$\boxed{\textbf{Ejercicio 1}}$ Sea $E \simeq \mathbb{R}^n$ y $\mathrm{GL}(E) := \{u : E \to E \text{ lineal invertible }\} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(E) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E)$. Probar que $\varphi : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}(E)$, $u \mapsto \varphi(u) = u^{-1}$ es de clase $\mathscr{C}^\infty$ y calcular $d_u\varphi$.

$\boxed{\text{Solución:}}$ Sea $\mathscr{B}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y consideremos el isomorfismo (dado tras elegir la base $\mathscr{B}$) $f := Mat_{\mathscr{B}} : End(E) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ y su restricción $f_{\mathrm{GL}(E)} := f|_{GL(E)} : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Notamos que por ser una función lineal y una restricción de una función lineal respectivamente ambas son $\mathscr{C}^\infty$. Además consideremos las siguientes aplicaciones:

1. $\det^* : \mathscr{M}_n \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det^*(A)$ que es continua (y por tanto $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = {\det^*}^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es abierto y por tanto $\mathrm{GL}(E)$ también es abierto), y de tipo $\mathscr{C}^\infty$ pues es un polinomio con las coordenadas de A como variables.

2. $\varphi^* : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ que es de tipo $\mathscr{C}^\infty$ pues $A^{-1} = \frac{1}{\det^*(A)}\mathrm{adj}(A)$ donde $\mathrm{adj}(A)$ es la matriz de adyacencia cuyas entradas son determinantes (y por tanto $\mathscr{C}^\infty$) y por tanto φ^* es $\mathscr{C}^\infty$.

Ahora, notemos que los sgtes. diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \arrow[dr, "\det^*"] & \\
\mathrm{End}(E) \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\det"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \arrow[r, "\varphi^*"] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \arrow[d, "f|_{\mathrm{GL}(E)}^{-1}"] \\
\mathrm{GL}(E) \arrow[u, "f|_{\mathrm{GL}(E)}"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{GL}(E)
\end{tikzcd}$$

Finalmente, por regla de la cadena (y recordando que f y $f_{\mathrm{GL}(E)}$ son $\mathscr{C}^\infty$) tenemos que las funciones φ y det también serán $\mathscr{C}^\infty$.
Concluyamos el ejercicio calculando $d\varphi$. Una forma de intuir cuál debería ser el diferencial es considerar la igualdad $I = u \cdot u^{-1}$ diferenciar a ambos lados, usar la regla del producto y despejar, sin embargo, no hay rigor en este método, por lo que procederemos de otra forma.
Concluyamos que $d_u\varphi(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$. En efecto, sea $||\cdot|| : \mathrm{End}(E) \to \mathbb{R}$ la norma dada por la igualdad $||u|| = \sup_{||x||_E \leq 1} ||u(x)||_E$ y recordamos que si $l, m \in \mathrm{End}(E)$ tendremos la desigualdad útil $||l \circ m|| \leq ||l||||m||$, además denotemos para todo $k \in \mathbb{N}$ $u^k := u \circ \cdots \circ u$ al endomorfismo u compuesto consigo mismo k veces. Finalmente, consideremos $u \in \mathrm{GL}(E)$, $h \in \mathrm{End}(E)$ tal que $||h \circ u^{-1}|| < 1$, lo que siempre es posible, basta considerar $h = \lambda id_E$ con λ lo suficientemente pequeño y aplicar la desigualdad útil. Finalmente recordemos que si $A \in \mathrm{End}(E)$ cumple $||A|| < 1$ entonces $(id_E - A)$ es invertible con inversa $(id_E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k$. Tendremos entonces, con respecto a nuestra aplicación φ lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\varphi(u+h) &= (u+h)^{-1} \\
&= (id_E \circ u + h \circ u^{-1} \circ u)^{-1} \\
&= (id_E + h \circ u^{-1}) \circ u)^{-1} \\
&= u^{-1} \circ (id_E + h \circ u^{-1})^{-1} \\
&= u^{-1} \circ \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-h \circ u^{-1})^k \right) \\
&= u^{-1} \circ \left(id_E - h \circ u^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (h \circ u^{-1})^k \right) \\
&= u^{-1} - u^{-1} \circ h \circ u^{-1} + o(||h||)
\end{aligned}$$

con $\lim_{h \to 0} \frac{o(||h||)}{||h||} = 0$. Finalmente, como la aplicación $\ell_u : \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$, $h \mapsto -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ es lineal para todo $u \in GL(E)$ concluimos que $d_u\varphi = \ell_u, \forall u \in GL(E)$. ■

Ejercicio 2 Probar que $f :]-1,1[\times \mathbb{R} \to]-1,1[\times \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto (t, x - \sin(tx))$ es difeo. de tipo $\mathscr{C}^\infty$

Solución: Como el seno es de tipo $\mathscr{C}^\infty$ la aplicación $f :]-1,1[\times \mathbb{R} \to]-1,1[\times \mathbb{R}$ es claramente de tipo $\mathscr{C}^\infty$ por restricción, álgebra y composición de funciones de tipo $\mathscr{C}^\infty$ en cada coordenada. Verifiquemos la biyectividad.
Dado $(t,x) \in]-1,1[\times \mathbb{R}$ se tiene (fijando la base canónica de $\mathbb{R}^2$):

$$\det(J_f(t,x)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x\cos(xt) & 1 - t\cos(tx) \end{pmatrix} = 1 - t\cos(xt) > 1 - \cos(xt) \geq 0$$

$\implies J_f(t,x) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \implies d_{(t,x)}f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$.
Deducimos que $\forall (t,x) \in]-1,1[\times \mathbb{R}$, $d_{(t,x)}f$ es invertible.

$$\begin{aligned} f(t',x') = f(t,x) &\implies (t', x' - \sin(x't')) = (t, x - \sin(xt)) \\ &\implies t = t' \wedge x' - \sin(t'x') = x - \sin(tx) \end{aligned}$$

Notamos que para $t \in]-1,1[$ la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \sin(tx)$ es derivable y $F'(x) = 1 - t\cos(xt) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, por lo que F es estrictamente creciente y por tanto inyectiva. Luego $x = x'$ y por tanto f es inyectiva. Concluimos del corolario del Teorema de Inversión Local que f es un difeo. de tipo $\mathscr{C}^\infty$ sobre su imagen, verifiquemos que f es sobreyectiva para finalizar. En efecto, tenemos que para todo $t \in]-1,1[$:

$$\lim_{x \to -\infty} x - \sin(tx) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to \infty} x - \sin(tx) = \infty$$

por lo que, como f es continua, se tiene $Im(f) =]-1,1[\times \mathbb{R}$ como se quería ■

Ejercicio 3: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x+2x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$. Probar que $f'(0)=1$ y que <u>no</u> existe $0\in U$ vecindad tal que f es inyectiva. Explicar porqué esto no contradice el Teorema de Inversión Local.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}1+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

(Pues $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)|\leq 1$). Como el límite anterior existe, f es derivable en 0 y $f'(0)=1$.
Además, para $x\neq 0$ se tiene que f es derivable en x y su derivada es $f'(x)=1-2\cos(\frac{1}{x})+4x\sin(\frac{1}{x})$ que no es continua en 0 (pues el límite $\lim_{x\to 0}f'(x)$ no existe).
Sin embargo, notemos que, dándonos la sucesión convergente a 0, $x_n=\frac{1}{\pi n}$:

$$f'(x_n)=f'(\frac{1}{\pi n})=1-2\cos(\pi n)+8\pi n\sin(\pi n)=1-2\cdot(-1)^n$$

Además simplemente por álgebra y composición de funciones continuas, f' es continua en $(0,\infty)$, por el Teorema de Valor Intermedio, tendremos que para todo intervalo $(0,a)$ con $a\in\mathbb{R}^+$ f' alcanza todos los valores entre -1 y 3, por lo que f no es monótona en $(0,a)$ deducimos entonces (pues si f es continua entonces su inyectividad implicaría su monotonía) que f no es inyectiva en ninguna vecindad del 0.
Finalmente, observamos que la única hipótesis que falla para aplicar el Teorema de Inversión Local es que f sea $\mathscr{C}^r$ para $r\geq 1$, en efecto, f' no es continua en 0. ■