text{ en } \mathbf{R}^{n+1}\},$$

que luce localmente como $\mathbf{R}^n$, y que *a priori* no tiene una descripción sencilla en algún espacio ambiente $\mathbf{R}^N$. Por otra parte, un Teorema de Whitney (1936) señala que toda variedad diferenciable M puede ser vista dentro de algún $\mathbf{R}^N$ para cierto N suficientemente grande.

A pesar del importante resultado anterior, veremos que en general la forma en que la variedad M se ve dentro de un $\mathbf{R}^N$ no es explícita, lo cual hace necesario que seamos capaces de estudiar las propiedades geométricas *intrínsecas* de las variedades, como lo son por ejemplo su dimensión, sus campos vectoriales, o su topología.

El objetivo de este curso es introducir las nociones básicas de la geometría diferencial. En particular, se estudiarán algunos de los invariantes geométricos más importantes tales como los campos de vectores, formas diferenciales, y fibrados vectoriales. Además, exploraremos las diferentes nociones de derivación e integración en variedades, que a su vez están relacionadas a través del Teorema de Stokes. Finalmente, estudiaremos métodos de topología diferencial que permiten utilizar técnicas de geometría diferencial, tales como la Teoría de Morse o la Teoría del grado topológico de Brauer, para deducir propiedades de la topología de las variedades.

La planificación aproximada del curso es la siguiente.

(1) Teorema de Función Implícita. Submersiones e Inmersiones.

(2) Subvariedades de $\mathbf{R}^n$ y Lema de Morse.

(3) Variedades abstractas y Particiones de la unidad.

(4) Espacio tangente y subvariedades.

(5) Fibrados vectoriales y fibrado tangente.

(6) Teorema de Sard.

(7) Campos de vectores y Derivada de Lie.

(8) Ecuaciones diferenciales en variedades y Flujo de campos de vectores.

(9) Aplicación exponencial, Teorema de fibración de Ereshmann, y Funciones de Morse.

(10) Álgebra exterior y Formas diferenciales.

(11) Teorema de Stokes y Cohomología de de Rham.

(12) El grado topológico de Brouwer y Teorema de Poincaré-Hopf.

(13) Tópicos adicionales (si el tiempo lo permite): **Introducción a la Geometría Riemanniana** o bien **Introducción a los Grupos de Lie**, según los intereses de la audiencia.

Prerrequisitos: La audiencia debe tener buena base en cálculo en varias variables (MAT023 y MAT024), así como álgebra lineal avanzada (MAT210). Es bueno saber un poco de topología (definición de topología, continuidad, conexidad, etc: el curso de Análisis I es suficiente) y ciertamente ayudará tener la intución y conocimientos de teoría de grupos (MAT214) en ciertas partes del curso, aunque no lo asumiré.

Cualquier duda pueden enviarme un e-mail a pedro.montero@usm.cl.

Pedro Montero
Departamento de Matemática
UTFSM, Valparaíso

Referencias

[BottTu] R. Bott and L. W. Tu, “Differential Forms in Algebraic Topology".

[Chern] S. S. Chern, “Lectures on Differential Geometry".

[Kirillov] A. Kirillov, “An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras".

[Lee] J. M. Lee, “Introduction to Smooth Manifolds".

[MAT210] P. Montero, “Álgebra Lineal". Disponible aquí.

[MAT214] P. Montero, “Álgebra Abstracta". Disponible aquí.

[Taimanov] I. A. Taimanov, “Lectures on Differential Geometry".