MAT290 : "Geometría Diferencial"

Referencias

① John M. Lee "Introduction to Smooth Manifolds"

② Raoul Bott & Loring W. Tu "Differential Forms in Algebraic Topology"

El curso estará dividido en 3 grandes tópicos:

I. Variedades Diferenciables

II. Campos vectoriales

III. Formas Diferenciales

Parte I: Variedades Diferenciables

§1. Teorema de la Función Implícita:

Sean $E \simeq \mathbb{R}^n$ y $F \simeq \mathbb{R}^m$ esp. vectoriales normados (evn).

Recuerdo: Sea $\mathcal{U} \subseteq E$ un abierto no-vacío, y $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$ una función.

Decimos que f es diferenciable en $a \in \mathcal{U}$ si:

$\exists\, \ell : E \to F$ lineal tal que $\forall h \in E$ en una vecindad de 0_E se tiene que $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \varepsilon(h)\|h\|$, donde $\varepsilon(h) \to 0_F$ cuando $h \to 0_E$.

La aplicación lineal $\ell : E \to F$ es única en tal caso, y se denota mediante $d_a f : E \longrightarrow F$, que es llamada el diferencial de f en a.

Obs: El $\mathbb{R}$-ev. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,F) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial normado: Por ejemplo, para $u : E \to F$ lineal podemos definir $\|u\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$.

En part, la aplicación $df : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,F)$, $a \mapsto d_a f$ es una aplicación entre dos evn.

Def: Sea $\mathcal{U} \subseteq E$ abierto no-vacío y $f : \mathcal{U} \to F$ una función. Decimos que f es de clase $\mathcal{C}^1$ si f es diferenciable $\forall a \in \mathcal{U}$ y si la función df es continua.

Decimos que f es de clase $\mathcal{C}^r$ si df es de clase $\mathcal{C}^{r-1}$, y decimos que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ si es de clase $\mathcal{C}^r$ para todo $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Recuerdo (Regla de la cadena): Sean $\mathcal{U} \subseteq E$, $V \subseteq F$ abiertos y G un tercer e.v.n. Si $f : \mathcal{U} \to V$ y $g : V \to G$ son de clase $\mathcal{C}^r$, entonces $g \circ f : \mathcal{U} \to G$ es de clase $\mathcal{C}^r$ y además $d_x(g\circ f) = d_{f(x)} g \circ d_x f$.

Obs: Fijando bases de $E \cong \mathbb{R}^n$ y $F \cong \mathbb{R}^m$, la matriz asociada a $d_a f : E \longrightarrow F$ es la matriz jacobiana usual $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $E \simeq \mathbb{R}^n$ y $GL(E) := \{ u : E \to E \text{ lineal invertible} \} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,E)$. Probar que $\varphi : GL(E) \to GL(E)$, $u \mapsto \varphi(u) = u^{-1}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y calcular $d_u \varphi$.

Def: Sean $\mathcal{U} \subseteq E$, $V \subseteq F$ abiertos y $f : \mathcal{U} \to V$ una función. Decimos que f es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^r$ si f es biyectiva, y si f y f^{-1} son de clase $\mathcal{C}^r$.

Lema: Si $f : \mathcal{U} \subseteq E \to V \subseteq F$ es un difeo. de clase $\mathcal{C}^r$ entonces $\dim_{\mathbb{R}}(E) = \dim_{\mathbb{R}}(F)$ y la aplicación lineal $d_a f : E \to F$ es invertible para todo $a \in \mathcal{U}$.

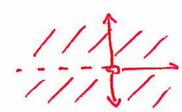
Dem: Sea $b = f(a) \in V$. La regla de la cadena implica que $d_b f^{-1} \circ d_a f = Id_E$ y $d_b f^{-1} \circ d_a f = Id_F$. Luego, $d_a f$ es invertible, y $(d_a f)^{-1} = d_b f^{-1}$. ∎

Ejemplos:

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ es biyectiva de clase $\mathcal{C}^\infty$ pero no es un difeomorfismo.

② Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ función de clase $\mathcal{C}^r$, y sea $\varphi : \mathcal{U} \times F \to \mathcal{U} \times F$ dada por $\varphi(x,y) = (x, y - f(x))$. $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que φ es un difeo. de clase $\mathcal{C}^r$.

③ Sea $\psi : \mathbb{R}^{>0} \times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y = 0, x \leq 0\}$ definida por



$$(r, \theta) \mapsto (x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta)$$

Entonces, ψ es un difeo. de clase $\mathcal{C}^\infty$ con $\psi^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \ 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}} \right) \right)$.

⚠ La aplicación $\psi : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ no es inyectiva, a pesar que $d_{(r,\theta)}\psi$ es invertible en todo punto. Por otra parte tenemos:

Teorema de Inversión Local: Sea $r \geq 1$, y sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ función de clase $\mathcal{C}^r$. Sea $a \in \mathcal{U}$ y sup. que $d_a f : E \to F$ es invertible, entonces $\exists\, a \in V \subseteq \mathcal{U}$ vecindad abierta tal que:

① La imagen $W := f(V)$ es un abierto de F.

② La restricción $f_V := f|_V : V \to W$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^r$.

Asumiremos este resultado sin demostración, pero discutiremos varias consecuencias:

Corolario: Sea $r \geq 1$, y sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ función de clase $\mathcal{C}^r$.

① Si $d_a f$ es invertible para todo $a \in \mathcal{U}$, entonces f es una función abierta.

② Si además de ①, f es inyectiva, entonces $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ es un difeo. de clase $\mathcal{C}^r$.

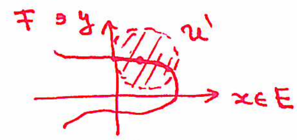
$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $f :]-1,1[\times \mathbb{R} \to]-1,1[\times \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto (t, x - \sin(tx))$ es difeo. $\mathcal{C}^\infty$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Probar que $f'(0) = 1$ y que no existe $0 \in \mathcal{U}$ vecindad tal que f es inyectiva. Explicar porqué esto no contradice el Teorema de Inversión Local.

Recordemos el contexto del Teorema de la Función Implícita: sean $E \cong \mathbb{R}^n$, $F \cong \mathbb{R}^m$ evn, sea $\mathcal{U} \subseteq E \times F$ abierto y $f : \mathcal{U} \subseteq E \times F \longrightarrow F$ función de clase $\mathcal{C}^r$. Dado $c \in F \cong \mathbb{R}^m$ constante, buscamos estudiar la ecuación $f(x,y) = c$ en $\mathcal{U}$. $r \geq 1$.

Para ello usamos la notación siguiente: $(\partial_E f)(a,b) := d_{(a,b)} f|_E : E \longrightarrow F$ y $(\partial_F f)(a,b) := d_{(a,b)} f|_F : F \longrightarrow F$ para todo $(a,b) \in \mathcal{U} \subseteq E \times F$. Luego, tenemos:

<u>Teorema de la Función Implícita</u>: Sea $(a,b) \in \mathcal{U}$ y $f(a,b) = c$. Supongamos que $(\partial_F f)(a,b) : F \xrightarrow{\sim} F$ es invertible, entonces $\exists\, (a,b) \in \mathcal{U}'$ vecindad abierta tal que $\{(x,y) \in \mathcal{U}' \text{ tq } f(x,y) = c\}$ es el gráfico de una función $u : V \subseteq E \longrightarrow F$ de clase $\mathcal{C}^r$, es decir, se tiene:



$$(x,y) \in \mathcal{U}' \text{ cumple } f(x,y) = c \iff x \in V,\ y = u(x).$$

<u>Dem</u>: Sea $\varphi : \mathcal{U} \subseteq E \times F \longrightarrow E \times F$, $(x,y) \mapsto (x, f(x,y))$ de clase $\mathcal{C}^r$ con

$$d_{(a,b)} \varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_E & 0 \\ \partial_E f(a,b) & \partial_F f(a,b) \end{pmatrix}$$

$\partial_F f$ invertible $\Rightarrow d_{(a,b)} \varphi$ invertible. Por Inversión Local, $\exists\, \mathcal{U}'$ vecindad abierta de (a,b) tq $\varphi_{\mathcal{U}'} := \varphi|_{\mathcal{U}'}$ induce un difeo. $\varphi_{\mathcal{U}'} : \mathcal{U}' \longrightarrow V'$, con $V' \subseteq E \times F$ vecindad de (a,c), y cuya inversa es de la forma $\varphi_{\mathcal{U}'}^{-1} : V' \longrightarrow \mathcal{U}'$, $(s,t) \mapsto (s, \psi(s,t))$ con $\psi : V' \longrightarrow F$ de clase $\mathcal{C}^r$.

Finalmente, basta notar que $\{(x,y) \in \mathcal{U}' \text{ tq } f(x,y) = c\}$ es la imagen por $\varphi_{\mathcal{U}'}^{-1}$ de los $(s,t) \in V'$ tq $t = c$, ie, el grafo de $u : V := \{x \in E \text{ tq } (x,c) \in V'\} \longrightarrow F$ función de clase $\mathcal{C}^r$ dada por $u(x) := \psi(x,c)$ ✓ ■

<u>Ejemplo</u>: La ecuación $f(x,y) := x^3 - x + y^2 = 0$ verifica $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2 \neq 0$ y luego $x = u(y)$ en una vecindad de $(1,0)$, con u de clase $\mathcal{C}^\infty$.

§2. <u>Teorema del Rango constante</u>

Sean $E \cong \mathbb{R}^n$, $F \cong \mathbb{R}^m$ evn y $\mathcal{U} \subseteq E$ abierto. Si $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$ función de clase $\mathcal{C}^r$ y $a \in \mathcal{U}$, se define el <u>rango de f en a</u> como $\mathrm{rg}_a(f) := \mathrm{rg}(d_a f)$.

<u>Lema</u>: La función $\mathrm{rg}(f) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{N}$, $a \mapsto \mathrm{rg}_a(f)$ es semi-continua inferior, es decir, para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{x \in \mathcal{U} \text{ tq } \mathrm{rg}_x(f) \leq r\}$ es <u>cerrado</u>. En particular, el conjunto donde $\mathrm{rg}(f)$ es maximal es abierto.

<u>Dem</u>: Fijando bases de $E \cong \mathbb{R}^n$ y $F \cong \mathbb{R}^m$, la condición $\mathrm{rg}_x(f) \leq r$ equivale a que todos los sub-determinantes $r \times r$ de la matriz jacobiana $J_f(x)$ sean 0; es una condición cerrada ✓ ■

Def: Sean $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \subseteq E$, $V, V' \subseteq F$ abiertos y $f : \mathcal{U} \to V$, $g : \mathcal{U}' \to V'$ funciones de clase $\mathcal{C}^r$. Decimos que f y g son <u>$\mathcal{C}^r$-conjugadas</u>, y escribimos $f \underset{\mathcal{C}^r}{\sim} g$, si existen difeomorfismos de clase $\mathcal{C}^r$ $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}'$ y $\psi : V \xrightarrow{\sim} V'$ tales que

$$g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

<u>Ejemplo importante</u>: si $f \underset{\mathcal{C}^r}{\sim} g$ y $g : \mathcal{U}' \to V'$ es <u>lineal</u>, entonces $\mathrm{rg}(f)$ es <u>constante</u>.
En efecto, si $a \in \mathcal{U}$ y $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ entonces la regla de la cadena implica

$$d_{\varphi(a)} g = d_{f(a)} \psi \circ d_a f \circ d_{\varphi(a)} \varphi^{-1} \Rightarrow \mathrm{rg}(d_a f) = \mathrm{rg}(d_{\varphi(a)} g) \text{ constante } \checkmark$$

El objetivo de esta sección es probar que <u>localmente</u> (!) el recíproco es cierto.

Def: Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ función de clase $\mathcal{C}^r$ y $a \in \mathcal{U}$. Decimos que f es una <u>submersión en una vecindad de a</u> si $d_a f$ es <u>sobreyectiva</u>. Decimos que f es una <u>submersión</u> si $d_a f$ es sobreyectiva para todo $a \in \mathcal{U}$.

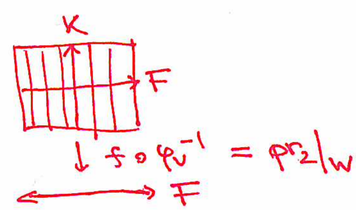
<u>Teorema de submersión</u>: Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ función de clase $\mathcal{C}^r$ y sea $a \in \mathcal{U}$. Supongamos que $d_a f$ es sobreyectiva, entonces existe una vecindad abierta $a \in V \subseteq \mathcal{U}$ y un difeo. $\mathcal{C}^r$ $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W \subseteq E$ tal que $f \circ \varphi^{-1} : W \to F$ es <u>lineal</u>.

<u>Dem</u>: Sea $K = \ker(d_a f) \subseteq E$ y $L \subseteq E$ tal que $E = K \oplus L$. Por hipótesis, la restricción $\partial_L f(a) := (d_a f)|_L : L \xrightarrow{\sim} F$ es un isomorfismo. Luego, la función de clase $\mathcal{C}^r$ dada por $\varphi : E = K \oplus L \longrightarrow K \oplus F \simeq E$, $(x, y) \mapsto (x, f(x,y))$ tiene diferencial

$$d_a \varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_K & 0 \\ \partial_K f(a) & \partial_L f(a) \end{pmatrix} \in GL(E)$$

Inversión local
$\Rightarrow \exists\ a \in V \subseteq \mathcal{U}$ y $\exists\ (a, f(a)) \in W \subseteq E \simeq K \oplus F$ vecindades abiertas tq $\varphi_V : V \xrightarrow{\sim} W$ es un difeomorfismo $\mathcal{C}^r$. Finalmente, notamos que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow[\sim]{\varphi_V} & W & \ni & (x,y) \\ & \searrow^{f} & \downarrow \mathrm{pr}_2 & & \downarrow \\ & & F & \ni & y \end{array}$$



es conmutativo, y luego $f \circ \varphi_V^{-1} : W \longrightarrow F$ es lineal $\checkmark$ ∎

Def: Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \longrightarrow F$ función de clase $\mathcal{C}^r$ y sea $a \in \mathcal{U}$. Decimos que f es una <u>inmersión en una vecindad de a</u> si $d_a f$ es inyectiva (i.e., $\mathrm{rg}_a(f) = n = \dim_{\mathbb{R}} E$). Decimos que f es una <u>inmersión</u> si $d_a f$ es inyectiva para todo $a \in \mathcal{U}$.

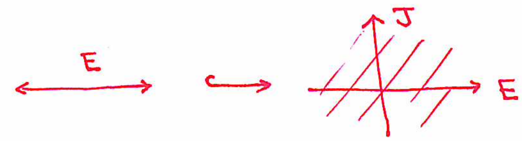
<u>Teorema de inmersión</u>: Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ función de clase $\mathcal{C}^r$ y sea $a \in \mathcal{U}$. Supongamos que $d_a f$ es inyectiva, entonces $\exists$ vecindades abiertas $a \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ y $f(a) \in V \subseteq F$ tales que $f(\mathcal{U}_0) \subseteq V$ y $\exists\ \psi : V \xrightarrow{\sim} W \subseteq F$ difeo. de clase $\mathcal{C}^r$ tal que $\psi \circ f|_{\mathcal{U}_0} : \mathcal{U}_0 \to W$ es <u>lineal</u>.

Dem: Sea $I = \operatorname{Im}(d_a f) \subseteq F$ y $J \subseteq F$ tal que $F = I \oplus J$. Consideremos la función $\varphi : \mathcal{U} \times J \subseteq E \times J \longrightarrow F$, $(x,y) \longmapsto f(x) + y$ de clase $\mathcal{C}^r$ con diferencial

$$d_{(a,0)}\varphi = (d_a f \quad Id_J) \in GL(F)$$

Inversión local
$\Rightarrow \exists\ (a,0) \in W \subseteq E \times J \cong F$ y $f(a) \in V \subseteq F$ vecindades abiertas tq $\varphi_W : W \xrightarrow{\sim} V$ es un difeomorfismo $\mathcal{C}^r$. Sea $i : E \hookrightarrow E \times J$, $x \mapsto (x,0)$ inclusión y $\mathcal{U}_0 := i^{-1}(W)$
$\Rightarrow f(\mathcal{U}_0) \subseteq W$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_0 \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\ W \arrow[r, "\sim", "\varphi_W"'] & V \end{tikzcd}$$



es conmutativo. Luego, $\psi := \varphi^{-1} : V \xrightarrow{\sim} W$ es tal que $\psi \circ f|_{\mathcal{U}_0} = i|_{\mathcal{U}_0}$ es lineal ✓ ■

Los dos resultados anteriores permiten probar:

<u>Teorema del rango constante</u>: Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \longrightarrow F$ función de clase $\mathcal{C}^r$ y sea $a \in \mathcal{U}$. Supongamos que $rg(f)$ es constante en una vecindad abierta de $a \in \mathcal{U}$, entonces existen difeomorfismos $\mathcal{C}^r$ φ y ψ, definidos en vecindades de a y $f(a)$ resp. tal que la función

$$g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1},$$

definida en una vecindad de a, sea <u>lineal</u>.

<u>Idea de Dem</u>: Sea $I := \operatorname{Im}(d_a f)$ y $J \subseteq F$ tal que $F = I \oplus J$. Escribimos $f = (f_I, f_J)$ donde $d_a f_I$ sobreyectiva $\overset{\text{Teo. Sub.}}{\Longrightarrow} \exists$ difeo. φ tal que $f_I \circ \varphi^{-1} : \mathcal{U}_0 \subseteq E \twoheadrightarrow I$ es <u>lineal</u> sobreyectiva con kernel K. En part, $E \cong K \oplus I$.
$\Rightarrow$ Cerca de $a = (a_K, a_I) \in \mathcal{U}_K \times \mathcal{U}_I \subseteq \mathcal{U}$, f_I está dada por $(x,y) \longmapsto y$.
Así, $f : \mathcal{U}_K \times \mathcal{U}_I \longrightarrow F$, $(x,y) \longmapsto (f_I(x,y) = y, f_J(x,y))$ con diferencial

$$d_{(x,y)} f = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} K & I \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & Id_I \\ \partial_K f(x,y) & \partial_I f(x,y) \end{pmatrix} & \begin{array}{c} I \\ J \end{array} \end{array}$$

de rango $\dim(I)$, por hip.

$\Rightarrow \partial_K f(x,y) \equiv 0$, i.e., $f_J(x,y) =: g(y)$ <u>no</u> depende de $x \in K$.
En otras palabras, $f(x,y) = (y, g(y)) \in I \oplus J$ cerca de a, y en particular la función $G : \mathcal{U}_I \longrightarrow F$, $y \mapsto (y, g(y))$ tiene diferencial $d_{a_I} G$ <u>inyectiva</u>
$\overset{\text{Teo Imm.}}{\Longrightarrow} \exists\ \psi$ difeo. tal que $\psi \circ G$ es lineal ✓ ■

§3. <u>Subvariedades de $\mathbb{R}^n$</u>:

Sea $E \cong \mathbb{R}^n$. La idea de <u>subvariedad</u> de $\mathbb{R}^n$ generaliza los conceptos de curvas en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y de superficies en $\mathbb{R}^3$ estudiados en MAT024. Intuitivamente, corresponden a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que pueden ser descritos localmente por "buenas ecuaciones".

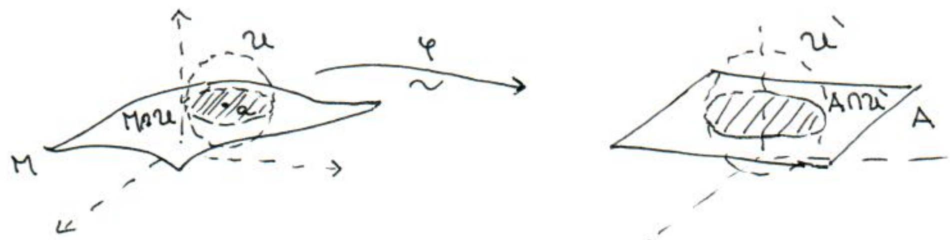
Recuerdo: sea $E \simeq \mathbb{R}^n$ e.v. y $H \subseteq E$ sub e.v. Dado $a \in E$, el espacio afín asociado a H que pasa por a está dado por

$$A := \{ a + x,\ x \in H \}$$

Por definición, decimos que H es el e.v. tangente a A y que $\dim(A) := \dim_{\mathbb{R}}(H)$.

Ejemplo: Sea $f : E \simeq \mathbb{R}^n \to F \simeq \mathbb{R}^m$ lineal y sea $b \in F$ tal que $f^{-1}(b) \neq \emptyset$. Entonces, $A = \{ x \in E \text{ tq } f(x) = b \}$ es afín y su espacio tangente es $\ker(f)$.

Def: Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjunto. Decimos que M es una subvariedad de clase $\mathcal{C}^r$ de $\mathbb{R}^n$ si para todo $a \in M$ existe una vecindad abierta $a \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$



y un difeomorfismo $\mathcal{C}^r$ $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(M \cap \mathcal{U})$ está contenida en un espacio afín $A \subseteq \mathbb{R}^n$, i.e., $\varphi(M \cap \mathcal{U}) = A \cap \mathcal{U}'$.

Obs: Intuitivamente, M "luce localmente" como un espacio afín. Además, trasladando A si fuera necesario (componiendo φ con una traslación $x \mapsto x - p$, con $p \in A$) podemos asumir $A = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_m)$ es un subev de $\mathbb{R}^n$, y podemos completar la base de A en una base $(e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow \varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^n,\ x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

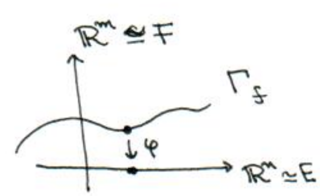
y luego $M \cap \mathcal{U} = \{ x \in \mathcal{U} \text{ tal que } \varphi_{m+1}(x) = \ldots = \varphi_n(x) = 0 \}$.

⚠ Notar que, como φ es un difeo, la función $\psi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, $x \mapsto (\varphi_{m+1}(x), \ldots, \varphi_n(x))$ es una submersión en $\mathcal{U}$, i.e., $d_x \psi$ es sobreyectiva $\forall x \in \mathcal{U}$.

Ejemplos de subvariedades

① Todo abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una subvariedad (considerar $\varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ y $A = \mathbb{R}^n$).

② Todo grafo define una subvariedad: Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F \simeq \mathbb{R}^m$ función de clase $\mathcal{C}^r$ y sea $\Gamma_f := \{ (x,y) \in \mathcal{U} \times F \text{ tal que } y = f(x) \}$.



$\Rightarrow \varphi : \mathcal{U} \times F \to \mathcal{U} \times F$, $(x,y) \mapsto (x, y - \varphi(x))$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^r$ que cumple $\varphi(\Gamma_f) = \mathcal{U} \times \{0_F\}$ ✓

Para definir la noción de dimensión necesitamos hablar de espacio tangente:

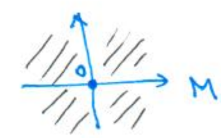
Def: Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto y sea $a \in M$. Un <u>vector</u> $v \in E \simeq \mathbb{R}^n$ es un <u>vector tangente</u> a M en $a \in M$ si:

$\exists\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ función continua tal que $\gamma(0) = a$,

tal que $\gamma(]-\varepsilon,\varepsilon[) \subseteq M$, γ sea derivable en 0 y se tenga $\gamma'(0) = v \in \mathbb{R}^n$.

Se define el <u>espacio tangente de M en a</u> por $T_aM := \{ v \in E \simeq \mathbb{R}^n$ tq v vector tangente en $a \in M\}$

<u>Ejemplo</u>: Si $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $xy = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces se verifica que $T_0M = \{(a,0),\ a \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,b),\ b \in \mathbb{R}\} \leftarrow$ <u>No</u> es un subev de $\mathbb{R}^2$!



<u>Ejercicio útil</u> Sea $\varphi : \mathcal{U} \subseteq E \xrightarrow{\simeq} V \subseteq E$ difeo. de clase $\mathcal{C}^1$ y sea $M \subseteq E$ subvariedad.
Probar que: ① $\varphi(M \cap \mathcal{U})$ es una subvariedad de E.
② $(d_a\varphi)(T_aM) = T_{\varphi(a)}(\varphi(M))$ para todo $a \in \mathcal{U}$.

Prop: Sea $M \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$ subvariedad de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces, para todo $a \in M$ se tiene que T_aM es un <u>subespacio vectorial</u> de $\mathbb{R}^n$.

<u>Dem</u>: Sea $a \in M$ y $a \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ vecindad tq $\exists\ \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ difeo $\mathcal{C}^1$ tal que $\varphi(\mathcal{U} \cap M) = V \cap F$ donde $F \simeq \mathbb{R}^m$ es un subev de $\mathbb{R}^n$.

$\overset{\text{Ejercicio útil}}{\Longrightarrow} \quad (d_a\varphi)(T_aM) = T_{\varphi(a)}(V \cap F) \underset{\text{def}}{=} T_{\varphi(a)}F \simeq F$ ✓ ∎

Def: Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ subvariedad, y sea $a \in M$. Se define la <u>dimensión de M en a</u> como $\dim_a(M) := \dim_{\mathbb{R}}(T_aM)$.

<u>Observaciones</u>:

① $\dim_a(M)$ es localmente constante en M. Si es constante, escribimos $\dim(M)$.
Por ejemplo, cada componente conexa de M es de dimensión constante.

② Si $\dim(M) = 0$, entonces M es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$.

③ En la práctica, nos restringiremos a variedades de dimensión constante. Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es de $\dim(M) = m$ con $m = 1$ (resp. $m = 2$, resp. $m = n-1$) decimos que M es una curva (resp. superficie, resp. hipersuperficie).

<u>Ejercicio</u> Sean $M \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$ y $N \subseteq F \simeq \mathbb{R}^m$ subvariedades. Sea $\mathcal{U} \subseteq E$ abierto tal que $M \subseteq \mathcal{U}$ y sea $f : \mathcal{U} \longrightarrow F$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^r$ tal que $f(M) \subseteq N$.
Probar que $(d_af)(T_aM) \subseteq T_{f(a)}N$ para todo $a \in M$.

§4. Construcción de subvariedades de $\mathbb{R}^n$

Una forma de construir variedades es usando ecuaciones:

Teorema: Sea $f: \mathcal{U} \subseteq E \to F$ de clase $\mathcal{C}^r$ de rango constante. Sea $b \in f(\mathcal{U})$, entonces $M = f^{-1}(b) = \{x \in \mathcal{U} \text{ tq } f(x) = b\}$ es una subvariedad de $E \simeq \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^r$. Además, $T_a M = \ker(d_a f)$ para todo $a \in M$.

Dem: Sea $a \in M$. Por Teo. de rango constante $\exists\, a \in V \subseteq \mathcal{U}$ y $b \in W \subseteq F$ vecindades abiertas y $\exists$ difeos. $\varphi: V \xrightarrow{\simeq} V' \subseteq E$, $\psi: W \to W' \subseteq F$ tales que $f(V) \subseteq W$ y tales que $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ sea lineal. Sea $a' = \varphi(a)$ y $b' = \psi(b)$, entonces dado que

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "\psi"] \\ V' \arrow[r, "g"] & W' \end{tikzcd}$$

es conmutativo,

se tiene que $x \in M \cap V$ (ie, $f(x) = b$) $\iff$ $x' = \varphi(x) \in V'$ verifica $\overbrace{g(x') = b'}^{\text{espacio afín } A \subseteq \mathbb{R}^n \simeq E}$, ie, $\varphi(M \cap V) = V' \cap A$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ afín, y luego $M \subseteq E$ subvar. de clase $\mathcal{C}^r$.

Por otra parte, el esp. tangente a $\varphi(M \cap V)$ en a' es el $\mathbb{R}$-ev asociado a $A = \{g(x') = b'\}$ ie, $\ker(d_{a'} g)$. Así, dado que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "d_a f"] \arrow[d, "d_a \varphi"', "\cong"] & F \arrow[d, "d_b \psi", "\cong"'] \\ E \arrow[r, "d_{a'} g"] & F \end{tikzcd}$$

es conmutativo (regla de la cadena),

(Ejer. útil p.7)

tenemos $T_a M = (d_a \varphi)^{-1}(T_{a'} \varphi(M \cap V)) = (d_a \varphi)^{-1}(\ker(d_{a'} g)) = \ker(d_a f)$ ✓ ∎

Terminología: Sea $f: \mathcal{U} \subseteq E \to F$ de clase $\mathcal{C}^r$. Decimos que $a \in \mathcal{U}$ es un punto crítico de f si $rg_a(f) < \dim_{\mathbb{R}} F = m$, y en tal caso decimos que $f(a) \in F$ es un valor crítico de f.

Un punto $b \in f(\mathcal{U}) \subseteq F$ es un valor regular de f si $f^{-1}(b)$ no contiene puntos críticos ($\Rightarrow$ b no es un valor crítico).

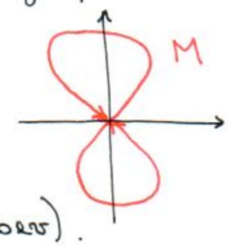
Caso particular importante:

El Teorema anterior implica que si $b \in F$ es un valor regular de f, entonces la fibra $M = f^{-1}(b) = \{x \in \mathcal{U} \text{ tq } f(x) = b\}$ es una subvariedad de $E \simeq \mathbb{R}^n$ con $T_a M = \ker(d_a f)$ para todo $a \in M$. En particular, $\dim(M) = \dim(E) - \dim(F)$ por. Teo. del rango (MAT210).

Ejemplo: Sea $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto x_1^d + \ldots + x_{n+1}^d$. El diferencial $d_a f = (d a_1^{d-1} \ \ldots \ d a_{n+1}^{d-1})$ tiene rango 1 para todo $a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tq } x_1^d + \ldots + x_{n+1}^d = 1\}$ subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$ de $\dim(M) = n$.

Otra forma de construir subvariedades es usando parametrizaciones, pero hay que tener precauciones:



Ejemplo: Sea $f :]-\pi,\pi[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\sin(2t), \sin(t))$

$\Rightarrow$ La imagen $M = f(]-\pi,\pi[)$ es un cerrado, llamado lemniscata, que no es una subvariedad de $\mathbb{R}^2$ (e.g. pues T_0M no es un subev).

Teorema: Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ de clase $\mathcal{C}^r$ de rango constante y tal que la función $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ es abierta (i.e., envía abiertos en abiertos). Entonces:

① La imagen $M = f(\mathcal{U}) \subseteq F$ es una subvariedad de clase $\mathcal{C}^r$.

② Sea $a \in \mathcal{U}$ y $b = f(a) \in M$. Entonces, $T_bM = \operatorname{Im}(d_af)$.

Dem: Sea $a \in \mathcal{U}$ y $b = f(a) \in M$. Por Teo. del rango constante, $\exists\, a \in V \subseteq \mathcal{U}$ y $b \in W \subseteq F$ vecindades abiertas y $\varphi : V \xrightarrow{\simeq} V'$, $\psi : W \xrightarrow{\simeq} W'$ difeos. tq $f(V) \subseteq W$ y tq $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es lineal. Sea $a' = \varphi(a)$ y $b' = \psi(b)$, y consideremos

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "\psi"] \\ V' \arrow[r, "g"'] & W' \end{tikzcd}$$

diagrama conmutativo.

Dado que $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ es abierta: $\exists\, W_0 \subseteq F$ abierto tq $f(V) = M \cap W_0$, y en particular $g(V') \subseteq \psi(W \cap W_0)$.

$\Rightarrow$ Reemplazando W por $W \cap W_0$ y ψ por $\psi|_{W\cap W_0}$, podemos sup. que $f(V) = M \cap W$ y en particular $\psi(M \cap W) = g(V') \subseteq F$. Veamos que $g(V') \subseteq F$ es subvariedad:

En efecto, f abierta $\Rightarrow$ g abierta ✓ Dado que g lineal, $g(V') \subseteq \operatorname{Im}(g)$ es un abierto en un subev de F. Así, $M \subseteq F$ subvar. de clase $\mathcal{C}^r$.

Finalmente, el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "d_af"] \arrow[d, "d_a\varphi"', "\cong"] & F \arrow[d, "d_b\psi", "\cong"'] \\ E \arrow[r, "d_{a'}g"'] & F \end{tikzcd}$$

(Ejer. útil p.7) $\qquad$ g lineal

implica que $T_bM \overset{\searrow}{=} (d_b\psi)^{-1}(T_{b'}\psi(M\cap W)) = (d_b\psi)^{-1}(T_{b'}g(V')) \overset{\downarrow}{=} (d_b\psi)^{-1}(\operatorname{Im}(d_{a'}g))$

$= \operatorname{Im}(d_af)$ ✓ ∎

Una clase muy importante de funciones donde se aplica el resultado anterior es la siguiente:

Def: Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ de clase $\mathcal{C}^r$. Decimos que f es un incrustamiento si es una inmersión y si $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ es un homeomorfismo. En part, $M = f(\mathcal{U})$ es una subvariedad de $F \simeq \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^r$. i.e., f biyectiva y f, f^{-1} son continuas.

Observación práctica: Por teoría de conjuntos, si $f : \mathcal{U} \subseteq E \hookrightarrow F$ es una función continua e inyectiva entonces:

$$f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U}) \text{ es un homeomorfismo} \iff f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U}) \text{ es una \underline{función cerrada}}$$

(ie, envía cerrados en cerrados).

Para verificar esto último, es muy útil considerar la noción siguiente:

Def: Sean X e Y dos espacios topológicos localmente compactos (ie, cada punto $x \in X$ posee una vecindad abierta $\mathcal{U}$ tal que $x \in \mathcal{U} \subseteq K$, para cierto compacto $K \subseteq X$). Decimos que una función continua $f : X \to Y$ es propia si para todo $K \subseteq Y$ compacto, la preimagen $f^{-1}(K) \subseteq X$ es compacto.

Ejemplo: Si Y es un espacio de Hausdorff (ie, $\forall x, y \in Y$ con $x \neq y$ existen vecindades abiertas $x \in \mathcal{U}$, $y \in V$ tales que $\mathcal{U} \cap V = \phi$) entonces todo punto $K = \{y\} \subseteq Y$ es compacto.
$\Rightarrow$ Si $f : X \to Y$ propia, entonces la fibra $f^{-1}(y)$ es compacta.

Prop: Sea $f : X \to Y$ función propia entre espacios top. localmente compactos. Entonces, f es una función cerrada si asumimos que Y es Hausdorff.

Dem: Sea $C \subseteq X$ cerrado y veamos que $f(C) \subseteq Y$ es cerrado: sea $y \in \overline{f(C)}$ y probemos que $y \in f(C)$. Dado que Y loc. compacto, $\exists\, K \subseteq Y$ compacto tq $y \in K$
$\Rightarrow f^{-1}(K)$ es un compacto que cumple $f^{-1}(K) \cap C \neq \phi$. Más generalmente:
$\forall W$ compacto tq $y \in W \subseteq K$, $C \cap f^{-1}(W)$ cerrado $\neq \phi$ contenido en el compacto $C \cap f^{-1}(K)$. Además, la colección $\{C \cap f^{-1}(W)\}_{\substack{y \in W \subseteq K \\ W \text{ compacto}}}$ es estable por intersecciones finitas $\underset{f^{-1}(K) \text{ compacto}}{\Longrightarrow} \displaystyle\bigcap_{\substack{W \text{ compacto} \\ \text{tq } y \in W \subseteq K}} C \cap f^{-1}(W) \neq \phi$ ← "Finite intersection property"

Sea x un punto en dicha intersección, entonces $f(x)$ pertenece a todas las vecindades compactas W de $y \in \overline{f(C)}$. Así, como Y es Hausdorff, $y = f(x) \in f(C)$ ∎

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{(1+i)t} = e^t \cos(t) + i\, e^t \sin(t)$ es un encajamiento.

§5. Lema de Morse

Una aplicación importante de los resultados discutidos en las secciones anteriores es el análisis de funciones cerca de puntos críticos. Esto es el punto de partida de la Teoría de Morse.

Durante esta sección, $\mathcal{U} \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^\infty$.
Así, $a \in \mathcal{U}$ es un punto crítico de f si $d_a f = 0$ ($\iff \nabla f(a) = 0$), y si $a \in \mathcal{U}$ no es un punto crítico entonces f es conjugada a una aplicación lineal sobreyectiva $E \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, módulo un cambio de coord. $\mathcal{C}^\infty$ en una vecindad de a.

Recuerdo: Si $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y consideramos

$$df : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,F)$$
$$a \longmapsto d_a f$$

entonces definimos $d_a^2 f := d_a(df) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,F))$ como el segundo diferencial.
Si $F = \mathbb{R}$, entonces $d_a^2 f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E, E^*)$ y luego $d_a^2 f$ tiene asociada una forma bilineal que también denotaremos $d_a^2 f : E \times E \to \mathbb{R}$. Explícitamente:

$$(d_a^2 f)(u,v) := l_u(v) \quad \text{con } l_u := d_a(df)(u) \in E^* \quad , \forall u, v \in E .$$

Obs: De manera más intrínseca, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E,E^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E \otimes E, \mathbb{R}) \underset{\mathrm{def}}{=} (E\otimes E)^*$ y este último es isomorfo a $\mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(E \times E, \mathbb{R})$ por definición de producto tensorial (cf. MAT214).

Más aún, el Lema de Schwarz señala que si f es de clase $\mathcal{C}^2$ entonces la forma bilineal $d_a^2 f : E \times E \to \mathbb{R}$ es simétrica. Concretamente:
Si $(x_1, \dots, x_n)$ son coordenadas resp. a una base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E \simeq \mathbb{R}^n$, entonces

$$(d_a^2 f)(e_i, e_j) = (d_a^2 f)(e_j, e_i) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

⚠ En MAT290, la Hessiana de f en a es la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica $d_a^2 f$, i.e,

$$H_a f : E \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto H_a f(x) := d_a^2 f(x,x)$$

Como siempre, podemos recuperar la forma bilineal asociada a la forma cuadrática $H_a f$ mediante la "fórmula de polarización"

$$(d_a^2 f)(x,y) = \frac{1}{2}\left(H_a f(x+y) - H_a f(x) - H_a f(y) \right) .$$

Def: Sea $a \in \mathcal{U}$ un punto crítico de $f : \mathcal{U} \subseteq E \to \mathbb{R}$. Decimos que $a \in \mathcal{U}$ es un punto crítico no-degenerado si $H_a f : E \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática no-degenerada (i.e, si la matriz Hessiana $H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right)_{i,j} \in GL_n(\mathbb{R})$ es invertible). En tal caso, se define el índice de Morse de f en a como

$$\mathrm{Ind}_a(f) := \text{n° de valores propios negativos de } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right)$$

i.e, la forma cuadrática $H_a f$ tiene signatura $(n-p, p)$ con $p = \mathrm{Ind}_a(f)$.

Ejercicio útil: Sea $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}'$ difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$ y sea $a' = \varphi(a)$. Probar que si $a \in \mathcal{U}$ es un punto crítico no-degenerado de $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de $\mathrm{Ind}_a(f) = p$, entonces $a' \in \mathcal{U}'$ es un punto crítico no-degenerado de $f' := f \circ \varphi^{-1} : \mathcal{U}' \to \mathbb{R}$ y que $\mathrm{Ind}_{a'}(f') = p$.

Ejercicio* Probar que si $f : \mathcal{U} \subseteq E \to \mathbb{R}$ sólo tiene puntos críticos no-degenerados, entonces $\mathrm{Crit}(f) := \{x \in \mathcal{U} \text{ tq } d_x f = 0\}$ es un conjunto discreto.

Recuerdo (Taylor): Si $f : \mathcal{U} \subseteq E \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y $a \in \mathcal{U}$ es un punto crítico de f, entonces

$$f(a+h) = f(a) + \tfrac{1}{2}(H_a f)(h) + \varepsilon(h)\|h\|^2 \quad \text{con} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 .$$

El resultado principal de esta sección permite refinar lo anterior bajo hipótesis adicionales:

Lema de Morse (1929): Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \to \mathbb{R}$ función de clase $\mathcal{C}^\infty$ y sea $a \in \mathcal{U}$ un punto crítico no-degenerado. Entonces, existe un difeo $\varphi : V \xrightarrow{\sim} W$ definido en una vecindad de 0_E tal que:

① $\varphi(0) = 0$ y $d_0\varphi = Id_E : E \longrightarrow E$

② $f(a + \varphi(x)) = f(a) + \frac{1}{2} H_a f(x)$ en una vecindad de 0_E.

Dem: Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$, entonces integrando por partes se deduce que

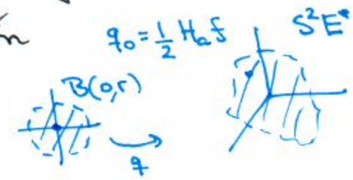
$$\gamma(1) = \gamma(0) + \gamma'(0) + \int_0^1 (1-t)\,\gamma''(t)\,dt . \quad (\star)$$

Si $r \in \mathbb{R}^{>0}$ es tq $B(a,r) \subseteq \mathcal{U}$ y consideramos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $t \mapsto \gamma(t) := f(a + tx)$, donde $x \in B(0,r)$ está fijo.

$\overset{(\star)}{\Longrightarrow} f(a+x) = f(x) + \int_0^1 (1-t)\,(H_{a+tx} f)(x)\,dt$ dado que $d_a f = 0$, ie,

$f(a+x) = f(a) + q_x(x)$ donde $q_x(y) := \int_0^1 (1-t)\,(H_{a+tx}f)(y)\,dt$ es una forma cuadrática. Más aún, dado que f es $\mathcal{C}^\infty$, la aplicación

$$\begin{aligned} q : B(0,r) &\longrightarrow S^2E^* =: \{\text{formas cuadráticas en } E\} \\ x &\longmapsto q_x \end{aligned}$$



es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Dotaremos a E de la forma cuadrática no-degenerada $q_0 \overset{def}{=} \frac{1}{2} H_a f$ y denotamos por $\langle x, y\rangle := \frac{1}{2} d_a^2 f(x,y)$ la forma bilineal simétrica asociada. Además, denotaremos por $S(q_0) \subseteq \mathrm{End}(E)$ al subesp. de aplicaciones lineales simétricas resp. a q_0 (ie, $u : E \to E$ tal que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle \ \forall x, y \in E$), por lo que hay un isomorfismo

$$Q : S(q_0) \xrightarrow{\sim} S^2E^* , \quad u \mapsto Q_u(x) := \langle u(x), x\rangle .$$

Con la notación anterior, probaremos el resultado usando Teo. de Función implícita:

Para $u \in S(q_0)$ definimos la nueva forma cuadrática $u^*(q_0) := q_0 \circ u$, y consideremos la ecuación

$$u^*(q_0) = q_x \quad \text{en } S^2E^* \quad (\star\star)$$

donde $u \in S(q_0)$ es la incognita. Para usar el Teo. de función implícita consideramos

$$F : B(0,r) \times S(q_0) \longrightarrow S^2E^* , \quad (x, u) \longmapsto u^*(q_0) - q_x \quad \text{de clase } \mathcal{C}^\infty$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}^*$ $(\partial_{S(q_0)} F)(0, Id_E) = 2Q$ (ie, dado por $u \mapsto 2Q_u$) que es un isomorfismo!

$\Rightarrow \exists$ función $\mathcal{C}^\infty$ de la forma $x \mapsto u_x$ y definida en una vecindad de 0_E con valores en $S(q_0)$, tal que $u_0 = \mathrm{Id}_E$ y tal que resuelve $(\star\star)$, i.e.,

$$u_x^*(q_0) = q_x$$

$\Rightarrow q_x(x) = u_x^*(q_0)(x) \underset{\text{def}}{=} q_0(u_x(x))$, y en particular tenemos que

$$f(a+x) = f(a) + \frac{1}{2}(H_a f)(u_x(x))$$

Finalmente, si consideramos $\beta : 0_E \in V \subseteq E \longrightarrow 0_E \in W \subseteq E$, $x \mapsto u_x(x)$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ entonces se calcula $d_0\beta = \mathrm{Id}_E$, que es invertible. Así, reduciendo V y W si fuera necesario, obtenemos que β es un difeo $\mathcal{C}^\infty$ y $\varphi := \beta^{-1} : W \xrightarrow{\sim} V$ verifica lo pedido. ■

Corolario: Sea $f : \mathcal{U} \subseteq E \longrightarrow \mathbb{R}$ función de clase $\mathcal{C}^\infty$ y sea $a \in \mathcal{U}$ un punto crítico no-degenerado de índice p. Entonces, $\exists\, a \in V \subseteq \mathcal{U}$ vecindad abierta y funciones $u_1, \dots, u_n : V \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tales que:

1. $(u_1(a), \dots, u_n(a)) = (0, \dots, 0)$.
2. $f(x) = f(a) + u_1^2(x) + \dots + u_{n-p}^2(x) - u_{n-p+1}^2(x) - \dots - u_n^2(x)$.
3. La función $x \mapsto (u_1(x), \dots, u_n(x))$ es un difeo. entre V y una vecindad abierta de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Dem: Basta escoger una base ortogonal $e_1, \dots, e_n$ respecto a la forma cuadrática $q_0 = \frac{1}{2} H_a f$ y tal que $q_0(e_i) = 1$ si $i \in \{1, \dots, n-p\}$ y $q_0(e_i) = -1$ si $i \in \{n-p+1, \dots, n\}$. Dicha base siempre existe gracias al Teorema de Sylvester sobre clasificación de formas cuadráticas reales de signatura dada (en este caso, $(n-p, p)$). Finalmente, si $\beta : V \subseteq E \xrightarrow{\sim} W \subseteq E$ es la función construida en el ~~lema~~ anterior, entonces basta considerar la escritura $\beta(x-a) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$ resp. a la base $e_1, \dots, e_n$. ■

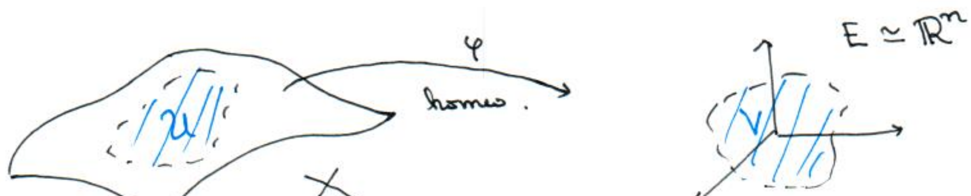
§6. Variedades diferenciables y funciones diferenciables

⚠ En todo lo que sigue, las variedades serán de clase $\mathcal{C}^\infty$. Un resultado importante de Whitney señala que toda variedad de clase $\mathcal{C}^r$ con $r \geq 1$ admite una estructura $\mathcal{C}^\infty$. [Ver, por ejemplo, Capítulo 2 de "Differential Topology" de Hirsch].

Sea X un espacio topológico. Una carta local de dimensión n de X es un homeomorfismo

$$\varphi : \mathcal{U} \subseteq X \longrightarrow V \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$$

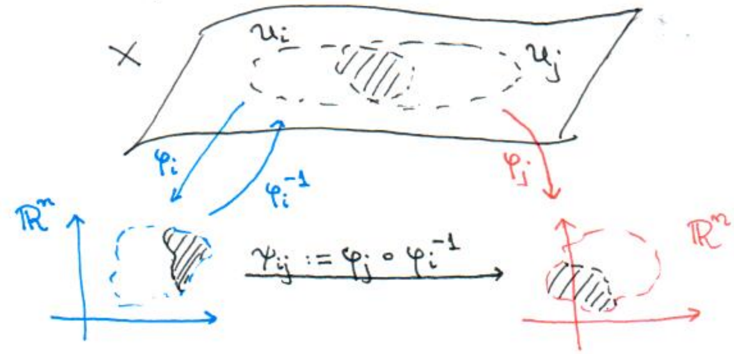
definido en un abierto $\mathcal{U} \subseteq X$. Típicamente, dicha carta se denotará por $(\mathcal{U}, \varphi)$.



Dadas dos cartas $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ y $(\mathcal{U}_j, \varphi_j)$ con $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, el homeomorfismo

$$\psi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \xrightarrow{\sim} \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$$

es llamado un <u>cambio de cartas</u>. Diremos que φ_i y φ_j son <u>compatibles</u> si ψ_{ij} es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^\infty$.



Def: Sea X un esp. topológico. Un <u>atlas</u> (de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dimensión n) es una colección de cartas locales compatibles $\mathcal{A} = \{\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} V_i \subseteq \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ tales que $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$.

<u>Obs importante</u>: ① Los atlas en X están ordenados (parcialmente) por inclusión.

② El Lema de Zorn implica que todo atlas $\mathcal{A}$ está contenido en un atlas maximal. Explícitamente, $\mathcal{A}_{max}$ es la colección de cartas locales en X que son compatibles con todas las cartas locales de $\mathcal{A}$.

Def: Sea X un esp. topológico. Una estructura de <u>variedad diferenciable</u> de dimensión n en X es un atlas maximal de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dimensión n en X.

<u>Ejemplos</u>:

① Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ un abierto de una var. diferenciable definida por un atlas maximal $\mathcal{A} = \{\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} V_i \subseteq \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$, entonces $\mathcal{A}|_{\mathcal{U}} := \{\varphi_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U} \to \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}) \subseteq V_i\}_{i \in I}$ es un atlas maximal en $\mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U}$ "hereda" una estructura de var. diferenciable de X.

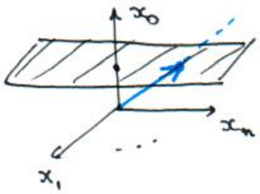
② <u>Subvariedades de $\mathbb{R}^n$</u>:

Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ subvar. de clase $\mathcal{C}^\infty$ de $\dim(M) = m$, i.e., para todo $a \in M$ existe una vecindad abierta $a \in \mathcal{U}_a \subseteq \mathbb{R}^n$ y un difeo $\mathcal{C}^\infty$ $\psi_a : \mathcal{U}_a \to \mathcal{U}_a' \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\psi_a(M \cap \mathcal{U}_a)$ está contenido en $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$, i.e., $\psi_a(M \cap \mathcal{U}_a) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathcal{U}_a'$.
Si consideramos la proyección $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$, $(x,y) \mapsto x$ y consideramos las funciones $\varphi_a := \pi \circ \psi_a|_{M \cap \mathcal{U}_a} : M \cap \mathcal{U}_a \xrightarrow{\sim} V_a := (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathcal{U}_a' \subseteq \mathbb{R}^m$ entonces la colección $\{\varphi_a\}_{a \in M}$ define un atlas de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dimensión m en M. Aquí, el hecho que $\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}$ sean compatibles se deduce del hecho que $\psi_b \circ \psi_a^{-1}$ son difeo $\mathcal{C}^\infty$.

③ La <u>esfera</u> $S^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ es una variedad diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$ y de dimensión n.

(4) El espacio proyectivo real se define como el conjunto
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := \{\text{rectas vectoriales } 0 \in \ell \text{ en } \mathbb{R}^{n+1}\}.$$
Cada recta ℓ está determinada por un "vector director" $v = (x_0, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Más aún si $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces v y λv determinan la misma recta, denotada $[v] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Así, $[v] = [x_0, \dots, x_n] = [\lambda x_0, \dots, \lambda x_n]$ en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

En particular, si $[x_0, \dots, x_n] \in \mathcal{U}_0 := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \text{ tal que } x_0 \neq 0\}$ entonces podemos definir una carta local "reescalando" para suponer $x_0 = 1$:



$$A_0 := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tq } x_0 = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$$
$$\varphi_0 : \mathcal{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} A_0 \simeq \mathbb{R}^n$$
$$[x_0, \dots, x_n] \longmapsto \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

De manera similar, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ se define $\mathcal{U}_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \text{ tq } x_i \neq 0\}$ y se construye la carta local $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} A_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tq } x_i = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$.

Ejercicio Verificar que los cambios de carta $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ son difeomorfismos $\mathcal{C}^\infty$.

Obs: En rigor, antes de construir las cartas locales debemos dotar a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ de una topología! Para ello, notemos que toda recta $\ell = [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ intersecta la esfera unitaria S^n en dos puntos diametralmente opuestos $a := \frac{x}{\|x\|}$ y $-a$. Luego, se tiene
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n / \langle a \mapsto -a \rangle$$
es un conjunto cociente. Así, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ puede ser dotado de la topología cociente.

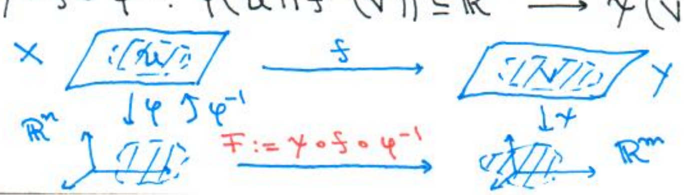
Ejercicio* Sea X un esp. topológico y G un grupo de homeomorfismos de X. Si denotamos por X/G al conjunto cociente (de órbitas de G) y por $\pi : X \to X/G$, $x \mapsto [x] \underset{\text{def}}{=} G \cdot x$ la proyección canónica, probar que:

(a) La topología cociente, definida al declarar que $\mathcal{U} \subseteq X/G$ es abierto si $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto de X, es una topología en X/G.

(b) La proyección canónica $\pi : X \to X/G$ es una función abierta.
[Indicación: Probar que $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} g(V)$ para todo $V \subseteq X$ abierto.]

(5) **Ejercicio** Probar que si X e Y son var. diferenciables, entonces el producto $X \times Y$ también.

Def: Una función continua $f : X \to Y$ entre dos variedades diferenciables es una función diferenciable (o suave) si para todo par de cartas $\varphi : \mathcal{U} \subseteq X \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : V \subseteq Y \to \mathbb{R}^m$, la función $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap f^{-1}(V)) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$.



"F es la expresión de f en las cartas φ y ψ"

<u>Ejemplo</u>: Sean X, Y, Z tres variedades diferenciables, si $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son funciones diferenciables, entonces la composición $g \circ f: X \to Z$ es diferenciable.

<u>Def</u>: Sean X e Y variedades diferenciables. Una función biyectiva $f: X \to Y$ es un <u>difeomorfismo</u> si f y f^{-1} son funciones diferenciables. Además:

① Decimos que X e Y son <u>difeomorfas</u> si $\exists f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ difeomorfismo, y escribimos $X \cong Y$.

② Denotamos $\mathrm{Diff}(X) := \{\varphi: X \xrightarrow{\simeq} X \text{ difeomorfismo}\}$ el grupo de difeomorfismos de X.

<u>Ejemplo</u>: Sea X una variedad diferenciable, y sea $\varphi: \mathcal{U} \subseteq X \xrightarrow{\simeq} V \subseteq \mathbb{R}^n$ una carta local. Entonces, φ es un difeomorfismo entre las var. diferenciables $\mathcal{U}$ y V, i.e., $\mathcal{U} \cong V$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que la superficie $X := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$ es difeomorfa a la esfera S^2.

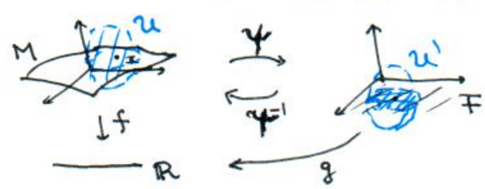
<u>Prop</u>: Sea $M \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de clase $\mathcal{C}^\infty$. Entonces:

① La inclusión $i: M \hookrightarrow E$ es una función diferenciable.

② Una función $f: M \to \mathbb{R}$ es diferenciable $\Leftrightarrow$ Para todo $x \in M$ existe una vecindad $x \in \mathcal{U} \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$ y una función $\Phi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tq $\Phi|_{M \cap \mathcal{U}} = f|_{M \cap \mathcal{U}}$.

<u>Dem</u>: ① Sea $x \in M$ y $\varphi: V \subseteq M \xrightarrow{\simeq} V' \subseteq F \simeq \mathbb{R}^m$ una carta local de M definida en $V := M \cap \mathcal{U}$, inducida por un difeo. $\psi: \mathcal{U} \subseteq E \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}' \subseteq E$. Entonces, la expresión de i en las cartas φ de M y ψ de $E \simeq \mathbb{R}^n$ es la inclusión $V' \hookrightarrow \mathcal{U}'$, que es $\mathcal{C}^\infty$ ✓

② Sea $f: M \to \mathbb{R}$ diferenciable y $x \in M$. Consideremos una vecindad $x \in \mathcal{U} \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$ y un difeo. $\psi: \mathcal{U} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}' \subseteq E$ tal que $\psi(M \cap \mathcal{U}) = \mathcal{U}' \cap F$ con $F \simeq \mathbb{R}^m$ subev de E, y sea $\varphi := \psi|_{\mathcal{U} \cap M}$ la carta local asociada.



$\Rightarrow g := f \circ \psi^{-1}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathcal{U}' \cap F$.

Si escribimos $E = F \oplus F_0 \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \xrightarrow{\pi} F \simeq \mathbb{R}^m$

entonces en torno a $x' = \varphi(x) \in \mathcal{U}'$ la función $g \circ \pi: \mathcal{U}' \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{C}^\infty$ y extiende a g.

$\Rightarrow \Phi := g \circ \pi \circ \psi$ extiende a f en una vecindad de x en $E \simeq \mathbb{R}^n$ ✓

Recíprocamente, si existe una vecindad $x \in \mathcal{U} \subseteq E \simeq \mathbb{R}^n$ y una función $\Phi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\Phi|_{M \cap \mathcal{U}} = f|_{M \cap \mathcal{U}}$, entonces tenemos que $f|_{M \cap \mathcal{U}}$ es la composición de la inclusión $i: M \cap \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{U}$ y de Φ. Dado que ambas son $\mathcal{C}^\infty$ (por ①), deducimos que f es $\mathcal{C}^\infty$ ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}^*$ Describir explícitamente cartas locales para la esfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y probar que la proyección canónica $\pi: S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es una función diferenciable.

[Indicación: Ver Example 1.4 del libro de John Lee "Intro. to smooth manifolds"].

§7. Pegado de variedades y variedades cocientes

En la sección anterior, construimos cartas de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ de manera conjuntista y a posteriori nos preocupamos de su topología (cociente). Este es un procedimiento general:

Sea X un conjunto, y supongamos que $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ son subconjuntos de X tales que $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$. Supongamos que existen funciones biyectivas $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} Y_i$ donde cada Y_i es una var. diferenciable de $\dim(Y_i) = n$, entonces:

Teorema de pegado: Supongamos que:
① Los conjuntos $Y_{ij} := \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ son abiertos de Y_i.
② Para todos $i, j \in I$, la función $\psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : Y_{ij} \xrightarrow{\sim} Y_{ji}$ son difeomorfismos.
Entonces, existe una única estructura de variedad diferenciable de dimensión n en X tal que los $\mathcal{U}_i \subseteq X$ son abiertos y las funciones $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} Y_i$ son difeomorfismos.

Obs: Usualmente decimos que la variedad X se obtiene "pegando" las variedades Y_i usando los difeomorfismos ψ_{ij}.

Comenzamos por analizar la topología de X:

Lema: Existe una única topología en X tal que los $\mathcal{U}_i \subseteq X$ son abiertos y los $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} Y_i$ son homeomorfismos.

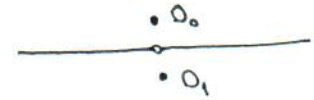
Dem: Para la unicidad, notamos que si dicha topología existe entonces $V \subseteq X$ es abierto $\Leftrightarrow \varphi(V \cap \mathcal{U}_i)$ es un abierto de Y_i para todo $i \in I$ ✓

Para la existencia, notamos que la biyección $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} Y_i$ permite definir una estructura de esp. topológico en $\mathcal{U}_i$: un subconj. $V \subseteq \mathcal{U}_i$ es abierto si $\varphi_i(V)$ es un abierto de Y_i. Así, $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ es un abierto de $\mathcal{U}_i$ y de $\mathcal{U}_j$ (por ①) y luego las topologías inducidas por $\mathcal{U}_i$ y por $\mathcal{U}_j$ sobre $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ coinciden.
$\Rightarrow$ Declaramos como abiertos de X los conjuntos $W \subseteq X$ tq $W \cap \mathcal{U}_i$ es abierto en $\mathcal{U}_i$ para todo $i \in I$. Por definición, los $\mathcal{U}_i$ son abiertos y $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} Y_i$ son homeos! ■

Dem del Teorema: El método anterior permite dotar a $\mathcal{U}_i$ de estructura de var. diferenciable de tal suerte que $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} Y_i$ sea un difeomorfismo: las cartas locales de $\mathcal{U}_i$ son de la forma $\psi \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(W) \xrightarrow{\sim} W' \subseteq \mathbb{R}^n$ donde $\psi : W \xrightarrow{\sim} W' \subseteq \mathbb{R}^n$ es una carta de Y_i. Finalmente, la condición ② asegura que las estructuras diferenciables inducidas por $\mathcal{U}_i$ y $\mathcal{U}_j$ coinciden sobre $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$, y luego las cartas locales de $\mathcal{U}_i$ y de $\mathcal{U}_j$ son compatibles. ■

Ejercicio** Probar que X es un esp. topológico de Hausdorff si y sólo si cada Y_i es un esp. top. de Hausdorff y si el grafo de los difeomorfismos $\psi_{ij} : Y_{ij} \xrightarrow{\sim} Y_{ji}$ es cerrado en $Y_i \times Y_j$.

Ejemplo (Recta con dos orígenes): El pegado de variedades diferenciables de Hausdorff no es siempre de Hausdorff. Explícitamente, sea $X := (\mathbb{R} \times \{0,1\})/\sim$, donde $(x,0) \sim (x,1)$ si $x \neq 0$

$X =$ 

y sea $[x,t] = [(x,t)] \in X$ la clase de $(x,t) \in \mathbb{R} \times \{0,1\}$. Consideremos las inclusiones

$$\psi_i : \mathbb{R} \hookrightarrow X, \quad x \mapsto [x,i]$$

y sea $\mathcal{U}_i := \psi_i(\mathbb{R}) \subseteq X$. Entonces, $\varphi_i := \psi_i^{-1} : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}$, $[x,i] \to x$ verifican las hipótesis del Teorema anterior: $\varphi_0(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1) = \varphi_1(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1) = \mathbb{R}^*$ son abiertos y $\psi_{ij} = Id_{\mathbb{R}^*}$ es un difeomorfismo. Así, X es una variedad diferenciable ✓

Sin embargo, no podemos separar $0_0 = [0,0]$ y $0_1 = [0,1]$ mediante abiertos disjuntos !

Un caso particular importante del pegado de variedades es la construcción de variedades cocientes por grupos de difeomorfismos:

Sea X un esp. topológico localmente compacto, y sea G un grupo de homeomorfismos de X. Si dotamos a G de la topología discreta (ie, todo subconj $H \subseteq G$ es abierto) entonces la "función grafo"

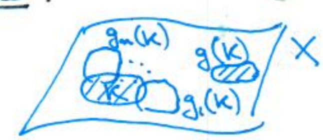
$$\sigma : X \times G \to X \times X, \quad (x,g) \mapsto (x, g(x))$$

es continua.

Def: Decimos que la acción $G \curvearrowright X$ es propia si σ es una función propia.

Lema: La acción $G \curvearrowright X$ es propia $\Leftrightarrow$ Para todo $K \subseteq X$ compacto, el conjunto de los $g \in G$ tq $K \cap g(K) \neq \emptyset$ es finito.

Dem:



($\Leftarrow$) Sea $L \subseteq X \times X$ compacto y veamos que $\sigma^{-1}(L)$ compacto:
Basta probarlo para $L = K \times K$, con $K \subseteq X$ compacto. En tal caso, $\sigma^{-1}(L)$ son los $(x,g) \in X \times G$ tq $x \in K$ y $g(x) \in K$. Por hipótesis, $\sigma^{-1}(L) \subseteq K \times \{g_1, \ldots, g_n\}$ y luego $\sigma^{-1}(L)$ es compacto ✓

($\Rightarrow$) Sea $K \subseteq X$ compacto, y sea $p : X \times G \to G$, $(x,g) \mapsto g$. Entonces, el conjunto de los $g \in G$ tq $K \cap g^{-1}(K) \neq \emptyset$ es precisamente $p(\sigma^{-1}(K \times K))$, ie, la imagen de un compacto por una función continua. Dado que G está dotado de la topología discreta, todo compacto (eg. $p(\sigma^{-1}(K \times K)) \subseteq G$) es finito ✓ ■

Corolario: Si G es un grupo finito de homeomorfismos de X, entonces $G \curvearrowright X$ es propia.

El siguiente Ejercicio nos da un criterio práctico para asegurar que X/G, dotado de la topología cociente, es Hausdorff:

Ejercicio ** Sea $G \curvearrowright X$ como antes, y sea $Y := X/G$ espacio topológico cociente.

① Consideremos la acción de $G \times G$ en $X \times X$, y dotemos a $(X \times X)/(G \times G)$ de la topología cociente. Probar que $(X\times X)/(G\times G) \xrightarrow{\sim} Y \times Y$, $[(x,y)] \mapsto ([x],[y])$ es un homeomorfismo.

② Deducir que si $\Gamma = \mathrm{Im}(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \{(x, g(x))\,;\, x \in X,\ g \in G\}$ es <u>cerrado</u> en $X \times X$ entonces Y es un espacio topológico de Hausdorff.

[Indicación: Por def, un esp. top. Y es Hausdorff $\iff \Delta_Y := \{(y,y),\ y \in Y\} \subseteq Y \times Y$ es cerrada.]

③ Usar ② para probar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n / \langle a \mapsto -a \rangle$ es Hausdorff.

[**Prop**: Sup. que X es Hausdorff y loc. compacto, y sea G grupo de homeomorfismos. Si $G \curvearrowright X$ es <u>propia</u>, entonces $Y = X/G$ es Hausdorff.

Dem: Por el Ejercicio anterior, basta probar que $\mathrm{Im}(\sigma) = \sigma(X \times G)$ es cerrado en $X \times X$. Como σ es una función propia, la imagen del cerrado $X \times G$ es cerrada ✓ ∎

[**Def**: La acción $G \curvearrowright X$ es <u>libre</u> si para todo $x \in X$, $G_x = \{g \in G \text{ tq } g(x) = x\}$ es la identidad.

[**Teorema**: Sea X una variedad diferenciable de Hausdorff y $G \subseteq \mathrm{Diff}(X)$ grupo discreto tq la acción $G \curvearrowright X$ es <u>propia</u> y <u>libre</u>. Entonces, existe una estructura de variedad diferenciable en X/G tal que $\pi : X \to X/G$ es diferenciable.

Idea de Dem (Ver Lee, Theorem 21.10 para más detalles):

El hecho que $G \curvearrowright X$ sea propia y libre permite cubrir X por abiertos $V_i \subseteq X$ tales que la proyección $\pi|_{V_i} : V_i \hookrightarrow X/G$ sea <u>inyectiva</u>. Dado que π es abierta, $\pi|_{V_i}(V_i) = \mathcal{U}_i$ es un abierto de X/G.

Sea $\varphi_i := \pi|_{V_i}^{-1} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} V_i$ homeomorfismo. Por definición, $\varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ son los $x \in V_i$ tales que $\pi(x) = \pi(y)$ para cierto $y \in V_j$. Veamos que el cambio de cartas $\psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \xrightarrow{\sim} \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ es diferenciable:

Sea $x \in \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ con $\pi(x) = \pi(y)$ y con $y \in V_j \underset{\pi|_{V_j} \text{ iny.}}{\Longrightarrow} y = \psi_{ij}(x)$.

Por otra parte, $\pi(x) = \pi(y) \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, g \in G$ tal que $y = g(x)$. Así, $\psi_{ij} = g$ en una vecindad de x, y luego ψ_{ij} es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en una vecindad de x.

Concluimos aplicando el Teorema de pegado ✓ ∎

Ejercicio * Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de V. Sea Λ el grupo de difeomorfismos generado por las traslaciones $t_1, \ldots, t_n$, donde $t_j(x) = x + e_j$. Probar que $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$ y que $\Lambda \curvearrowright \mathbb{R}^n$ es libre y propia.

⚠ La variedad cociente $T := V/\Lambda$ es el <u>toro real</u> n-dimensional

$n = 2$

§8. Particiones de la unidad

Sea X una variedad diferenciable de Hausdorff y σ-compacta (ie, X es unión numerable de compactos). Recordemos que si $\mu : X \to \mathbb{R}$ es una función continua su soporte es

$$\mathrm{Supp}(\mu) := \overline{\{x \in X \text{ tq } \mu(x) \neq 0\}} \subseteq X .$$

Teorema: Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces, existen funciones diferenciables $\mu_i : X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ verificando:

1. $\mathrm{Supp}(\mu_i) \subseteq \mathcal{U}_i$ para todo $i \in I$.
2. La colección $\{\mathrm{Supp}(\mu_i)\}_{i\in I}$ es localmente finita, ie, para todo compacto $K \subseteq X$ existen finitos índices $i \in I$ tales que $\mathrm{Supp}(\mu_i) \cap K \neq \emptyset$.
3. $\sum_{i\in I} \mu_i(x) = 1$ para todo $x \in X$.

La familia de funciones $\{\mu_i\}_{i\in I}$ es una partición de la unidad resp. al cubrimiento $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$.

Necesitaremos el siguiente resultado general de topología:

Hecho (ver eg. NCATLAB): Sea X esp. top. localmente compacto y σ-compacto. Entonces, X es paracompacto, ie, para todo cubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ existe un cubrimiento abierto $\{V_j\}_{j\in J}$ más fino (ie, todo $V_j \subseteq \mathcal{U}_i$ para algún $i \in I$) y localmente finito.

Dem del Teorema: Usamos la notación del Hecho anterior, y notamos que podemos asumir que $\exists\ \varphi_j : W_j \to B(0,2) \subseteq \mathbb{R}^n$ carta local tq $V_j = \varphi_j^{-1}(B(0,1))$

Sea $\mu : B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n \to [0,1[\,,\ x \mapsto \exp\left(\frac{-1}{1-\|x\|^2}\right)$ y definamos

$$\lambda_j := \begin{cases} \mu \circ \varphi_j & \text{en } V_j \\ 0 & \text{fuera de } V_j \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_j$ es $\mathcal{C}^\infty$ y $\lambda_j > 0$ en V_j. Escojamos $\alpha : J \to I$ función tal que $V_j \subseteq \mathcal{U}_{\alpha(j)}$ y construyamos las funciones μ_i: La suma $\lambda := \sum_{j\in J} \lambda_j$ es $\mathcal{C}^\infty$ y $\lambda > 0$ en X, pues $\mu_j(x) = 0$ en cada $x \in X$ salvo por finitos índices $j \in J$. Así,

$$\mu_i := \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{j\in J \\ \text{tal que } \alpha(j)=i}} \lambda_j \qquad \text{con } \mathrm{Supp}(\mu_i) \subseteq \bigcup_{\substack{j\in J \\ \text{tq } \alpha(j)=i}} \subseteq \mathcal{U}_i$$

tiene $\mathrm{Supp}(\mu_i)$ localmente finito y verifica $\sum_{i\in I} \mu_i(x) = 1$. ■

Ejercicio Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una subvariedad de clase $\mathcal{C}^\infty$ y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que existe $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ tal que $\Phi|_M = f$.

§9. Espacio tangente

La definición de espacio tangente en una variedad abstracta es bastante similar al de una subvariedad $M \subseteq \mathbb{R}^n$. La única sutileza es que debemos tomar en cuenta las cartas locales:

<u>Construcción</u>: Sea X una variedad diferenciable definida por un atlas $\mathcal{A}$, y sea $a \in X$. Consideremos el <u>conjunto de caminos</u>

$$\mathcal{C}_a(X) := \{ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X \text{ continuos y derivables en } t=0, \text{ tales que } \gamma(0)=a \}.$$

En el conjunto $\mathcal{C}_a(X)$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \exists\, \varphi : \mathcal{U} \subseteq X \to V \subseteq \mathbb{R}^n \text{ carta local en torno al punto } a \in \mathcal{U} \subseteq X \text{ tal que } (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que podemos cambiar "Existe φ carta local" por "Para toda φ carta local" en la relación de equivalencia anterior (ie, la definición no depende de elección de cartas).

<u>Def</u>: Sea X var. diferenciable y $a \in X$. El <u>espacio tangente</u> de X en $a \in X$ es el conjunto cociente $T_aX := \mathcal{C}_a(X)/\sim$ (ie, clases de equivalencia de caminos), y sus elementos $v = [\gamma] \in T_aX$ son llamados <u>vectores tangentes</u> en $a \in X$.

<u>Obs importante</u>:

① Si $\varphi : \mathcal{U} \subseteq X \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$ es una carta local en $a \in X$, entonces la aplicación

$$\varphi_* : T_aX \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n, \quad [\gamma] \longmapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)$$

es biyectiva (!). Luego, podemos usar φ_* para dotar a T_aX de estructura de $\mathbb{R}$-e.v.

② Sea $f : X \to Y$ función suave entre variedades diferenciables. Para todo $a \in X$, f induce una función $\mathcal{C}_a(f) : \mathcal{C}_a(X) \to \mathcal{C}_{f(a)}(Y)$, $\gamma \longmapsto f \circ \gamma$.

<u>Prop</u>: La función $\mathcal{C}_a(f)$ es compatible con la relación de equivalencia $\sim$. Más aún, la función inducida $d_af : T_aX \to T_{f(a)}Y$ es <u>lineal</u> y es llamada el <u>diferencial de f en el punto $a \in X$</u>.

<u>Dem</u>: Sea $a \in X$ y $b = f(a) \in Y$. Sean $\varphi : a \in \mathcal{U} \subseteq X \to E \simeq \mathbb{R}^n$ y $\psi : b \in V \subseteq Y \to F \simeq \mathbb{R}^m$ cartas locales, y sea $g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^n \to V' \subseteq \mathbb{R}^m$ la expresión de f en esas cartas.

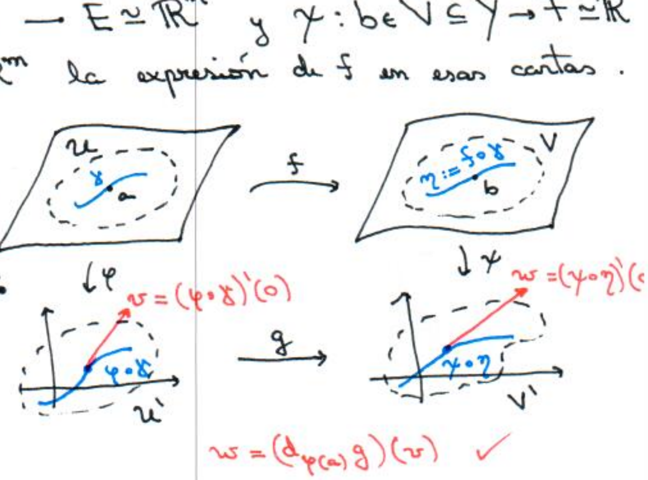
Sea $\gamma \in \mathcal{C}_a(X)$ y $\eta = f \circ \gamma \in \mathcal{C}_b(Y)$

$\Rightarrow \psi \circ \eta = g(\varphi \circ \gamma)$ y luego $(\psi \circ \eta)'(0) = (d_{\varphi(a)}g)((\varphi \circ \gamma)'(0))$

ie, $d_af : T_aX \to T_bY$, $[\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma]$ bien definida!

Más aún, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_aX & \xrightarrow{d_af} & T_bY \\ \varphi_* \downarrow \wr & & \wr \downarrow \psi_* \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d_{\varphi(a)}g} & \mathbb{R}^m \end{array}$$



Por definición, las biyecciones verticales son lineales, y luego d_af también. ■

Propiedades del diferencial $d_a f$ (cf. §1):

① Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones suaves entre var. diferenciables, y si $a \in X$. Entonces, se verifica la regla de la cadena $d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f$.

② En part, si $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ difeomorfismo y $b = f(a) \in Y$, entonces $d_a f : T_a X \xrightarrow{\sim} T_b Y$ es lineal invertible con $(d_a f)^{-1} = d_b(f^{-1})$.

③ Las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ con valores reales forman una $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{C}^\infty(X)$. Además:

a) La función $\mathcal{C}^\infty(X) \to (T_a X)^* := T_a^* X$, $f \mapsto d_a f$ es lineal.

b) Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(X)$, entonces se verifica la regla de Leibniz en $T_a X$:

$$d_a(fg) = f(a)\, d_a g + g(a)\, d_a f .$$

Prop: Sea $f : X \to Y$ función suave entre var. diferenciables y supongamos que $d_a f$ es invertible en cierto punto $a \in X$. Entonces, existe $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad abierta de $a \in X$ tal que $f(\mathcal{U}) \subseteq Y$ es abierto y tal que $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ es un difeomorfismo.

Dem: Sean φ y ψ cartas locales en torno a $a \in X$ y $b = f(a) \in Y$, y sea g la expresión de f en dichas cartas. Entonces, $d_{\varphi(a)} g$ es invertible y luego el Teo. de Inversión Local implica que g es localmente un difeo. Como φ y ψ son difeo, f es difeo. localmente ✓ ■

Caso particular importante:

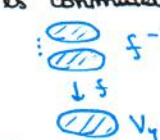
Una función suave $f : X \to Y$ entre var. diferenciables es una función étale (o no-ramificada) si $d_a f : T_a X \xrightarrow{\sim} T_{f(a)} Y$ es invertible para todo $a \in X$. Esta noción, muy importante en Topología, se relaciona con la definición siguiente:

Def: Sea $f : X \to Y$ función suave entre var. dif. Decimos que f es un revestimiento ("covering") si f es sobreyectiva y si:

Para cada $y \in Y$, $\exists\, V_y \subseteq Y$ vecindad abierta y D variedad de dimensión 0 tal que $\exists$ difeomorfismo $V_y \times D \cong f^{-1}(V_y)$ de tal suerte que

$$\begin{tikzcd} V_y \times D \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & f^{-1}(V_y) \arrow[dl, "f"] \\ & V_y & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.



Obs: En términos prácticos, $f^{-1}(V_y) = \bigsqcup_{i \in D} \mathcal{U}_i$ unión disjunta de abiertos tales que $f|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} V_y$ es un difeomorfismo.

⚠ Si Y es conexa, el cardinal $\deg(f) := \# f^{-1}(y)$ es constante y es llamado el grado del revestimiento f.

Ejemplo: $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $a \mapsto [a]$ es un revestimiento de grado 2.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea G un grupo discreto de difeomorfismos de X tal que $G \curvearrowright X$ es propia y libre. Probar que $\pi : X \to X/G$ es un revestimiento.

Prop: Sea $f: X \to Y$ una función suave étale y propia entre var. dif. de Hausdorff. Sup. que Y es conexa, entonces f es un revestimiento de grado finito.

Dem: f es sobreyectiva, pues su imagen $f(X) \subseteq Y$ es abierta y cerrada $\overset{Y \text{ conexa}}{\Longrightarrow} f(X) = Y$.
Por otra parte, la fibra $f^{-1}(y)$ es un esp. topológico discreto (pues f difeo. local) y compacto (pues f propia), ie, $f^{-1}(y)$ es un conj. finito ✓
Para $a \in f^{-1}(y)$, $\exists\, a \in \mathcal{U}_a$ abierto tq $f|_{\mathcal{U}_a}: \mathcal{U}_a \xrightarrow{\sim} f(\mathcal{U}_a)$ es un difeomorfismo.
Como X es Hausdorff, podemos asumir que los $\mathcal{U}_a$ son disjuntos (pero no nec. difeo!).
Consideremos el cerrado $f(X \setminus \bigcup_{a \in f^{-1}(y)} \mathcal{U}_a) \subseteq Y$, que no contiene a $y \in Y$, y consideremos $V \subseteq Y$ vecindad abierta de $y \in Y$ que no intersecta dicho cerrado
$\Rightarrow f^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{a \in f^{-1}(y)} \mathcal{U}_a$ y los abiertos $W_a := \mathcal{U}_a \cap f^{-1}(V)$ son disjuntos y cubren $f^{-1}(V)$.
Así, si escogemos V de tal suerte que esté contenido en el abierto $\bigcap_{a \in f^{-1}(y)} f(\mathcal{U}_a)$ entonces $f|_{W_a}: W_a \xrightarrow{\sim} V$ es un difeomorfismo ✓ ■

§10. Subvariedades diferenciables

En esta sección, todas las variedades serán Hausdorff y σ-compactas.

Def: Sea X var. diferenciable de $\dim(X) = n$. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es una subvariedad de $\dim(Y) = m$ si:
Para todo $a \in Y$, $\exists\, \varphi: a \in \mathcal{U} \subseteq X \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^n$ carta local tal que $\varphi(Y \cap \mathcal{U})$ sea una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m.

Obs: ① Componiendo por cartas de $\mathbb{R}^n$, podemos asumir que $\varphi(Y \cap \mathcal{U}) = \mathcal{U}' \cap F$, donde $F \simeq \mathbb{R}^m$ es un sub-ev. de $\mathbb{R}^n$.

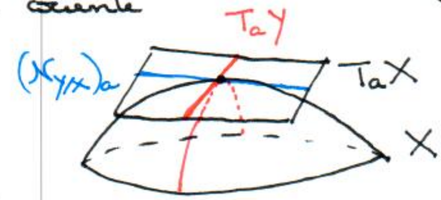
② La carta $\varphi: \mathcal{U} \subseteq X \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^n$ está dada en coordenadas por $(u_1, \dots, u_n)$ con $u_j: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ función suave; diremos que $(u_1, \dots, u_n)$ es un sistema de coordenadas.
Así, un subconj $Y \subseteq X$ es una subvar. de $\dim(Y) = m$ si $\exists\, (u_1, \dots, u_n)$ sistema de coord. en torno al punto $a \in Y$ tal que

$$Y \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \text{ tq } u_{m+1}(x) = \dots = u_n(x) = 0\}.$$

③ Toda subvar. $Y \subseteq X$ hereda una estructura de var. diferenciable: Sean $\{\varphi_i: \mathcal{U}_i \subseteq X \to \mathcal{U}_i' \subseteq \mathbb{R}^n\}_{i \in I}$ cartas locales de X tq $\varphi_i(Y \cap \mathcal{U}_i) =: Z_i$ sea una subvar. de $\mathbb{R}^n$, y consideremos los homeomorfismos $\psi_i: Y \cap \mathcal{U}_i \to Z_i$ obtenidos al restringir los φ_i $\Rightarrow$ los ψ_i verifican las hipótesis del Teo. de Pegado ✓

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $Y \subseteq X$ subvar, y sea $i: Y \hookrightarrow X$ la inclusión. Probar que el diferencial $d_a i: T_aY \hookrightarrow T_aX$ es inyectivo $\forall a \in Y$ y luego podemos identificar a T_aY como un subev. de T_aX.

Terminología: Sea $Y \subseteq X$ una subvariedad, el espacio vectorial cociente
$$(N_{Y/X})_a := T_aX / T_aY$$
es el *espacio normal* a Y en el punto $a \in Y$.



Las construcciones de subvariedades de X son análogas a $\mathbb{R}^n$:

Def: Sea $f: X \to Y$ una función suave entre variedades diferenciables. Dado $a \in X$, se define el *rango* de f en a como $rg_a(f) := rg\,(d_af)$.

Obs: La función $rg: X \to \mathbb{N}$, $a \mapsto rg_a(f)$ es semi-continua inferior, pues en cartas locales en X e Y el rango está dado por el rango de la expresión local de f.

Teorema: Sea $f: X \to Y$ una función suave entre variedades diferenciables. Supongamos que $rg_a(f)$ es constante $\forall a \in X$, entonces la fibra $X_b := f^{-1}(b)$ es una subvar. de X para todo $b \in Y$ y además $T_aX_b = \ker(d_af)$ para todo $a \in f^{-1}(b)$.

Dem: Consideramos cartas locales $\varphi: \mathcal{U} \subseteq X \to \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\psi: V \subseteq Y \to V' \subseteq \mathbb{R}^m$ tales que $a \in f^{-1}(b)$ pertenezca a $\mathcal{U}$, $b \in V$, y tal que $f(\mathcal{U}) \subseteq V$. Por hipótesis, la expresión de f en cartas locales, $g: \mathcal{U}' \to V'$, tiene rango constante.
$\Rightarrow g^{-1}(b')$, con $b' := \psi(b)$, es una subvar de $\mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^n$.
Como $\varphi(X_b \cap \mathcal{U}) = \mathcal{U}' \cap (g^{-1}(b'))$, tenemos que $X_b = f^{-1}(b)$ es una subvar. de X.
Finalmente, el isomorfismo $d_a\varphi$ envía $\ker(d_af)$ en $\ker(d_{\varphi(a)}g)$, y luego $T_aX_b = \ker(d_af)$ ✓ ■

Recuerdo / Def: Decimos que $a \in X$ es un *punto crítico* de f si $rg_a(f) < \dim(Y)$. En tal caso, decimos que $f(a) \in Y$ es un *valor crítico*. Los puntos $y \in \mathrm{Im}(f)$ que no son valores críticos son llamados *valores regulares*.

Corolario: Sea $f: X \to Y$ una función suave entre variedades diferenciables y sea $b \in Y$ un valor regular. Entonces, $X_b = f^{-1}(b)$ es una subvariedad de X.

Hecho (Teorema de Sard): Sea $f: X \to Y$ una función suave entre variedades diferenciables, y sea $\mathrm{Crit}(f) \subseteq X$ el conjunto de puntos críticos de f. Entonces, $\mathrm{Crit}(f)$ tiene medida nula (ie, podemos cubrir $\mathrm{Crit}(f)$ por cartas $(\varphi, \mathcal{U})$ tales que $\varphi(\mathrm{Crit}(f) \cap \mathcal{U})$ tiene medida de Lebesgue nula en $\mathbb{R}^n$). En part, $\mathrm{int}(\mathrm{Crit}(f)) = \emptyset$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^{>0}$ y sea $X = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \text{ tq } \sum_{j=0}^{m} a_j x_j^2 = 1\}$ elipsoide. Determinar los puntos y valores críticos de $f: X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$.

Aplicación del Teorema del Rango Constante:

Def: Un <u>grupo de Lie</u> es un grupo G dotado de una estructura de variedad diferenciable tal que la multiplicación $m: G\times G \to G$, $(x,y)\mapsto xy$ sea de clase $\mathcal{C}^\infty$.

<u>Ejemplo</u>: ① El grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie de dimensión n^2.

② Sea G un grupo de Lie y $a\in G$ fijo. Entonces, las mult. por izq. y derecha

$$L_a: G \xrightarrow{\sim} G,\ x\mapsto ax \qquad y \qquad R_a: G\xrightarrow{\sim} G,\ x\mapsto xa$$

son difeomorfismos. Por ejemplo, para L_a, notamos que $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ es biyectiva y que $L_a = m\circ i_a$ donde $i_a: G\hookrightarrow G\times G$, $x\mapsto (a,x)$ es diferenciable. Así, L_a es suave y $L_{a^{-1}} = L_a^{-1}$ también ✓

<u>Ejercicio</u> Probar que $\varphi: G\xrightarrow{\sim} G$, $x\mapsto x^{-1}$ es un difeomorfismo.
[Indicación: Aplicar el Teo. de la Función Implícita en una vecindad de $(1_G, 1_G)$ considerando la ecuación $xy = 1_G$, con $y\in G$ la incógnita.]

Def: Una <u>acción</u> de un grupo de Lie G en una var. diferenciable X es una acción de grupo $G\times X\to X$, $(g,x)\mapsto g\cdot x$ que además es una función suave.

<u>Lema</u>: Sea X var. dif. y $G \curvearrowright X$ la acción de un grupo de Lie G. Entonces, para todo $x\in X$, la función $ev_x: G\to X$, $g\mapsto gx$ tiene <u>rango constante</u>.

<u>Dem</u>: Cada $g\in G$ define $\varphi_g: X\xrightarrow{\sim} X$ difeomorfismo. Por otra parte, para $g,h\in G$ tenemos que $(gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$, i.e., $ev_x\circ L_g = \varphi_g\circ ev_x$. Derivando en $h\in G$:

$$d_{gh}\, ev_x \circ \underbrace{d_h L_g}_{\text{isom}} = \underbrace{d_{h\cdot x}\varphi_g}_{\text{isom}} \circ d_h\, ev_x \quad \text{, i.e., } rg_{gh}(ev_x) = rg_h(ev_x)\ \forall g,h\in G \ ✓ \ \blacksquare$$

<u>Consecuencia</u>: Para todo $x\in X$, el <u>estabilizador</u> $G_x \overset{\text{def}}{=} \{g\in G \text{ tq } g\cdot x = x\}$ es un subgrupo de Lie de G (i.e., un subgrupo y subvariedad de G).

<u>Ejercicio</u> Probar que el grupo ortogonal $O_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$.

Otra forma de construir subvariedades es mediante el concepto de "transversalidad":

Def: Sea $f: X\to Y$ una función suave entre var. dif., y sea $Z\subseteq Y$ subvariedad. Decimos que f es <u>transversal</u> a $Z\subseteq Y$ en el punto $a\in X$ si: $f(a)\notin Z$ o bien $f(a)\in Z$ y la función lineal compuesta

$$T_aX \xrightarrow{d_af} T_{f(a)}Y \twoheadrightarrow N_{Z/Y, f(a)} \overset{\text{def}}{=} T_{f(a)}Y / T_{f(a)}Z$$

es <u>sobreyectiva</u>, i.e., $T_{f(a)}Y = \mathrm{Im}(d_af) + T_{f(a)}Z \overset{\text{def}}{=} \langle \mathrm{Im}(d_af), T_{f(a)}Z\rangle$.
Si lo anterior se cumple $\forall a\in X$, decimos que f es <u>transversal a $Z\subseteq Y$</u>.

Prop: Sea $f: X \to Y$ función suave transversal a $Z \subseteq Y$. Entonces, $f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de X y $T_a f^{-1}(Z) = (d_a f)^{-1}(T_{f(a)} Z)$.

Dem: Sea $a \in X$ tq $f(a) \in Z$, y sea $r = \operatorname{codim}_Y(Z) \overset{\text{def}}{=} \dim(Y) - \dim(Z)$. Por def de subvar, $\exists\, f(a) \subseteq V \subseteq Y$ abierto y $g: V \to \mathbb{R}^r$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ de rango r tq $Z \cap V = \{y \in V \text{ tq } g(y) = 0\}$. Así, en $f^{-1}(V)$ tenemos que $f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(V) = \{x \in f^{-1}(V) \text{ tq } (g \circ f)(x) = 0\}$ y $g \circ f$ tiene rango constante r allí $\Rightarrow f^{-1}(Z)$ es una subvariedad de X con $T_a f^{-1}(Z)$ dado por $\ker(d_a(g \circ f)) \overset{\boxed{\text{Ejercicio}}}{=} (d_a f)^{-1}(T_{f(a)} Z)$. ■

$\boxed{\text{Ejercicio útil}}$ Sean $Y, Z \subseteq X$ subvariedades tales que $\forall a \in Y \cap Z$ se tiene que $T_a X = T_a Y + T_a Z$. Probar que $Y \cap Z \subseteq X$ es una subvar y que $T_a(Y \cap Z)$ está dado por $T_a Y \cap T_a Z$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$* Sea X una variedad compacta y $f: X \xrightarrow{\simeq} X$ un difeomorfismo. Supongamos que para todo punto fijo $a \in X$ de f se tiene que $\lambda = 1$ no es valor propio de $d_a f$. Probar que $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, f(x))$ es transversal a la diagonal $\Delta_X \subseteq X \times X$, y deducir que f sólo posee finitos puntos fijos.

Tal como para $\mathbb{R}^n$ tenemos el siguiente resultado sobre "parametrizaciones":

Teorema: Sea $f: X \to Y$ función suave entre var. diferenciables con rango constante. Supongamos que $f: X \to f(X)$ es una función abierta, entonces $f(X) \subseteq Y$ es una subvariedad y además $T_{f(a)} f(X) = \operatorname{Im}(d_a f)$ $\forall a \in X$. ■

Recuerdo / Def: Sea $f: X \to Y$ función suave entre var. diferenciables. Decimos que f es:

① Una *inmersión* si $d_a f: T_a X \hookrightarrow T_{f(a)} Y$ es inyectiva $\forall a \in X$.

② Un *incrustramiento* si $f(X) \subseteq Y$ es una subvar y si $f: X \xrightarrow{\simeq} f(X)$ es un difeo.

Por el Teorema anterior, una inmersión $f: X \to Y$ es un incrustamiento si $f: X \to f(X)$ es un homeomorfismo.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$* El objetivo de este problema es probar una versión débil de un resultado de Whitney: Sea M una variedad dif. *compacta* de $\dim(M) = m$, y sea $\{\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\simeq} V_i \subseteq \mathbb{R}^m\}_{1 \le i \le k}$ un cubrimiento de M por cartas locales. Considerar $\{\rho_1, \dots, \rho_k\}$ una partición de la unidad respecto a $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1,\dots,k}$ y definamos

$$f: M \to \mathbb{R}^{km+k}, \quad x \mapsto (\rho_1(x)\varphi_1(x), \dots, \rho_k(x)\varphi_k(x), \rho_1(x), \dots, \rho_k(x))$$

① Probar que f es inyectiva.

② Probar que f es una inmersión.

Hecho (Whitney, 1944): Una variedad dif. M de $\dim(M) = m \geq 2$ puede ser incrustada (resp. inmersa) en $\mathbb{R}^{2m}$ (resp. $\mathbb{R}^{2m-1}$).

Parte II: Campos Vectoriales

⚠ En lo que sigue, todas las variedades dif. serán de Hausdorff y σ-compactas.

§11. Fibrado Tangente

Comencemos por considerar una subvar. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimensión m, y definamos

$$TM := \{(x,v) \in M \times \mathbb{R}^n \text{ tal que } v \in T_x M\}$$

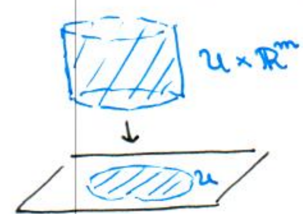
y sea $\pi : TM \to M$, $(x,v) \mapsto x$ proyección. Adicionalmente, para todo $\mathcal{U} \subseteq M$ abierto definamos $TM|_{\mathcal{U}} := \pi^{-1}(\mathcal{U})$.

Proposición: Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ subvar. de dimensión m. Entonces:

① TM es una subvariedad de $M \times \mathbb{R}^n$ de $\dim(TM) = 2m$.

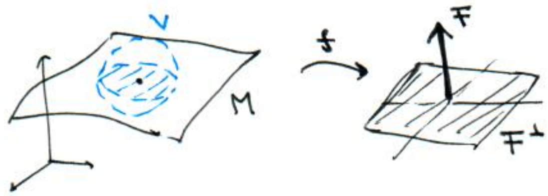
② Todo punto $x \in M$ posee una vecindad abierta $x \in \mathcal{U} \subseteq M$ y un difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} TM|_{\mathcal{U}} = \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[rr, "\sim"', "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \arrow[dl, "pr_{\mathcal{U}}"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$



sea conmutativo. Decimos que TM es el fibrado tangente de M.

Dem: El problema es local en $a \in M$: ① Sea $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m} = F$ submersión



tal que $M \cap V = \{x \in V \text{ tq } f(x) = 0\}$ y además $T_x M = \ker(d_x f)$.

$\Rightarrow TM \cap (V \times \mathbb{R}^n)$ está dado por los $(x,v) \in V \times \mathbb{R}^n$ tq $\left\{\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ (d_x f)(v) = 0 \end{array}\right\}$.

Basta verificar que $\varphi : V \times \mathbb{R}^n \to F \times F$, $(x,v) \mapsto (f(x), (d_x f)(v))$ es submersión: $d_{(x,v)}\varphi : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \to F \oplus F$ está dada por $\begin{pmatrix} d_x f & 0 \\ (d_x^2 f)(v,\cdot) & d_x f \end{pmatrix}$ que es sobreyectiva!

$\Rightarrow TM$ es una subvar de $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ contenida en $M \times \mathbb{R}^n \Rightarrow TM \subseteq M \times \mathbb{R}^n$ subvar ✓

Para ②, sea $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^m$ carta local de la var. diferenciable M

$\Rightarrow \Theta : TM|_{\mathcal{U}} \to \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m$, $(x,v) \mapsto (x, (d_x\varphi)(v))$ es $\mathcal{C}^\infty$ (pues φ se extiende localmente a $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} V' \subseteq \mathbb{R}$

Además, Θ^{-1} está dada por $(x,u) \mapsto (x, (d_x\varphi)^{-1}(u))$ que también es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Así, $\Theta : TM|_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m$ difeomorfismo ✓ ■

Consideremos ahora una variedad diferenciable (abstracta) M de $\dim(M) = m$, y sea

$$TM := \bigsqcup_{x \in M} T_x M$$

dotado de la proyección $\pi : TM \to M$, $(x,v) \mapsto x$, de tal suerte que $\pi^{-1}(x) = T_x M$.

Dotemos al fibrado tangente TM de estructura de variedad diferenciable:

Sea $\varphi_i : \mathcal{U}_i \subseteq M \xrightarrow{\sim} V_i \subseteq \mathbb{R}^m$ carta local, y consideremos

$$\Phi_i : \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \subseteq TM \longrightarrow \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^m \ , \ (x,v) \mapsto (x, (d_x\varphi_i)(v))$$

la cual es biyectiva, pues φ_i es difeomorfismo.

Prop: Existe una única estructura de variedad diferenciable en TM tal que:

① $\pi : TM \to M$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

② Las biyecciones Φ_i son difeomorfismos.

Más aún, la variedad TM es Hausdorff y σ-compacta.

Dem: Para la existencia y unicidad usamos el Teorema de Pegado: Sea $\varphi_j : \mathcal{U}_j \xrightarrow{\sim} V_j \subseteq \mathbb{R}^m$ otra carta local, y sea $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ el cambio de cartas. Entonces,

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^m \ , \ (x,v) \mapsto (x, d_{\varphi_i(x)}(\varphi_{ij})(v))$$

es un difeo $\mathcal{C}^\infty$ definido en un abierto de $\mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^m$. Así, $\exists!$ estructura de var. dif en TM tal que los $\pi^{-1}(\mathcal{U}_i)$ son abiertos y los Φ_i son difeo. Dado que el diagrama

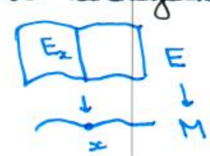
$$\begin{tikzcd} TM|_{\mathcal{U}_i} \underset{\text{def}}{=} \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \arrow[rr, "\sim", "\Phi_i"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^m \arrow[dl, "pr_{\mathcal{U}_i}"] \\ & \mathcal{U}_i & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, deducimos que π es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Finalmente, las dos últimas propiedades se verifican por definición y quedan como $\boxed{\text{Ejercicio}}$. ■

§12. Fibrados vectoriales

Los resultados de la sección precedente motivan la siguiente noción:

Def: Sea M variedad diferenciable. Una *fibración en espacios vectoriales* (reales) en M es una variedad diferenciable E junto con una función suave sobreyectiva $\pi : E \to M$ tal que cada fibra $\pi^{-1}(x) := E_x$ es un $\mathbb{R}$-e.v.



$E_x \simeq \mathbb{R}^{r_x}$

Terminología: M es la *base* de la fibración y E es el *espacio total*. Si $\mathcal{U} \subseteq M$ abierto, $E|_{\mathcal{U}} := \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ también es una fibración.

Ejemplo: La *fibración trivial* está dada por $\pi = pr_M : M \times \mathbb{R}^r \to M$, $(x,v) \mapsto x$.

Def: Sean $\pi_E : E \to M$ y $\pi_F : F \to M$ dos fibraciones vectoriales en M, y sea $f : E \to F$ una función suave. Decimos que f es un *morfismo de fibraciones vectoriales* si:

① El diagrama
$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & F \arrow[dl, "\pi_F"] \\ & M & \end{tikzcd}$$
es conmutativo, i.e., $f(E_x) \subseteq F_x$ para todo $x \in M$.

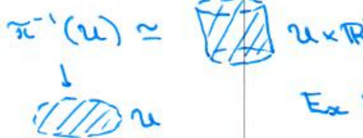
② La restricción $f_x : E_x \longrightarrow F_x$ es $\mathbb{R}$-lineal para todo $x \in M$.

Decimos que f es un *isomorfismo* si es un difeomorfismo y cada $f_x : E_x \xrightarrow{\sim} F_x$ es un isom.

<u>Def</u>: Una fibración en espacios vectoriales $\pi : E \to M$ es un <u>fibrado vectorial de rango r</u> si adicionalmente:

Para todo $x \in M$, $\exists$ vecindad abierta $x \in \mathcal{U}$ y un isomorfismo de fibraciones sobre $\mathcal{U}$

$$\begin{tikzcd} E|_{\mathcal{U}} = \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[rr, "\theta_{\mathcal{U}}", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{U} \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "pr_{\mathcal{U}}"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$



$E_x \simeq \mathbb{R}^r \quad \forall x \in M$.

El isomorfismo $\theta_{\mathcal{U}}$ es llamado una <u>trivialización</u> (local) del fibrado $E \to M$.

<u>Obs</u>: Un isomorfismo de fibrados vect. es un isom. de las fibraciones vect. subyacentes.

<u>Ejemplos</u>: ⓪ El fibrado tangente $\pi : TM \to M$ es un fibrado vectorial de rango $\dim(M)$.

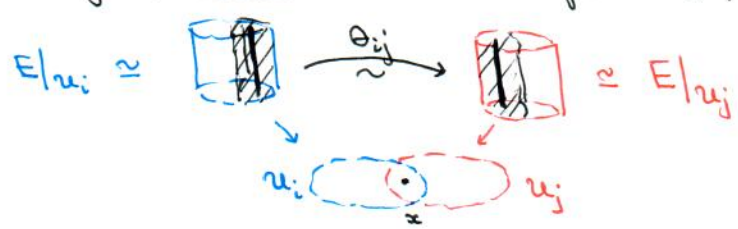
① El <u>fibrado trivial</u> de rango r es $\mathbb{R}^r_M := M \times \mathbb{R}^r$, con $\pi = pr_M : \mathbb{R}^r_M \to M$.

② Sean $E = M \times \mathbb{R}^r$ y $F = M \times \mathbb{R}^s$ fibrados triviales, y $f : E \to F$ un morfismo de fibrados vectoriales. Entonces, la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} M \times \mathbb{R}^r \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "pr_M"'] & & M \times \mathbb{R}^s \arrow[dl, "pr_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

y la linealidad de $f_x : E_x = \{x\} \times \mathbb{R}^r \to F_x = \{x\} \times \mathbb{R}^s$ implica que f es de la forma $f(x,v) = (x, g(x)v)$ donde $g : M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s) \simeq M_{s\times r}(\mathbb{R})$. En particular, f es un isomorfismo $\Leftrightarrow g(x) \in GL_r(\mathbb{R})$ para todo $x \in M$.

<u>Construcción</u> (Matrices de transición): Sean $\theta_i : E|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^r$ y $\theta_j : E|_{\mathcal{U}_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_j \times \mathbb{R}^r$ dos trivializaciones del fibrado $E \to M$, entonces $\theta_{ij} := \theta_j \circ \theta_i^{-1}$ está definida sobre $(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^r$ y es necesariamente de la forma $(x,v) \mapsto (x, g_{ij}(x)v)$



donde $g_{ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \to GL_r(\mathbb{R})$ son $\mathcal{C}^\infty$ y se llaman <u>matrices de transición</u> de E.

En la práctica, las matrices de transición nos permiten reducir enunciados sobre fibrados vectoriales a cálculos de álgebra lineal. Por ejemplo:

<u>Lema</u>: Sea $f : E \to F$ un morfismo de fibrados vectoriales sobre M. Si $f_a : E_a \xrightarrow{\sim} F_a$ es un isomorfismo para cierto $a \in M$, entonces f es un isomorfismo en una vecindad de a.

<u>Dem</u>: Localmente, en una trivialización común de E y F en torno al punto $a \in M$, f está dada por $(x,v) \mapsto (x, g(x)(v))$, con $g(a) \in GL_r(\mathbb{R})$. Dado que la condición $\det \neq 0$ es abierta en $M_n(\mathbb{R})$, $g(x)$ es invertible $\forall x \in \mathcal{U}$ vecindad abierta del punto $a \in M$ ∎

Ejemplos más exóticos:

① La banda de Möbius es el fibrado vectorial de rango 1 dado por $E = ([0,1]\times\mathbb{R})/\sim$ con $(0,t)\sim(1,-t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$ y donde $\pi : E \longrightarrow [0,1]/\sim \;\simeq S^1$ está dado por $\pi([x,t]) = e^{2\pi i x} \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$.

② En $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{\text{rectas } 0\in l \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\}$ se define el fibrado de Hopf como

$$H := \{([x], v) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{n+1} \text{ tal que } v\in[x] =: l_x\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{n+1}.$$

La primera proyección $\pi : H \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es tal que $\pi^{-1}([x]) = l_x \cong \mathbb{R}$ y permite probar que H es un fibrado vectorial de rango 1 en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

⚠ Tal como mencionamos antes, las matrices de transición permiten hacer álgebra lineal sobre fibrados vectoriales. Veamos un ejemplo concreto:

Ejemplo importante (Fibrado dual): Sea $E\longrightarrow M$ un fibrado vectorial de rango r, y sea E^* el conjunto de pares (x,u) donde $x\in M$ y $u\in E_x^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_x,\mathbb{R})$ espacio dual de E_x. Consideremos la proyección $\pi : E^*\longrightarrow M$, $(x,u)\longmapsto x$ y veamos que es un fibrado vect:

Fijemos $V\simeq\mathbb{R}^r$ esp. vectorial y sea $\theta_i : E|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_i\times V$ trivialización local de E en $\mathcal{U}_i\subseteq M$. Sea $\theta_{i,x} = \theta_i|_{E_x} : E_x \longrightarrow \{x\}\times V \cong V$ y consideremos la biyección

$$\varphi_i : E^*|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_i\times V^*, \quad (x,u)\longmapsto (x, {}^t\theta_{i,x}^{-1}(u))$$

Recuerdo: Si $f : V\to W$ lineal, se define ${}^tf : W^*\to V^*$, $u\mapsto u\circ f$

Veamos que el Teorema del Pegado implica que $\exists!$ estr. de var. diferenciable en E^* tal que π es $\mathcal{C}^\infty$ y tal que los φ_i son difeomorfismos:

Sea $\theta_j : E|_{\mathcal{U}_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_j\times V$ otra trivialización y $\varphi_j : E^*|_{\mathcal{U}_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_j\times V^*$ la biyección asociada. Basta notar que si $g_{ij} : \mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j \longrightarrow GL_r(\mathbb{R})$ son las matrices de transición asociadas a $\theta_{ij} = \theta_j\circ\theta_i^{-1}$ entonces $\varphi_{ij} = \varphi_j\circ\varphi_i^{-1} : (\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)\times V^* \xrightarrow{\sim} (\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)\times V^*$ está dada por $(x,u)\longmapsto (x, {}^tg_{ij}^{-1}(x)(u)) \Rightarrow \varphi_{ij}$ son difeomorfismos ✓

Más ejemplos: Lo anterior se generaliza a muchas construcciones de álgebra lineal!

Sean $E\to M$ y $F\to M$ dos fibrados vectoriales. Entonces:

① Si $Q(E_x) := \{\text{formas cuadráticas en } E_x\}$, entonces $Q(E) := \bigsqcup_{x\in M} Q(E_x) \longrightarrow M$ es un fibrado vectorial.

② $E\oplus F := \bigsqcup_{x\in M} E_x\oplus F_x \longrightarrow M$ fibrado vectorial.

③ $\mathrm{Hom}(E,F) := \bigsqcup_{x\in M} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(E_x,F_x) \longrightarrow M$ fibrado vectorial.

<u>Def</u>: Sea $E \xrightarrow{\pi} M$ fibrado vectorial y $F \hookrightarrow E$ una subvar. Decimos que $\pi|_F : F \to M$ es un <u>subfibrado vectorial</u> de rango m de E si:

① Cada fibra F_x es un subev de dimensión m de E_x.
② La fibración en esp. vectoriales $\pi|_F : F \to M$ es localmente trivial.

<u>Ejemplo</u>: El fibrado tangente $TM \to M$ de una subvar $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subfibrado del fibrado trivial $M \times \mathbb{R}^n \to M$ de rango n.

<u>Prop</u>: Sea $f : E \twoheadrightarrow F$ un morfismo sobreyectivo de fibrados vectoriales, entonces

$$\ker(f) := \bigsqcup_{x\in M} \ker(f_x) \longrightarrow M$$

es un subfibrado vectorial de E.

<u>Dem</u>: La afirmación es local en M, por lo que podemos asumir que $E = M \times \mathbb{R}^r$ es el fibrado trivial. Sea $a \in M$ y consideremos $V = \ker(f_a) \equiv \{e \in \mathbb{R}^r \text{ tq } f_a(e) = 0\}$.
Si escogemos $W \subseteq \mathbb{R}^r$ subev tq $\mathbb{R}^r = V \oplus W$, entonces

$$E = M \times \mathbb{R}^r = (M \times V) \oplus (M \times W) \underset{\text{def}}{=} V_M \oplus W_M \quad \text{suma de fibrados triviales.}$$

Escribiendo $f = (g \;\; h)$ por filas, tenemos que $h : W_M \to F$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales (teo. del rango) en una vecindad $\mathcal{U}' \subseteq M$ de $a \in M$.

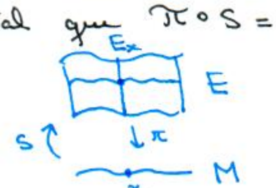
Así, en $\mathcal{U}'$ tenemos que para $e = (x, v \oplus w)$:

$$f(e) = 0 \iff g(v) + h(w) = 0 \iff w = -h^{-1}(g(v)).$$

Luego, $\mathcal{U}' \times V \hookrightarrow E|_{\mathcal{U}'}$, $(x, v) \longmapsto (x, (v \oplus -h^{-1}g(v)))$ define un encajamiento (parametrización) cuya imagen $\ker f|_{\mathcal{U}'}$ es una subvariedad de $E|_{\mathcal{U}'}$. Así, obtenemos una trivialización $\mathcal{U}' \times V \xrightarrow{\sim} \ker f|_{\mathcal{U}'}$ que permite ver a $\ker f$ como subfibrado de E ■

Una de las definiciones más importantes de esta sección es la siguiente.

<u>Def</u>: Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial de rango r. Una <u>sección</u> de E es una función suave $s : M \to E$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_M$, ie, $s(x) \in E_x$ para todo $x \in M$.



⚠ El conjunto $\Gamma(M,E) := \{s : M \to E \text{ sección de } E \xrightarrow{\pi} M\}$ puede ser dotado de estructura de $C^\infty(M)$-módulo (ie, un espacio vectorial donde los "escalares" son funciones en $C^\infty(M)$. En efecto, si $s, t \in \Gamma(M,E)$ y $\lambda \in C^\infty(M)$ se define

$$(\lambda s + t)(x) := \lambda(x)\, s(x) + t(x) \in E_x \quad \text{para todo } x \in M.$$

$\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Si $E = M \times \mathbb{R}^r$ fibrado trivial, entonces $\Gamma(M,E) \simeq C^\infty(M)^{\oplus r}$.

Ejercicio Sea $f : E \to F$ un morfismo de fibrados vectoriales sobre la var. dif. M. Probar que $\Gamma(f) : \Gamma(M,E) \to \Gamma(M,F)$, $s \mapsto f \circ s$ está bien definido y es $C^\infty(M)$-lineal.

Otra forma de construir fibrados vectoriales es mediante pullback (ie, "tirar para atrás").

<u>Construcción</u>: Sea $f : X \to Y$ una función suave entre variedades diferenciables y sea $\pi : F \to Y$ un fibrado vectorial en Y. Consideremos el conjunto

$$E = f^*F := \{ (x,t) \in X \times F \text{ tales que } f(x) = \pi(t) \}$$

y sea $p : E \to X$, $(x,t) \mapsto x$. Así, $E_x = p^{-1}(x) \overset{\text{dy}}{=} F_{f(x)}$ es un $\mathbb{R}$-e.v.

Prop: ① f^*F es una subvariedad de $X \times F$.

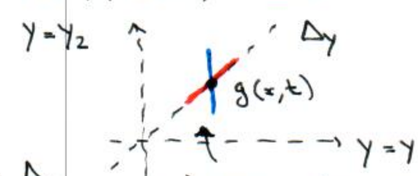
② La fibración $p : f^*F \to X$ es un fibrado vectorial.

③ Hay un isomorfismo natural $\Gamma(X, f^*F) \simeq \mathrm{Hom}_f(X,F)$, donde $\mathrm{Hom}_f(X,F)$ es el esp. vectorial de las funciones suaves $\sigma : X \to F$ tales que $f = \pi \circ \sigma$.

El fibrado vectorial f^*F es el <u>pullback</u> de $F \xrightarrow{\pi} Y$ a X por $f : X \to Y$.

<u>Dem</u>: Para ①, definimos $g := (f,\pi) : X \times F \to Y \times Y$, $(x,t) \mapsto (f(x), \pi(t))$ con

$$d_{(x,t)}g = \begin{pmatrix} d_x f & 0 \\ 0 & d_t\pi \end{pmatrix} \begin{matrix} Y = Y_1 \\ Y = Y_2 \end{matrix}$$
$$\qquad\qquad \begin{matrix} X & \quad F \end{matrix} \quad \text{sobreyectiva}$$



Sea $Z = \Delta_Y = \{ (y,y), y \in Y \} \subseteq Y \times Y$ diagonal y (x,t) tq $g(x,t) \in \Delta_Y$.

$\Rightarrow T_{g(x,t)}(Y \times Y) = \mathrm{Im}\,(d_{(x,t)}g) + T_{g(x,t)}Z$ ¡generan todo el tangente!

ie, g es <u>transversal</u> a $Z = \Delta_Y \Rightarrow g^{-1}(\Delta_Y) \overset{\text{dy}}{=} f^*F$ es una subvariedad de $X \times F$ ✓

Para ②, consideramos $V \subseteq Y$ abierto que trivializa F, ie, tal que existe

$$\theta_V : F|_V \xrightarrow{\sim} V \times \mathbb{R}^r, \quad t \mapsto (\pi(t), v(t))$$
$$\pi \searrow \quad \swarrow pr_V$$
$$V$$

trivialización. Entonces, sobre $U := f^{-1}(V)$ la función $E|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^r$ dada por $(x,t) \mapsto (x, v(t))$ es una trivialización de $E|_U \xrightarrow{p} U$ ✓ (Ejercicio: Convencerse !)

Finalmente, si $pr_F : E \to F$, $(x,t) \mapsto t$ es la segunda proyección y $s \in \Gamma(X,E)$ entonces $\sigma_s := pr_F \circ s : X \to F$ verifica $\pi \circ \sigma_s = f$. Así, obtenemos

$$\Gamma(X,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}_f(X,F), \quad s \mapsto \sigma_s.$$

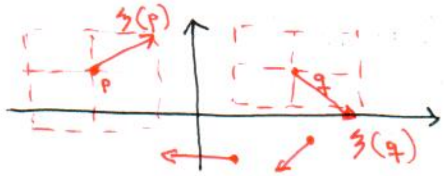
Recíprocamente, si $\sigma : X \to F$ es tal que $f = \pi \circ \sigma$ entonces $s_\sigma : X \to X \times F$ dada por $s_\sigma(x) := (x, \sigma(x))$ tiene imagen en $E = f^*F$ y es una sección en $\Gamma(X,E)$ ✓ ■

<u>Ejemplo importante</u>: Sea $f : X \to Y$ función suave y $a \in X$. Entonces, el diferencial $d_a f : T_a X \to T_{f(a)} Y \underset{\text{dy}}{=} (f^*TY)_a$ induce un morfismo de fibrados vectoriales <u>en X</u> dado por $df : TX \to f^*TY$.

§13. Campos de vectores y Derivada de Lie

Def: Sea M una variedad diferenciable. Un <u>campo de vectores</u> (o campo vectorial) en M es una sección $\xi \in \Gamma(M, TM)$ del fibrado tangente TM.

⚠ En $\mathbb{R}^2$, $T_p\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$. Por esto se usa la notación $\xi(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$



(MAT024)

Históricamente, $\Gamma(M,TM)$ se denota $\mathcal{H}(M)$ (o también $\mathfrak{X}(M)$) y es un $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulo pues si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $\xi \in \mathcal{H}(M)$ entonces $f\xi \in \mathcal{H}(M)$.

Obs: Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ subvariedad, entonces $\xi \in \mathcal{H}(M)$ puede pensarse como una función suave $\xi : M \to \mathbb{R}^n$ tal que $\xi(x) \in T_xM$ para todo $x \in M$.

Construcción: Sea $\varphi : M \to N$ función suave entre var. diferenciables y sea $\xi \in \mathcal{H}(M)$ un campo de vectores en M. La aplicación

$$M \longrightarrow TN \ , \ x \longmapsto (d_x\varphi)(\xi(x))$$

envía x en un vector en $T_{\varphi(x)}N$ pues $\xi(x) \in T_xM$ para todo $x \in M$. Así, si φ es un <u>difeomorfismo</u>, entonces la composición

$$\eta : N \xrightarrow{\varphi^{-1}} M \longrightarrow TN \ , \ y \longmapsto (d_{\varphi^{-1}(y)}\varphi)(\xi(\varphi^{-1}(y)))$$

define una sección de $TN \to N$, i.e., un campo vectorial en N que denotaremos por $\eta = \varphi_*(\xi)$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\varphi : M \xrightarrow{\sim} N$ difeomorfismo. Probar que:

① La función $\xi \longmapsto \varphi_*(\xi)$ es $\mathbb{R}$-lineal.

② Si para $f : N \to \mathbb{R}$ suave definimos $\varphi^*(f) := f \circ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$, entonces se tiene que $\varphi_*(\varphi^*(f)\xi) = f\,\varphi_*(\xi)$.

⚠ Otra forma de entender los campos de vectores es mediante "derivaciones". De manera intuitiva, cada vector $\xi(x) \in T_xM$ determina "<u>derivadas direccionales</u>":

Sea $\xi \in \mathcal{H}(M)$ un campo de vectores en M y sea $f : M \to \mathbb{R}$ función suave. Entonces, la composición de $d_xf : T_xM \to \mathbb{R}$ con $\xi(x) \in T_xM$ nos da la función suave

$$\Theta_\xi(f) : M \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \longmapsto (d_xf)(\xi(x)).$$

llamada la <u>derivada de Lie</u> de f respecto a $\xi \in \mathcal{H}(M)$ (también denotada $\mathcal{L}_\xi f$).

La función $\Theta_\xi : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, $f \longmapsto \Theta_\xi f$ es $\mathbb{R}$-lineal y verifica que

$$\Theta_\xi(fg) = \Theta_\xi(f)\,g + f\,\Theta_\xi(g) \quad \forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad \text{(regla de Leibniz)}.$$

Ejemplo: Sea $M = \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $TM = M \times \mathbb{R}^n$. Así, un campo de vectores puede ser pensado como una función $\xi : M \to \mathbb{R}^n$. Sea $\xi_i = (0, .., 0, \underset{i\text{-ésima coord}}{1}, 0, ..., 0) = e_i$ campo vect. constante, entonces $\Theta_{\xi_i}(f) \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

⚠ Lo anterior justifica la notación, muy usada, $\xi_i =: \frac{\partial}{\partial x_i}$. Así, $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ se escribe como $\xi = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ y cumple $\Theta_\xi(f) = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Terminología (Álgebras de Lie):

Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra (ie, un $\mathbb{R}$-ev que además es un anillo), decimos que una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $D : A \to A$ es una derivación si verifica la regla de Leibniz

$$D(ab) = (Da) \cdot b + a \cdot (Db) \quad \forall a, b \in A.$$

Una forma de construir nuevas derivaciones es mediante el corchete de Lie:

En $\operatorname{End}(A)$ definimos el corchete de Lie $[u, v] := u \circ v - v \circ u \in \operatorname{End}(A)$.

Ejercicio Probar que $[u,v] = -[v,u]$ y que se cumple la identidad de Jacobi

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0 \quad \forall u, v, w \in \operatorname{End}(A).$$

Decimos que $(\operatorname{End}(A), [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie.

Ejercicio importante Probar que $\operatorname{Der}(A) := \{ D : A \to A \text{ derivación} \} \subseteq \operatorname{End}(A)$ es una sub-álgebra de Lie, ie, si $D_1, D_2 \in \operatorname{Der}(A)$ entonces $[D_1, D_2] \in \operatorname{Der}(A)$.

Ejercicio Sea $f \in A$. Probar que:

① Si $D \in \operatorname{Der}(A)$, entonces fD definida por $u \mapsto f(Du)$ es una derivación (ie, $\operatorname{Der}(A)$ es un A-módulo).

② Si $D_1, D_2 \in \operatorname{Der}(A)$ entonces $[D_1, fD_2] = D_1(f) D_2 + f[D_1, D_2]$.

El resultado principal de este sección es el siguiente:

Teorema: Sea M una variedad diferenciable. Entonces:

① La función $\mathfrak{X}(M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$, $\xi \mapsto \Theta_\xi$ es un isomorfismo de $\mathcal{C}^\infty(M)$-módulos.

② El isomorfismo anterior es compatible con la restricción a abiertos de M y a los difeomorfismos entre variedades diferenciables.

La demostración de este resultado será dividida en varias partes. Comenzamos por precisar lo que se entiende por restringir derivaciones a abiertos $\mathcal{U} \subseteq M$:

Lema: Sea $D : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ una derivación y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Entonces, si $f|_{\mathcal{U}} = 0$ entonces $Df|_{\mathcal{U}} = 0$.

Dem: Sea $a \in \mathcal{U}$ y sea $g : M \to \mathbb{R}$ suave tal que $\operatorname{Supp}(g) \subseteq \mathcal{U}$ y $g|_V \equiv 1$ en una vecindad $a \in V \subseteq \mathcal{U}$. Así, $gf = 0$ y luego $0 = D(gf) = f(Dg) + (Df)g$. Así, en el punto $a \in M$ tenemos que $Df(a) = 0$ ✓ ■

Prop: Sea $D : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ una derivación y $\mathcal{U} \subseteq M$ abierto. Entonces, existe una única derivación $D_{\mathcal{U}} : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ tq $D_{\mathcal{U}}(f|_{\mathcal{U}}) = Df|_{\mathcal{U}}$ $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Dem: Sea $a \in \mathcal{U}$. Como antes, si $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ entonces $\exists\, f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $f|_V = g|_V$ para una vecindad $a \in V \subseteq \mathcal{U}$. Además, por el Lema anterior $Df|_V$ no depende de la elección de f. La función $D_{\mathcal{U}} : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, $g \mapsto D_{\mathcal{U}} g$ con $(D_{\mathcal{U}} g)(a) := Df(a)$ es una derivación (pues D lo es !). Más aún, $D_{\mathcal{U}}(f|_{\mathcal{U}}) = Df|_{\mathcal{U}}$ por construcción ✓
Esto último, junto con el Lema anterior, implican la unicidad de $D_{\mathcal{U}}$. ■

⚠ El diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Theta(M) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Theta(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})) \end{array}$$

donde las flechas vert. son restricción a $\mathcal{U}$ es conmutativo pues, por definición, $\theta_{\xi|_{\mathcal{U}}}(f|_{\mathcal{U}}) \overset{\text{dy}}{=} \theta_\xi(f)|_{\mathcal{U}} \overset{\text{Prop}}{=} (\theta_\xi)_{\mathcal{U}}(f|_{\mathcal{U}})$ $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Veamos ahora la compatibilidad con difeomorfismos entre variedades diferenciables.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\psi : A \xrightarrow{\sim} B$ un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. Probar que la aplicación

$$\psi_* : \mathrm{Der}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(B),\ D \mapsto \psi \circ D \circ \psi^{-1} =: \psi_*(D)$$

está bien definida (ie, $\psi_*(D)$ es una derivación) y que $\psi_*([D_1, D_2]) = [\psi_* D_1, \psi_* D_2]$.

Sea $\varphi : M \xrightarrow{\sim} N$ difeomorfismo de var. diferenciables y sea

$$\varphi_* : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(N),\ f \mapsto \varphi_*(f) := f \circ \varphi^{-1}$$

isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras. Por el Ejercicio anterior, existe un isomorfismo (que también denotaremos φ_*): $\varphi_* : \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M)) \to \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(N))$.

Prop: Sea $\xi : M \to TM$ campo vectorial. Entonces, $\theta_{\varphi_*(\xi)} = \varphi_*(\theta_\xi)$ en $\mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(N))$, ie, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Theta(M) & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M)) \\ \varphi_* \downarrow \wr & & \wr \downarrow \varphi_* \\ \Theta(N) & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(N)) \end{array}$$

es conmutativo.

Dem: Sea $g : N \to \mathbb{R}$ función suave, $x \in M$ y sea $y = \varphi(x) \in N$. Entonces:

$$(\theta_{\varphi_*(\xi)}\, g)(y) \underset{\text{dy}}{=} (d_y g)(\varphi_*(\xi)(y)) \underset{\text{dy}}{=} (d_y g) \circ (d_x \varphi(\xi(x)))$$ $x = \varphi^{-1}(y)$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$: ¡Convencerse!

$$= d_x(g \circ \varphi)(\xi(x)) \underset{\text{dy}}{=} \theta_\xi(g \circ \varphi)(x) = \theta_\xi(g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(y))$$

$$\overset{\text{dy}}{=} (\varphi_* \theta_\xi)(g)(y) \quad ✓ \quad ■$$

Las dos proposiciones anteriores prueban el ítem ② del Teorema principal de esta sección. Veamos ahora el isomorfismo $\theta : \Theta(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$ dado en el ítem ①.

Lema: Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de M y $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$ tal que $D_{\mathcal{U}_i}=0$ para todo $i \in I$. Entonces, $D = 0$.

Dem: Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Entonces, $Df|_{\mathcal{U}_i} = D_{\mathcal{U}_i}(f|_{\mathcal{U}_i}) = 0 \quad \forall i \in I \Rightarrow Df = 0$ ■

[**Obs**: Lo anterior implica que dos derivaciones de $\mathcal{C}^\infty(M)$ coinciden si y sólo si sus restricciones a cada $\mathcal{U}_i$ coinciden. Así, considerando cartas locales y transportando todo por dichos difeomorfismos, nos reducimos a probar ① para abiertos (convexos) de $\mathbb{R}^n$!

Sean $(x_1, \dots, x_n)$ coordenadas en $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y escribamos $\xi \in \textcircled{H}(\mathcal{U})$ como
$\xi = \sum_{i=1}^n a_i(x)\, e_i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Dada $D : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ derivación, la ecuación $\Theta_\xi = D$ equivale a:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = Df \quad \text{para toda } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \ (\star)$$

La ecuación $(\star)$ tiene a lo más una solución ξ, pues necesariamente $a_i = Dx_i$. Así, basta probar que $\xi := \sum_{i=1}^n (Dx_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ es la única solución de $(\star)$, i.e., que si $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ se tiene que $(\Theta_\xi - D)(f) = 0$ entonces $\Theta_\xi - D \equiv 0$.

Dado que $(\star)$ se verifica si $f = x_i$, todo se reduce al siguiente Lema:

[**Lema**: Sea $D : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ tal que $Dx_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$. Entonces, $D = 0$.

Dem del Lema (y de ①): Sup. $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Dado que $D(1) = 0$ y D lineal, $D(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Sea $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, y veamos que $Df(p) = 0$:
La versión integral de la fórmula de Taylor implica que

$$f(x) = f(p) + g_x(x - p)$$

donde $g_x = \int_0^1 d_{(1-t)p+tx} f \, dt$ es una forma lineal que varía de forma $\mathcal{C}^\infty$ con x.
En coordenadas, $f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - p_i)$ con $g_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$. Dado que $Dx_i = 0$ $\forall i = 1, \dots, n$, la fórmula de Leibniz implica que

$$Df = \sum_{i=1}^n (Dg_i) \cdot (x_i - p_i)$$

y luego $Df(p) = 0 \ \forall p \in \mathcal{U}$. Así, $D \equiv 0$ ✓ ■

[**Obs / Convención**: Si $\varphi : \mathcal{U} \subseteq M \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$ es una carta local, entonces escribimos $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \in \textcircled{H}(\mathcal{U})$ al campo vectorial obtenido al transportar $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \textcircled{H}(V)$ por φ^{-1}.
Explícitamente, si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ y F es la expresión de f en la carta φ, entonces

$$\Theta_{\partial_i}(f) = \varphi^*\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial x_i} \circ \varphi .$$

Recordemos que si $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$ entonces $[D_1, D_2] \in \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$. Esto motiva:

Def: Sea M una var. diferenciable y $\xi, \eta \in \Theta(M)$ campos de vectores. Definimos el corchete de Lie $[\xi,\eta] \in \Theta(M)$ como el único campo vectorial tal que
$$\theta_{[\xi,\eta]} = [\theta_\xi, \theta_\eta].$$

Obs: La definición anterior implica que $[\xi,\eta] = -[\eta,\xi]$ y que se verifica la identidad de Jacobi, ie, $(\Theta(M), [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie.

Ejercicio importante: Sea $\mathcal{U} \subseteq M$ un abierto y sea $\varphi : M \xrightarrow{\sim} N$ un difeomorfismo.

① Probar que $[\xi,\eta]|_{\mathcal{U}} = [\xi|_{\mathcal{U}}, \eta|_{\mathcal{U}}]$, $\forall \xi,\eta \in \Theta(M)$.

② Probar que $\varphi_* : \Theta(M) \to \Theta(N)$ verifica $[\varphi_*(\xi), \varphi_*(\eta)] = \varphi_*([\xi,\eta])$, $\forall \xi,\eta \in \Theta(M)$.

⚠ El Ejercicio anterior implica que para determinar una expresión local de $[\xi,\eta]$ en una variedad M basta considerar abiertos de $\mathbb{R}^n$ (y luego transportarlo a M).

Prop: Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y sean $\xi, \eta \in \Theta(\mathcal{U})$ dados por $\xi = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ y por $\eta = \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$. Entonces:
$$[\xi,\eta] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Dem: Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$, entonces
$$\theta_\xi(\theta_\eta(f)) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + a_j b_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$
Al restar $\theta_\eta(\theta_\xi(f))$ los términos con 2^{das} derivadas se cancelan y se obtiene el resultado ∎

Ejercicio: Sean $\xi,\eta \in \Theta(M)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Probar que
$$[\xi, f\eta] = \theta_\xi(f)\eta + f[\xi,\eta].$$

Cultura general (grupos y álgebras de Lie): Sup. que un grupo de Lie G actúa en M, entonces cada $g : M \xrightarrow{\sim} M$ actúa en $\Theta(M)$ por $\xi \mapsto g_*(\xi)$. Más aún,
$$\Theta(M)^G := \{\xi \in \Theta(M) \text{ tq } g_*(\xi) = \xi \quad \forall g \in G\}$$
es un subálgebra de Lie de $\Theta(M)$ (pues $[g_*\xi, g_*\eta] = g_*[\xi,\eta]$).

En part, si $M = G$ y cada $g \in G$ actúa "por la izquierda" como $L_g : G \xrightarrow{\sim} G$, $x \mapsto gx$ entonces obtenemos $\Theta(G)^G$ subalg. de Lie de campos vect. invariantes por la izquierda.

Notar que $\xi = g_*(\xi) \iff \xi(h) = g_*(\xi)(h) \overset{\mathrm{def}}{=} (d_{L_g^{-1}(h)} L_g)(\xi(g^{-1}h)) \quad \forall h \in G$.

Si $h = g$, obtenemos $\xi(g) = (d_e L_g)(\xi(e))$. En part, la aplicación
$$\Theta(G)^G \xrightarrow{\sim} T_e G, \ \xi \mapsto \xi(e)$$
es inyectiva. De hecho, es un isomorfismo y luego $T_e G$ posee estructura de álg. de Lie.
Dicha álgebra $\mathfrak{g} = (T_e G, [\cdot,\cdot])$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie G.

§14. Ecuaciones Diferenciales y Flujo de Campos Vectoriales

Sea M una var. diferenciable y $\xi \in \Theta(M)$. Dada una función suave

$$c : I =]a,b[\subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$$

consideramos $d_t c : \mathbb{R} \longrightarrow T_{c(t)}M$ y definimos $\dot{c}(t) := (d_t c)(1)$ "vector velocidad".

En esta sección, estudiaremos la Ecuación Diferencial Ordinaria

$$\dot{c}(t) = \xi(c(t)) \qquad (\star)$$

cuyas soluciones son llamadas trayectorias o curvas integrales del campo vectorial ξ.

Obs: La EDO $(\star)$ es autónoma (ie, indep. de t) pues si $c(t)$ es solución y $t_0 \in \mathbb{R}$ está fijo, entonces $c(t-t_0)$ es otra solución de $(\star)$.

Ejemplo: Sea $M = \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $\xi = \sum_{i=1}^n f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ y $c = (c_1, \dots, c_n)$. Entonces, $(\star)$ equivale al sistema (autónomo) $\dot{c}_i(t) = f_i(c(t))$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Ejercicio útil

1. Sea $c(t)$ una curva integral de $\xi \in \Theta(M)$ y $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Probar que $c(\lambda t)$ es una curva integral de $\lambda\xi$.
2. Sea $\varphi : M \xrightarrow{\simeq} N$ difeo. y $c(t)$ una curva integral de $\xi \in \Theta(M)$. Probar que $\varphi(c(t))$ es una curva integral de $\varphi_*\xi \in \Theta(N)$.

Teorema: Sea M una var. diferenciable y $\xi \in \Theta(M)$. Entonces:

1. Unicidad: Dos soluciones de $(\star)$ en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ que coinciden en un punto de I coinciden en todo el intervalo I.
2. Existencia: Para todo $x_0 \in M$, $\exists$ vecindad $x_0 \in \mathcal{U} \subseteq M$ y un intervalo de tiempo (uniforme!) $]-\delta, \delta[\subseteq \mathbb{R}$ tal que:

   "Para todo $x \in \mathcal{U}$, la ecuación $\dot{c}(t) = \xi(c(t))$ posee una solución $c_x :]-\delta,\delta[\to M$ tal que $c_x(0) = x$"

Más aún, la función $c :]-\delta,\delta[\times \mathcal{U} \to M$, $(t,x) \mapsto c(t,x) := c_x(t)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Dem: El resultado es local, por lo que basta probarlo en una carta $\varphi : \mathcal{U} \subseteq M \xrightarrow{\simeq} V \subseteq \mathbb{R}^n$ en torno a $x_0 \in M$. Por el Ejercicio útil, podemos asumir $M = \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y en tal caso el resultado es consecuencia del curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. ∎

Construcción (solución maximal): Sea $x_0 \in M$ fijo. Consideremos todas las soluciones de $(\star)$ de la forma $c_\alpha : I_\alpha =]a_\alpha, b_\alpha[\to M$ con $0 \in I_\alpha$ y tales que $c_\alpha(0) = x_0$.

Sea $I := \bigcup_\alpha I_\alpha$ y notar que $c_\alpha|_{I_\alpha \cap I_\beta} = c_\beta|_{I_\alpha \cap I_\beta}$ por unicidad

$\Rightarrow c : I \to M$ definida por $c(t) := c_\alpha(t)$ si $t \in I_\alpha$ es solución de $(\star)$ con $c(0) = x_0$.

⚠ Por construcción, $c : I \to M$ es la única solución maximal de $(\star)$ definida en un intervalo $0 \in I$ y tal que $c(0) = x_0$.

Lema: Sea $c : I \to M$ una solución maximal de $\dot{c}(t) = \xi(c(t))$ y supongamos que $a := \sup(I) < +\infty$. Entonces, cuando $t \to a$ la solución $c(t)$ se sale de todo compacto $K \subseteq M$.

Dem: Sup. que $c(t) \in K$ cuando $t \to a$, y luego $\exists \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tq $t_i \to a$ y $c(t_i) \to y$. Luego, $\exists\, y \in \mathcal{U} \subseteq M$ vecindad abierta, $\delta > 0$ y $u :]-\delta, \delta[\times \mathcal{U} \to M$ solución de (★) tq $u(0,x) = x$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

Sea $i \gg 0$ tq $t_i > a - \delta$ y $c(t_i) \in \mathcal{U}$. Luego, por unicidad, tenemos que

$$c(t) = u(t - t_i, c(t_i)) \quad \text{para} \quad t_i - \delta < t < a$$

(pues coinciden en $t = t_i$). Sin embargo, $u(t - t_i, c(t_i))$ existe para $t_i - \delta < t < t_i + \delta$, donde $t_i + \delta > a$. Lo último contradice la maximalidad de c ✓ ∎

Obs: El mismo argumento se aplica en el caso en que $\inf(I) \neq -\infty$.

Corolario: Las soluciones maximales de $\dot{c}(t) = \xi(c(t))$ están definidas en $I = \mathbb{R}$ si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

① M es una variedad compacta.

② ξ tiene soporte compacto.

Ejercicio Sea $M = \mathbb{R}$ y considere $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ dado por $\xi(x) = x^2$. Determine la solución maximal $c : I \to \mathbb{R}$ de $\dot{c}(t) = \xi(c(t))$ con $c(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ fijo.

[Indicación: Considerar separadamente los casos $x_0 < 0$, $x_0 = 0$, $x_0 > 0$]

Prop: Para todo $x \in M$, sea $I_x \subseteq \mathbb{R}$ el intervalo maximal de la solución $t \mapsto c_x(t) = c(t,x)$ de (★) tal que $c(0,x) = x$. Entonces, el dominio de definición de c,

$$\Omega = \{(t,x) \text{ con } x \in M, t \in I_x\}$$

es un abierto, y $c : \Omega \to M$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Dem: Ver Lee, Capítulo 9. ∎

Def: Sea M una var. diferenciable y $\xi \in \mathfrak{X}(M)$. Decimos que ξ es un campo vectorial completo si todas las soluciones maximales de $\dot{c}(t) = \xi(c(t))$ están definidas en $\mathbb{R}$ (i.e., $I_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in M$). Si $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ es completo, la función

$$c : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M, \quad (t,x) \longmapsto c(t,x) =: \varphi_t(x)$$

es llamado el flujo del campo vectorial ξ.

Propiedades del flujo: Sea $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ completo y $\varphi_t(x)$ su flujo. Entonces:

① $\varphi_0 = \mathrm{Id}_M$ pues $\varphi_0(x) \underset{\text{def}}{=} c(0,x) = x$.

② Para todos $t, s \in \mathbb{R}$ se tiene que $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ y en particular $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.

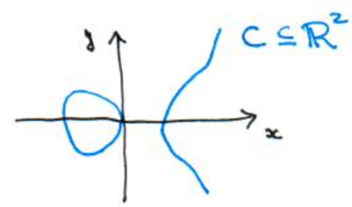
En efecto, la relación $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ equivale a $c(t, c(s,x)) = c(t+s, x)$, que podemos pensar (para $s \in \mathbb{R}$ fijo) como una función de t que verifica ($\star$).
Dado que para $t = 0$ se tiene $c(0, c(s,x)) = c(s,x)$, ambos lados coinciden y luego por unicidad coinciden para todo $t \in \mathbb{R}$.

Obs: En otras palabras, el flujo de ξ define un morfismo de grupos
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Diff}(M), \quad t \longmapsto \varphi_t$$
y luego una acción de $(\mathbb{R},+)$ en M.

Ejemplo útil: Sea $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$. Si ξ es acotado (ie, $\exists M \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $\|\xi(x)\| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$) entonces ξ es completo.
En efecto, en tal caso una solución $c : I \to \mathbb{R}^n$ de $c'(t) = \xi(c(t))$ verifica que $\|c'(t)\| \leq M$ para todo $t \in I$ y luego no puede salir de compactos en tiempo finito ✓

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, el campo $\xi = \frac{1}{1+x^2+y^2}\left(2y\frac{\partial}{\partial x} + (3x^2-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)$ es acotado y en particular es un campo vectorial completo.

§15. Variedades de dimensión 1 y métricas riemannianas



Comencemos por un ejemplo motivacional:
Sea $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } f(x,y) = x^3 - x - y^2 = 0\}$.
Dado que $df = (3x^2-1, -2y) = 0 \iff (x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \notin C$, tenemos que $C = f^{-1}(0)$ es una curva suave y $T_{(x,y)}C = \ker(d_{(x,y)}f)$ $\forall (x,y) \in C$.
El campo de vectores
$$\xi = \frac{1}{1+x^2+y^2}\left(2y\frac{\partial}{\partial x} + (3x^2-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
es completo (pues es acotado) y es tangente a C a lo largo de C, ie, si $(x,y) \in C$ entonces $\xi(x,y) \in T_{(x,y)}C$. Más aún, $\xi(x,y) \neq 0$ $\forall (x,y) \in C$ por el cálculo anterior.
Sea $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ el flujo de ξ y $p \in C$, entonces $\varphi_t'(x) = \xi(\varphi_t(x)) \neq 0$ y luego φ_t es un difeomorfismo local! En part, sus órbitas son abiertas y de hecho, al considerar su complemento, notamos que son cerradas también (Ejercicio: Convencerse)
$\Rightarrow$ Son componentes conexas de C. Así, para $p \in C$ y $\mathbb{R} \curvearrowright C$ tenemos:

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\mathrm{Stab}(p) = \{t \in \mathbb{R} \text{ tq } \varphi_t(p) = p\} = \{0\}$ y luego $t \mapsto \varphi_t(p)$ es un incrustamiento $\mathbb{R} \hookrightarrow C_p$ donde C_p es la comp. conexa de p, ie, $C_p \cong \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\mathrm{Stab}(p) \cong \mathbb{Z}\omega$ (cf. MAT214) y luego $t \mapsto \varphi_t(p)$ es ω-periódica. Así, induce un incrustamiento $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}\omega \hookrightarrow C_p$, ie, $C_p \cong S^1$.

Teorema: Sea M una var. dif. conexa de $\dim(M) = 1$. Entonces, $M \cong \mathbb{R}$ ó S^1.

Obs: Tal como en el Ejemplo anterior, basta construir $\xi \in \textcircled{H}(M)$ completo nunca nulo!

Lema: Sea $\xi \in \textcircled{H}(M)$, entonces $\exists\, f : M \to \mathbb{R}^{>0}$ suave tal que $f\xi$ es completo.

Dem (Sketch): Sea $g : M \to \mathbb{R}^{>0}$ función propia (construida, eg., usando particiones de la unidad adecuadas). Sea $f := e^{-\Theta_\xi(g)^2}$ y sea $\eta := f\xi \in \textcircled{H}(M)$:

Si $c(t)$ es una curva integral de η, entonces:

$$(g(c(t)))' \underset{\text{def}}{=} (d_{c(t)}g)(c'(t)) \underset{(*)}{=} (d_{c(t)}g)\big(f(c(t))\,\xi(c(t))\big)$$

$$= (d_{c(t)}g)\big(e^{-\Theta_\xi(g(c(t)))^2}\,\xi(c(t))\big) \underset{\text{def}}{=} \big(e^{-\Theta_\xi(g)^2}\,\Theta_\xi(g)\big)(c(t))$$

$\Rightarrow |(g(c(t)))'| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|\, e^{-x^2} \leq C$. Así, g no puede "explotar" en tiempo finito y luego $c(t)$ no puede salir de compactos en tiempo finito $\Rightarrow \eta$ completo ■

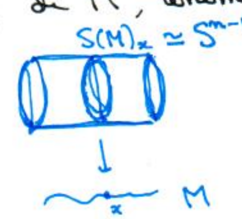
Obs: Para probar el Teorema, basta construir $\xi \in \textcircled{H}(M)$ tal que $\xi(x) \neq 0 \quad \forall x \in M$.

Def: Una métrica riemanniana en una var. diferenciable M es una función suave $g : TM \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in M$ la restricción $g|_{T_xM} : T_xM \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática definida positiva.

Obs: En una trivialización $TM|_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$, una métrica riemanniana es una familia de formas cuadráticas def. positivas $\{g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}_{x \in \mathcal{U}}$ tal que los coeficientes de la matriz asociada a $g(x)$ son funciones $\mathcal{C}^\infty$ en $x \in \mathcal{U}$.
Por ejemplo, en $M = \mathbb{R}^n$ tenemos la métrica riemanniana $g(x)(\xi) := \|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i(x)^2$.

Lema: Toda variedad posee una métrica riemanniana.

Dem: En una trivialización $TM|_{\mathcal{U}_\alpha} \simeq \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n$ consideramos la métrica $g_\alpha(x)(\xi) = \|\xi\|^2$. Considerando una partición de la unidad $\{\mu_\alpha\}$ resp. al cubrimiento $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de M, tenemos que $g := \sum \mu_\alpha g_\alpha$ es una métrica riemanniana en M. ■



Prop: Sea (M, g) una variedad riemanniana de $\dim(M) = n$. Entonces,

$$S(M) := \{(x, \xi),\ \xi \in T_xM \ \text{ y } \ g(\xi) = 1\}$$

es una subvariedad de codimensión 1 de TM y $p : S(M) \to M$ es una submersión propia.

Dem: En una trivialización $TM|_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ se tiene, usando coord. ortonormales resp. a la métrica g, que $S(M)|_{\mathcal{U}} \simeq \mathcal{U} \times S^{n-1}$ y que $p|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times S^{n-1} \to \mathcal{U}$ submersión. El hecho que $p : S(M) \to M$ sea propia es consecuencia directa del hecho que la esfera $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacta. ■

Demostración del Teorema de Clasificación:

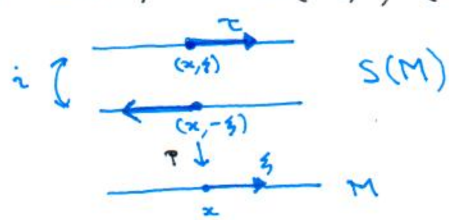
Si $\dim(M) = 1$, entonces $\dim(S(M)) = 1$ y $S(M)_x \simeq S^0 = \{0_x, 1_x\}$ consiste en dos elementos (i.e., los $\xi \in T_xM$ tales que $g(\xi) = 1$). Notemos que:

(1°) $p : S(M) \to M$ es un difeomorfismo local (pues es una submersión entre variedades de la misma dimensión, y luego es étale).

(2°) $\exists$ un campo vectorial nunca nulo "Tautológico" en $S(M)$:

$$\tau(x,\xi) := (d_{(x,\xi)}p)^{-1}(\xi) \qquad (\neq 0 \text{ pues } g(\xi) = 1)$$

(3°) $\exists$ una involución $i : S(M) \xrightarrow{\sim} S(M)$, $(x,\xi) \mapsto (x,-\xi)$ que cumple $i_*\tau = -\tau$.



Así, el Ejemplo motivacional implica que las componentes conexas de $S(M)$ son difeomorfas a $\mathbb{R}$ o S^1 !

Obs: Sea $C \subseteq S(M)$ una componente conexa. Entonces, $p(C) \subseteq M$ es abierto (pues p es un difeo. local) y $p(C) \subseteq M$ es cerrado (pues p es propia), i.e., $p(C) = M$. Además, dado que $p^{-1}(x) = \{0_x, 1_x\}$, $S(M)$ tiene a lo más dos componentes conexas.

Ejercicio* Sea $M \cong \mathbb{R}$ o S^1 y sea $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M$ un difeomorfismo que revierte orientación (i.e., $\det_*(d_x\varphi) < 0$ para todo $x \in M$). Probar que $\exists\, x_0 \in M$ tal que $\varphi(x_0) = x_0$.

Veamos que $S(M)$ tiene 2 componentes conexas: Si $S(M)$ fuera conexo, entonces $S(M) \cong \mathbb{R}$ o S^1. Sin embargo, $i : S(M) \xrightarrow{\sim} S(M)$ es un difeo. que revierte orientación (pues $i_*\tau = -\tau$) y que no tiene puntos fijos (pues $\xi \neq 0$), lo que contradice el Ejercicio $\lightning$. Así, $S(M) = C_1 \cup C_2$ y $p|_{C_1} : C_1 \twoheadrightarrow M$ sobreyectiva. Dado que $p^{-1}(x)$ consiste en dos puntos, $p|_{C_1} : C_1 \hookrightarrow M$ es inyectiva (sino, $p|_{C_2}$ no sería sobreyectiva!) $\Rightarrow p|_{C_1} : C_1 \xrightarrow{\sim} M$ es un difeo local biyectivo y luego un difeomorfismo ✓ ■

§16. La aplicación exponencial (en grupos de Lie)

Recuerdo (cf. §13): Sea G un grupo de Lie actuando sobre sí mismo por la izquierda, i.e., para todo $g \in G$ se define $L_g : G \xrightarrow{\sim} G$, $x \mapsto gx$. Los campos vectoriales invariantes

$$\Theta(G)^G := \{\xi \in \Theta(G) \text{ tq } (L_g)_*\xi = \xi \text{ para todo } g \in G\}$$

son un álgebra de Lie. Más aún, hay un isomorfismo $\Theta(G)^G \xrightarrow{\sim} T_eG$, $\xi \mapsto \xi(e)$. Así, $\mathfrak{g} := T_eG$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie G.

43

Así, para todo $A \in \mathfrak{g}$ existe un único $\xi_A \in \mathfrak{X}(G)^G$ tal que $\xi_A(e) = A$ dado por $\xi_A(g) := (L_g)_* A$ para todo $g \in G$.

Prop: Todo campo vectorial $\xi = \xi_A \in \mathfrak{X}(G)^G$ es completo.

Dem: Sea $t \mapsto \varphi_t(x) = c(t,x)$ la solución maximal de $c'(t) = \xi(c(t))$ con $\varphi_0(x) = x$, definida en $I_x \subseteq \mathbb{R}$. Sea $g \in G$, entonces:
$t \mapsto g^{-1} c(t, gx)$ coincide (en $t=0$, y luego en todas partes) con dicha solución
$\Rightarrow I_x = I_{gx}$ para todos $x, g \in G$ y en part. el flujo $c : I \times G \to G$ está definido en $I = I_e =]a,b[\subseteq \mathbb{R}$. Sea $0 < \delta < b$, y consideremos

$$\tilde{c}(t,x) := c(\delta,x)\, c(0,x)^{-1}\, c(t-\delta, x) \quad \text{definida si } a+\delta < t < b+\delta.$$

Como $c(\delta,x) = \tilde{c}(\delta,x)$, podemos extender c más allá de b, contradicción $\not\!\!\xi$

Así, $b = +\infty$. De manera similar, $a = -\infty$ y luego $I = \mathbb{R}$. ■

Def: Sea G un grupo de Lie y $A \in \mathfrak{g}$. Si denotamos por $c_A(t,g)$ al flujo asociado al campo de vectores $\xi_A \in \mathfrak{X}(G)^G$, entonces se define la <u>aplicación exponencial</u> de G por

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \quad A \mapsto c_A(1,e) = (\varphi_A)_1(e)$$

<u>Ejemplo principal</u>: Sea $G = GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ con $\mathfrak{g} = T_{Id} G \simeq M_n(\mathbb{R})$.
Luego, $\xi_A(g) = (L_g)_* A = gA$ y en particular la ecuación del flujo de ξ_A es $g'(t) = g(t) A$ cuya solución es precisamente $g(t) = e^{tA}$!

<u>Hechos</u>: Como consecuencia de la Teoría general de EDO se tienen las sgtes propiedades

1. $\exp((s+t)A) = \exp(sA)\exp(tA)$, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$, $\exp(0) = e$.
2. $d_0(\exp) = Id_{\mathfrak{g}}$. En part, $\exists\, 0 \in \mathcal{U} \subseteq \mathfrak{g}$ y $e \in V \subseteq G$ abiertos tales que $\exp|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} V$ es un difeomorfismo.
3. Si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos de Lie, entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d_e f} & \mathfrak{h} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

es conmutativo.

{Cultura general} En Geometría Riemanniana es posible definir una noción análoga de aplicación exponencial, mediante "geodésicas". En part, es posible hallar vecindades abiertas $p \in \mathcal{U} \subseteq M$ y $0 \in V \subseteq T_pM$ de tal suerte que $\exp|_V : V \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ sea un difeomorfismo.

$\Rightarrow (\exp|_V)^{-1} : \mathcal{U} \subseteq M \xrightarrow{\sim} V \subseteq T_pM \cong \mathbb{R}^n$ es una carta local "natural" en $p \in M$.

§17. Teorema de Fibración de Ehresmann

En §9, vimos que toda función étale (i.e., cuya diferencial es un isomorfismo) y propia es un revestimiento topológico. El Teorema de Ehresmann (1951) generaliza lo anterior:

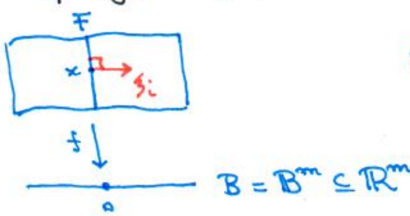
Def: Una función suave $f: M \twoheadrightarrow B$ entre var. diferenciables es una fibración si f es sobreyectiva y es una submersión (i.e., $d_x f: T_x M \twoheadrightarrow T_{f(x)} B$ sobreyectiva $\forall x \in M$).

Teorema de Fibración de Ehresmann: Sea $f: M \twoheadrightarrow B$ una fibración propia, entonces f es localmente trivial. En otras palabras, para todo $b \in B$ existe un abierto $b \in \mathcal{U} \subseteq B$ y una variedad F (fibra) junto con un difeomorfismo $f^{-1}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times F$ tal que

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{U} \times F \arrow[dl, "pr_{\mathcal{U}}"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

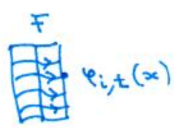
es un diagrama conmutativo.

Dem: La afirmación es local en B, por lo que podemos asumir $B = \mathbb{B}^m \subseteq \mathbb{R}^m$ la bola unitaria $\{y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ tq $\|y\| < 1\}$. Sea $F := f^{-1}(0) \subseteq M$.



Recuerdo: $T_x F \cong \ker(d_x f)$

Sea g una métrica Riemanniana en M y consideremos campos vectoriales $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathfrak{X}(M)$ tales que para todo $x \in M$ se tenga:



1° $\xi_i \perp \ker(d_x f)$ respecto a $g_x: T_x M \to \mathbb{R}$

2° $(d_x f)(\xi_i) = \frac{\partial}{\partial y_i}$ (lo cual es posible pues f submersión).

Sea $\varphi_{i,t}$ el flujo del campo ξ_i, entonces $\frac{d}{dt}\left(f(\varphi_{i,t}(x))\right) \underset{\text{def}}{=} (d_x f)(\xi_i) = \frac{\partial}{\partial y_i}$

Luego, si $(e_1, \ldots, e_m)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$, entonces $f(\varphi_{i,t}(x)) = f(x) + t e_i$ $(\star)$

Dado que f es propia, la solución $\varphi_{i,t}(x)$ deja de existir si sale de todo compacto $\iff f(\varphi_{i,t}(x))$ sale de todo compacto. Luego, $(\star)$ implica que:

$$\varphi_{i,t}(x) \text{ existe para los } t \in \mathbb{R} \text{ tales que } f(x) + t e_i \in \mathbb{B}^m \quad (\star\star)$$

Finalmente, consideremos la función suave (bien definida, por $(\star\star)$):

$$\Phi: \mathbb{B}^m \times F \longrightarrow M, \ ((y_1, \ldots, y_m), x) \longmapsto \varphi_{m,y_m} \circ \varphi_{m-1,y_{m-1}} \circ \cdots \circ \varphi_{1,y_1}(x)$$

Por construcción, tenemos que $f(\Phi(y,x)) \overset{(\star)}{=} \underbrace{f(x)}_{=0} + y_1 e_1 + \ldots + y_m e_m = y$ ✓

Además, Φ es un difeo. pues su inversa está dada explícitamente por

$$\Phi^{-1}(x) = \left(f(x), \varphi_{1,-f_1(x)} \circ \varphi_{2,-f_2(x)} \circ \cdots \circ \varphi_{m,-f_m(x)}(x)\right)$$

donde $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \mathbb{B}^m \subseteq \mathbb{R}^m$ ■

§18. Flujos y Derivada de Lie

Recordemos que si $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M$ es un difeomorfismo y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es una función suave, el pullback de f por φ es la función $\varphi^* f := f \circ \varphi$.

De manera análoga, si $\xi \in \Theta(M)$ es un campo de vectores se define su pullback $\varphi^*\xi$ mediante $(\varphi^*\xi)(x) := (d_x\varphi)^{-1}(\xi(\varphi(x)))$, y en particular $\varphi_*\xi \underset{\text{df}}{=} (\varphi^{-1})^*\xi$.

Obs: Más generalmente, dado un "objeto geométrico" (eg. función, campo vectorial, forma diferencial, etc) α en M, podemos definir $\varphi^*\alpha$ en $x \in M$ transportando por $d_x\varphi$ el valor de α en $\varphi(x)$.

Def: Sea $\xi \in \Theta(M)$ con flujo $\varphi_t : M \xrightarrow{\sim} M$ asociado. Dado un objeto geométrico α en M (eg. función, campo vect, etc) se define la derivada de Lie de α resp. ξ por

$$\mathcal{L}_\xi(\alpha) := \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\alpha)\Big|_{t=0}$$

Ejemplo: Sea $\alpha = f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, con $\varphi_t^* f \overset{\text{df}}{=} f \circ \varphi_t$, entonces:

$$\mathcal{L}_\xi(f) = \frac{d}{dt}(f\circ\varphi_t)\Big|_{t=0} = (d_x f)\left(\frac{d\varphi_t}{dt}\right)\Big|_{t=0} \underset{\dot{\varphi}_t = \xi(\varphi_t)}{=} (d_x f)(\xi(\varphi_t))\Big|_{t=0} \overset{\varphi_0 = Id}{=} (d_x f)(\xi(\cdot)) \overset{\text{df}}{=} \Theta_\xi(f).$$

ie, $\mathcal{L}_\xi(f)$ es la derivada de Lie de funciones $\Theta_\xi(f)$ definida anteriormente.

Teorema: Sean $\xi, \eta \in \Theta(M)$, entonces $\mathcal{L}_\xi(\eta) = [\xi, \eta]$.

Dem: Dado que $\Theta(M) \simeq \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$, basta probar que las derivaciones inducidas por $\mathcal{L}_\xi(\eta)$ y $[\xi,\eta]$ son las mismas. Para esto, usaremos que si $\{f_t\}_{t\in I}$ es una familia de funciones que depende de manera $\mathcal{C}^\infty$ del parámetro t, entonces: Ejercicio*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^* f_t = \Theta_\xi(f_0) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}(\Theta_\eta(f_t)) = \Theta_\eta\left(\frac{df_t}{dt}\right). \qquad (\star)$$

Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, y sea $g := (\varphi_t)_* f \overset{\text{df}}{=} f \circ \varphi_t^{-1}$. Notamos que si $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M$ es un difeomorfismo, entonces $\varphi^*(\Theta_\eta(g)) = \Theta_{\varphi^*\eta}(\varphi^* g)$ pues

$$\Theta_{\varphi^*\eta}(\varphi^* g)(x) \overset{\text{df}}{=} (d_x\varphi^* g)(\varphi^*\eta(x)) = d_x(g\circ\varphi)\left((d_x\varphi)^{-1}(\eta(\varphi(x)))\right)$$
$$\underset{\text{cadena}}{=} (d_{\varphi(x)} g)(\eta(\varphi(x))) \underset{\text{df}}{=} \varphi^*(\Theta_\eta(g))(x)$$

Así, $\varphi_t^*(\Theta_\eta(g)) = \Theta_{\varphi_t^*\eta}(\varphi_t^* g) = \Theta_{\varphi_t^*\eta}(g\circ\varphi_t) = \Theta_{\varphi_t^*\eta}(f\circ\varphi_t^{-1}\circ\varphi_t) = \Theta_{\varphi_t^*\eta}(f)$.

Al derivar $\Theta_{\varphi_t^*\eta}(f) = \varphi_t^*(\underbrace{\Theta_\eta((\varphi_t)_* f)}_{=: f_t})$ resp. a $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}$ obtenemos:

$$\Theta_{\mathcal{L}_\xi(\eta)}(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^* f_t \overset{(\star)}{=} \Theta_\xi(f_0) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t \overset{\varphi_0 = Id}{=} \Theta_\xi(\Theta_\eta(f)) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_t$$
$$= (\Theta_\xi\circ\Theta_\eta)(f) + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\Theta_\eta(f\circ\varphi_t^{-1})) \overset{(\star)}{=} (\Theta_\xi\circ\Theta_\eta)(f) + \Theta_\eta\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\varphi_t^{-1})\right)$$

$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$

$$= (\Theta_\xi\circ\Theta_\eta)(f) + \Theta_\eta(-\Theta_\xi(f)) = \Theta_{[\xi,\eta]}(f) \quad \blacksquare$$

Parte III: Formas Diferenciales

§19. Recuerdos sobre álgebra multilineal:

Sean V y W dos $\mathbb{R}$-ev, y sea $\mathrm{Alt}^p(V,W) := \{ f : V \overset{p\text{-veces}}{\times \dots \times} V \to W \ \ p\text{-lineal alternada}\}$.

Aquí, f es alternada si para toda permutación $\sigma \in S_p$ se tiene que
$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\, f(x_1, \dots, x_p).$$

La p-ésima potencia exterior de V es un $\mathbb{R}$-ev $\Lambda^p V$ junto con una aplicación p-lineal alternada
$$V \overset{p\text{-veces}}{\times \dots \times} V \longrightarrow \Lambda^p V, \quad (x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_p$$

Más aún, verifica la "propiedad universal" siguiente:

Toda aplicación p-lineal alternada $f \in \mathrm{Alt}^p(V,W)$ se factoriza por una única aplicación lineal $\hat{f} : \Lambda^p V \to W$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \underbrace{V \times \dots \times V}_{p\text{-veces}} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & W \\ \Lambda^p V \arrow[ur, "\exists !\, \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo, i.e., $\hat{f}(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = f(x_1, \dots, x_p)$ para todos $x_1, \dots, x_p \in V$.

En particular, $\mathrm{Alt}^p(V,W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^p V, W)$.

Propiedades:

1° Por convención, $\Lambda^0 V := \mathbb{R}$. Por definición, $\Lambda^1 V = V$.

2° Functorialidad: Sea $f : V \to W$ lineal. Entonces, existe una única aplicación lineal $\Lambda^p f : \Lambda^p V \to \Lambda^p W$ tal que $(\Lambda^p f)(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_p)$ $\forall x_1, \dots, x_p \in V$.
Más aún, $\Lambda^p(f \circ g) = (\Lambda^p f) \circ (\Lambda^p g)$.

3° Si $V \cong \mathbb{R}^n$ y $(e_1, \dots, e_n)$ base de V, entonces $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n}$ es una base de $\Lambda^p V$. En particular, $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^p V = \binom{n}{p}$.

4° $\Lambda^n V \cong \mathbb{R}$ si $V \cong \mathbb{R}^n$. Más aún, si $f : V \to V$ lineal entonces $\Lambda^n f$ está dada por $x_1 \wedge \dots \wedge x_n \longmapsto \det(f) \cdot x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ (homotecia).

5° Si $V \cong (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un e.v. euclideano orientado, entonces toda base ortonormal directa define el mismo elemento $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \Lambda^n V$ y luego $\Lambda^n V \cong \mathbb{R}$ es canónico.

6° Si $V \cong \mathbb{R}^n$ es de dimensión finita, entonces
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^p V \times \Lambda^p V^* \to \mathbb{R}, \quad (x_1 \wedge \dots \wedge x_p, \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_p) \mapsto \det\big((\ell_j(x_i))_{i,j = 1, \dots, p}\big)$$
es bilineal no-degenerada. En part, $\Lambda^p V^* \cong (\Lambda^p V)^* \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^p V, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Alt}^p(V, \mathbb{R})$.

7° Existe una única aplicación bilineal $\Lambda^p V \times \Lambda^q V \to \Lambda^{p+q} V$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ tal que $(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) \wedge (x_{p+1} \wedge \dots \wedge x_{p+q}) = x_1 \wedge \dots \wedge x_{p+q}$ para todos $x_i \in V$. Más aún, se tiene que $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$. Decimos que el "álgebra graduada anti-conmutativa"
$$\Lambda V := \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p V = \mathbb{R} \oplus V \oplus \Lambda^2 V \oplus \dots \oplus \Lambda^n V$$
es el álgebra exterior de V. Si $f : V \to W$ lineal, $\Lambda f : \Lambda V \to \Lambda W$ morfismo de álgebras.

§ 20. Fibrado cotangente y Formas diferenciales

Sea M una variedad diferenciable y $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial de rango r. Entonces, $\Gamma(M,E) = \{s : M \to E$ sección de $\pi\}$ es un $\mathcal{C}^\infty(M)$-modulo: si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $s,t \in \Gamma(M,E)$ entonces

$$(s+t)(x) := s(x) + t(x) \quad \text{y} \quad (fs)(x) := f(x)s(x).$$

Además, vimos que (usando matrices de transición) podemos definir fibrados vectoriales E^*, $\Lambda^p E$, $\Lambda^p E^*$, $\mathrm{Alt}^p(E,\mathbb{R})$, etc. Apliquemos esto a $E = TM$:

Def: El fibrado cotangente $T^*M \to M$ es el dual del fibrado tangente. En particular, para todo $x \in M$ se tiene que $(T^*M)_x = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_xM, \mathbb{R}) =: T_x^*M$.

Obs: En términos practicos, si $(x_1, .., x_m)$ son coord. locales de M en un abierto $\mathcal{U} \subseteq M$, entonces los diferenciales $dx_1, \dots, dx_m$ forman una base de secciones de T^*M en $\mathcal{U}$ y luego inducen una trivialización local $T^*M|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$.

Def: Una 1-forma diferencial en M es una sección $\omega \in \Gamma(M, T^*M) =: \Omega^1(M)$.

⚠ Explicitamente, si $\omega \in \Omega^1(M)$ y $(x_1, .., x_m)$ son coord. locales de M en un abierto $\mathcal{U} \subseteq M$ entonces hay una escritura única de la forma

$$\omega|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{m} f_i \, dx_i \qquad \text{con } f_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}).$$

Ejemplo importante: Sea $f : M \to \mathbb{R}$ función suave. Entonces, $d_xf : T_xM \to \mathbb{R}$ es un elemento de T_x^*M para todo $x \in M$ y luego $\omega := df$, con $\omega(x) = d_xf$, es una 1-forma diferencial en M. En coord. locales $(x_1, .., x_m)$ en $\mathcal{U} \subseteq M$, se tiene

$$df|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Obs: La dualidad entre TM y T^*M también se extiende a sus secciones. Más precisamente, si $\omega \in \Omega^1(M)$ y $\xi \in \Theta(M)$, definimos $\langle \omega, \xi \rangle \in \mathcal{C}^\infty(M)$ como

$$\langle \omega, \xi \rangle : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \underset{\text{def}}{=} \omega(x)(\xi(x)).$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ La aplicación $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilineal $\Omega^1(M) \times \Theta(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, $(\omega, \xi) \mapsto \langle \omega, \xi \rangle$ induce isomorfismos:

1. $\Omega^1(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Theta(M), \mathcal{C}^\infty(M))$.
2. $\Theta(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\Omega^1(M), \mathcal{C}^\infty(M))$.

La construcción anterior se extiende a las potencias exteriores de T^*M:

Sea $E \to M$ un fibrado vectorial de rango r, entonces $\Lambda^p E \to M$ es un fibrado vectorial de rango $\binom{r}{p}$ con fibra $\Lambda^p E_x$ sobre cada $x \in M$.

Def: Una <u>p-forma diferencial</u> en M es una sección $\omega \in \Omega^p(M) := \Gamma(M, \Lambda^p T^*M)$ del fibrado vectorial $\Lambda^p T^*M \longrightarrow M$.

⚠ <u>Observaciones importantes</u>:

① Por convención, $\Omega^0(M) := \mathcal{C}^\infty(M)$.

② Si $\omega \in \Omega^p(M)$ y $\eta \in \Omega^q(M)$, se define $\omega \wedge \eta \in \Omega^{p+q}(M)$ como

$$(\omega \wedge \eta)(x) := \omega(x) \wedge \eta(x) \quad \text{para todo } x \in M.$$

Así, $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$ y $\Omega(M) := \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(M)$ es un álgebra graduada anti-conm.

③ Si $(x_1, \dots, x_m)$ son coord. locales en un abierto $\mathcal{U} \subseteq M$ y $\omega \in \Omega^p(M)$ entonces

$$\omega|_{\mathcal{U}} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} f_{i_1 \dots i_p} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \quad \text{con } f_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}).$$

④ Si $\omega \in \Omega^p(M)$ y $\xi_1, \dots, \xi_p \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $\omega(\xi_1, \dots, \xi_p)(x) := \omega(x)(\xi_1(x), \dots, \xi_p(x))$ es una función $\mathcal{C}^\infty$ y $\underline{\omega} : \mathfrak{X}(M) \overset{p\text{-veces}}{\times \dots \times} \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$, $(\xi_1, \dots, \xi_p) \mapsto \omega(\xi_1, \dots, \xi_p)$ es una forma $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilineal alternada.

<u>Construcción</u> (Pullback): Sea $f : M \to N$ una función suave entre var. diferenciables. Luego, $d_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ tiene asociado una aplicación dual (transpuesta)

$$^t(d_x f) =: d_x^* f : T^*_{f(x)} N \longrightarrow T^*_x M$$
$$\ell \longmapsto \ell \circ d_x f$$

y en particular se extiende a $\Lambda^p d_x^* f : \Lambda^p T^*_{f(x)} N \to \Lambda^p T^*_x M$.

Dada $\omega \in \Omega^p(N)$ una p-forma diferencial (con $\omega(y) \in \Lambda^p T^*_y N$ para todo $y \in N$) se define el <u>pullback</u> de ω por f como $f^*\omega \in \Omega^p(M)$ dada por:

$$(f^*\omega)(x) := (\Lambda^p d_x^* f)(\omega(f(x))) \quad \text{para todo } x \in M.$$

Ejercicio importante* Sea $f : M \to N$ función suave. Probar que:

① Si $\alpha \in \Omega^p(N)$ y $\beta \in \Omega^q(N)$ entonces $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.

② Si $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$ entonces $f^*(dg) = d(f^* g)$

<u>Obs</u>: Lo anterior implica que $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ es un morfismo de álgebras graduadas.

⚠ En coord locales: si $(x_1, \dots, x_m)$ son coord. de $V \subseteq N$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ y

$$\omega|_V = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}(x) \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \Rightarrow (f^*\omega)|_{f^{-1}(V)} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} (\alpha_{i_1 \dots i_p} \circ f) \, df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p}.$$

Ejercicio Si $f : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, $(\varphi, \theta) \mapsto (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$ y si $\omega = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$. Probar que $f^*\omega = \sin\varphi \, d\varphi \wedge d\theta$.

§21. Diferencial Exterior

Recuerdo: Un álgebra graduada es un álgebra $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A_p$ verificando $A_p A_q \subseteq A_{p+q}$. Si $a \in A_p \subseteq A$, decimos que a es de grado p y escribimos $|a| = p$. Por último, decimos que A es anti-conmutativa si $ab = (-1)^{|a||b|} ba$.

Def: Sea $r \in \mathbb{Z}$. Una derivación de grado r de un álgebra anti-conmutativa A es una aplicación lineal $D : A \to A$ tal que:

① $D(A_p) \subseteq A_{p+r}$

② $D(ab) = (Da)\cdot b + (-1)^{|a|r} a\cdot(Db)$.

Ejemplos:

① Sea $V \cong \mathbb{R}^n$ esp. vectorial y $\xi \in V$. Se define la contracción por ξ mediante

$$i_\xi = i(\xi) : \Lambda^{p+1} V^* \longrightarrow \Lambda^p V^*, \quad \omega \longmapsto i(\xi)(\omega) := \omega(\xi, \cdot, \dots, \cdot)$$

Ejercicio: Verificar que para $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in V^*$ se tiene que Omitir este término

$$i(\xi)(\alpha_0 \wedge \dots \wedge \alpha_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \alpha_i(\xi)\, \alpha_0 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha_i} \wedge \dots \wedge \alpha_p$$

y que $i(\xi)$ es una derivación de grado -1 en ΛV^*.

② Si D_1 y D_2 son derivaciones de grados r_1 y r_2, resp., entonces

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{r_1 r_2} D_2 \circ D_1$$

es una derivación de grado $r_1 + r_2$ de A.

⚠ Siguiendo una idea muy similar a la que usamos para probar que hay un isom. $\mathfrak{X}(M) \cong \mathrm{Der}(\mathcal{C}^\infty(M))$ se demuestra lo siguiente (ver e.g. Lee, Theorem 14.24):

Teorema: Sea M una variedad diferenciable. Entonces, existe una única derivación de grado 1, llamada diferencial exterior, $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ tal que:

① Para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, df es el diferencial usual.

② $d^2 = d \circ d = 0$.

Ejemplo principal: Sea $M = \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \Omega^p(M)$ dada por

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p}\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

entonces $d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} df_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \in \Omega^{p+1}(M)$ es el diferencial exterior de ω.

Ejercicio importante: En el contexto anterior, si $\alpha = f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ y $\beta = g\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}$.

① Usando que $d(fg) = f\,dg + g\,df$, probar que $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.

② Usando que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, probar que $d(df) = 0$. Deducir que si $\alpha = f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ entonces $d^2 \alpha = d(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = 0$.

③ Deducir que $\omega \longmapsto d\omega$ es (la única!) diferencial exterior en $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$.

<u>Ejemplo</u>: Sea $M = \mathbb{R}^3$ y sea $d_i : \Omega^i(\mathbb{R}^3) \to \Omega^{i+1}(\mathbb{R}^3)$. Así, tenemos

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3) \underset{\text{dy}}{=} \Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d_2} \Omega^3(\mathbb{R}^3)$$

Dotamos a $\mathbb{R}^3$ del producto punto usual (métrica Riemanniana!). Entonces:

① $\mathbb{R}^3 \cong (\mathbb{R}^3)^*$, $(a,b,c) \mapsto a\,dx + b\,dy + c\,dz$

② $\mathbb{R}^3 \cong \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$, $\xi = (a,b,c) \mapsto i_\xi(\mathrm{vol})$ donde $\mathrm{vol} := dx \wedge dy \wedge dz$.

Explícitamente, $i_\xi(\mathrm{vol}) = a\, dy \wedge dz + b\, dz \wedge dx + c\, dx \wedge dy$.

③ $\mathbb{R} \cong \Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$, $\lambda \mapsto \lambda\,\mathrm{vol} = \lambda\, dx \wedge dy \wedge dz$.

Lo anterior se extiende para formas diferenciables: $\Omega^1(\mathbb{R}^3) \cong \Omega^2(\mathbb{R}^3) \cong \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ y $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \cong \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ vía los isomorfismos:

$$P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z} \mapsto P\,dx + Q\,dy + R\,dz \;;\; P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z} \mapsto P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy \;;$$

$$f \mapsto f\, dx \wedge dy \wedge dz .$$

Notar que si $\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$ entonces

$$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$\Rightarrow d_0 \cong \nabla$ (gradiente), $d_1 \cong \mathrm{rot}$ (rotor), $d_2 \cong \mathrm{div}$ (divergencia) con esta identificación.

En part, $d^2 = 0 \iff \mathrm{rot}(\nabla f) = 0$; $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{F}) = 0$.

<u>Prop</u> (Functorialidad): Sea $f : M \to N$ función suave, entonces $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)\ \forall \omega \in \Omega^p(N)$

<u>Dem</u>: Al ser un enunciado local, basta probarlo para $N \simeq V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto.

Sea $\mathcal{U} := f^{-1}(V) \subseteq M$, entonces: si $f = (f_1, \dots, f_m)$ y $\omega|_V = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$

$$\Rightarrow (f^*\omega)|_{\mathcal{U}} \underset{\text{dy}}{=} \sum_{i_1 < \dots < i_p} f^*\alpha_{i_1 \dots i_p} (f^* dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge (f^* dx_{i_p}) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f^*\alpha_{i_1 \dots i_p}\, df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p}$$

Luego, $d(f^*\omega)|_{\mathcal{U}} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d(f^*\alpha_{i_1 \dots i_p}) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p}$

$\alpha_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{C}^\infty(V)$

$$= \sum_{i_1 < \dots < i_p} f^*(d\alpha_{i_1 \dots i_p}) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p}$$

$$\overset{\text{dy}}{=} f^*\Big(\sum_{i_1 < \dots < i_p} d\alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}\Big) = f^*(d\omega)|_{\mathcal{U}} \quad \blacksquare$$

Notar que si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, con $df \underset{\text{loc}}{=} \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, y $\xi \underset{\text{loc}}{=} \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ entonces se tiene que $(df)(\xi) = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \theta_\xi(f) \underset{\text{dy}}{=} \mathcal{L}_\xi(f)$. La fórmula

$$(l_1 \wedge \dots \wedge l_p)(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)\, l_1(x_{\sigma(1)}) \cdots l_p(x_{\sigma(p)}) \quad , l_i \in V^* , x_i \in V$$

permite probar la famosa:

<u>Prop</u> (Fórmula de Maurer-Cartan): Si $\omega \in \Omega^p(M)$ y $\xi_0, \dots, \xi_p \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$(d\omega)(\xi_0, \dots, \xi_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \mathcal{L}_{\xi_i}\big(\omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \xi_p)\big) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \hat{\xi_i}, \dots, \hat{\xi_j}, \dots, \xi_p)$$

<u>Dem</u>: Veamos el caso $p = 1$ (el más usado), pues $p \geq 2$ es análogo: queremos probar que

si $\omega \in \Omega^1(M)$ y $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$(d\omega)(\xi,\eta) = \mathcal{L}_\xi(\omega(\eta)) - \mathcal{L}_\eta(\omega(\xi)) - \omega([\xi,\eta]) \quad (*)$$

Dado que toda 1-forma es suma de términos de la forma $f\,dg$, podemos asumir que $\omega = f\,dg$ con $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y luego $d\omega = df \wedge dg$. Así,

$$(d\omega)(\xi,\eta) = (df\wedge dg)(\xi,\eta) = (df)(\xi)(dg)(\eta) - (df)(\eta)(dg)(\xi) = \mathcal{L}_\xi(f)\mathcal{L}_\eta(g) - \mathcal{L}_\eta(f)\mathcal{L}_\xi(g).$$

Por otra parte, el lado derecho de $(*)$ está dado por:

$$\mathcal{L}_\xi(f\,\mathcal{L}_\eta(g)) - \mathcal{L}_\eta(f\,\mathcal{L}_\xi(g)) - f\,\mathcal{L}_{[\xi,\eta]}(g)$$

$$\underset{\text{Leibniz}}{=} \mathcal{L}_\xi(f)\mathcal{L}_\eta(g) - \mathcal{L}_\eta(f)\mathcal{L}_\xi(g) + f\,\overbrace{\left(\mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_\eta(g)) - \mathcal{L}_\eta(\mathcal{L}_\xi(g)) - \mathcal{L}_{[\xi,\eta]}(g)\right)}^{=0 \text{ por def de } [\xi,\eta]} \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Para concluir, recordemos que si $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ con flujo asociado $\varphi_t : M \xrightarrow{\sim} M$ entonces podemos definir la <u>derivada de Lie</u> de $\omega \in \Omega^p(M)$ como

$$\mathcal{L}_\xi(\omega) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t^*\omega$$

Dado que $\varphi_t^*(\alpha\wedge\beta) = \varphi_t^*\alpha \wedge \varphi_t^*\beta$, al derivar obtenemos que

$$\mathcal{L}_\xi(\alpha\wedge\beta) = \mathcal{L}_\xi(\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge\mathcal{L}_\xi(\beta),$$

ie, $\mathcal{L}_\xi : \Omega(M) \to \Omega(M)$ es una derivación de <u>grado 0</u>.

<u>Teorema</u> (Fórmula mágica de Cartan): Sea $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi \circ d + d \circ i_\xi$$

<u>Dem</u>: De manera análoga a la existencia del diferencial exterior, se prueba el sgte:

<u>Hecho</u>: Sea $D : \Omega^0(M) \to \Omega^r(M)$ tq $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ $\forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Entonces, $\exists!$ derivación $\nabla : \Omega(M) \to \Omega(M)$ de grado r tal que
① $\nabla|_{\mathcal{C}^\infty(M)} = D$; ② $\nabla d - (-1)^r d\nabla = 0$.

Notar que $(i_\xi \circ d + d\circ i_\xi)(f) = i_\xi(df) = \mathcal{L}_\xi(f)$ y luego $\mathcal{L}_\xi$ y $i_\xi\circ d + d\circ i_\xi$ son dos derivaciones de grado $r=0$ que coinciden en $\mathcal{C}^\infty(M)$, ie, ① ✓

Veamos que ambas verifican ② (y luego, coinciden en $\Omega(M)$):

Por un lado, $(i_\xi\circ d + d\circ i_\xi)\circ d \underset{d^2=0}{=} d\circ i_\xi\circ d \underset{d^2=0}{=} d\circ(i_\xi\circ d + d\circ i_\xi)$ ✓

Por otro lado, la identidad $\varphi_t^* d\omega = d(\varphi_t^*\omega)$ implica al derivar que:

$$\mathcal{L}_\xi(d\omega) = d(\mathcal{L}_\xi\omega), \quad \text{ie}, \quad \mathcal{L}_\xi\circ d = d\circ\mathcal{L}_\xi \quad \checkmark$$

Así, concluimos que $\mathcal{L}_\xi\omega = i_\xi(d\omega) + d(i_\xi\omega)$ para toda $\omega \in \Omega^p(M)$ $\blacksquare$

§22. Orientación de Variedades

Recuerdo (Álgebra Lineal): Sea $V = \mathbb{R}^m$. Entonces $\Lambda^m V \cong \mathbb{R}$. Una orientación de V es una elección de una semi-recta positiva $\mathbb{R}^{>0} \subseteq \Lambda^m V$. Dada $(e_1, \ldots, e_m)$ una base de V, decimos que es una base directa si $e_1 \wedge \ldots \wedge e_m > 0$.

⚠ Si $e_i = u(f_i)$ con $u \in Gl_m(\mathbb{R})$, entonces $e_1 \wedge \ldots \wedge e_m = \det(u)\, f_1 \wedge \ldots \wedge f_m$. Luego, todas las bases directas de V se obtienen de (e_i) mediante elementos del grupo

$$Gl_m^+(\mathbb{R}) := \{ u \in Gl_m(\mathbb{R}) \text{ tal que } \det(u) > 0 \}.$$

Def: Decimos que una variedad diferenciable M es orientable si existe un atlas $\mathcal{A}$ tal que si $\varphi_i, \varphi_j \in \mathcal{A}$ entonces $\det(J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})) > 0$. Una orientación de M es una elección de un atlas maximal $\mathcal{A}$ verificando lo anterior.

Obs: La "conjugación" $\sigma(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_{m-1}, -x_m)$ revierte la orientación de $\mathbb{R}^m$. Luego, si $\mathcal{A} = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ es un atlas orientado de M entonces $\overline{\mathcal{A}} := \{\sigma \circ \varphi_i\}_{i \in I}$ define otra orientación en M, y se escribe $\overline{M} := (M, \overline{\mathcal{A}})$.

Construcción: Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad orientada. Si $\varphi_i \in \mathcal{A}$ entonces $d_x\varphi_i : T_xM \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo, y luego la orientación canónica de $\mathbb{R}^m$ induce una orientación en T_xM. Dado que $\det(Jac(\varphi_j \circ \varphi_i)) > 0$, dicha orientación es indep. de la carta local. Así, una orientación de M induce una orientación de T_xM para todo $x \in M$.

Def: Una forma de volumen en una variedad diferenciable M es una n-forma diferencial, con $n = \dim(M)$, $\omega \in \Omega^n(M)$ tal que $\omega(x) \neq 0$ en $\Lambda^n T_x^* M$ para todo $x \in M$.

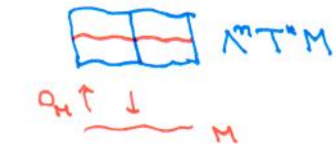
Lema: Una forma de volumen en M determina una orientación en M.

Dem: Sea $\omega \in \Omega^n(M)$ forma de volumen y sea $\omega_x = \omega(x) \in \Lambda^n T_x^* M \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^*$. Entonces, ω determina una orientación en T_xM: (e_i) es una base directa si $\omega_x(e_1, \ldots, e_n) > 0$. Luego, podemos orientar M tomando como atlas a las cartas φ tales que $d_x\varphi : T_xM \to \mathbb{R}^n$ preserva la orientación (si φ no funciona, componer $\sigma \circ \varphi$ con la conjugación σ). ■

Prop: Una variedad M es orientable $\iff$ M posee una forma de volumen.

Dem: Sea g una métrica Riemanniana en M. Así, una orientación de M dota a cada $(T_xM, g_x) \cong (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de estructura de espacio euclídeo orientado. Usando Gram-Schmidt, podemos encontrar una base ortonormal directa $(e_1, \ldots, e_m)$ de T_xM y con ello construir la forma de volumen $\omega_x := e_1^* \wedge \ldots \wedge e_m^*$ verificando $\omega_x(e_1, \ldots, e_m) = 1$ $\forall x \in M$ ✓ ■

Cultura general Si $(x_1, \dots, x_n)$ son coord. locales en (M, g) y $g(x)$ es la matriz simétrica asociada a la métrica, entonces $d\mathrm{vol}_g = \sqrt{\det g(x)}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ es la forma de volumen.



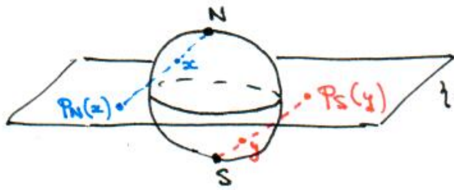
Obs útil: Sea M una variedad conexa. Entonces:

M orientable $\iff \Lambda^n T^* M \setminus \underbrace{0_M(M)}_{\text{sección nula}}$ tiene dos componentes conexas.

Una orientación en M es la elección de una de estas componentes conexas.

Ejemplos:

① La esfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ posee dos cartas (proyecciones estereográficas)



$\{x_0 = 0\} \cong \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Aquí $p_S \circ p_N^{-1}(x) = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ verifica $\det J(p_S \circ p_N^{-1}) < 0$ $\boxed{\text{Ejercicio}}$.

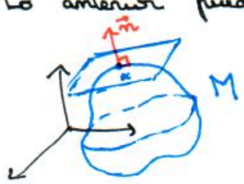
$\Rightarrow \{p_N, \sigma \circ p_S\} = \mathcal{A}$ es un atlas orientado de $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $v := dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n$ la forma de volumen de $\mathbb{R}^n$ y sea $\xi := \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ campo vectorial radial (o "campo de Euler"). Sea $j : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión, probar que

$$\omega := j^*(i_\xi v) \underset{\text{def}}{=} (i_\xi v)\big|_{S^n} \text{ es una forma de volumen en la esfera } S^n :$$

② Hecho de Topología Algebraica (Alexander): Sea $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie compacta, entonces $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ tiene dos componentes conexas: el interior de M (componente acotada) y el exterior de M (componente no-acotada).

Lo anterior puede ser usado para orientar toda hipersuperficie compacta $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$:



Para todo $x \in M$, sea $\vec{n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que:

① $\|\vec{n}\| = 1$ y $\vec{n} \perp T_x M$.

② $\vec{n}$ es "normal exterior", i.e., para $0 < t << 1$, $x + t\vec{n}$ está en el exterior de M.

$\Rightarrow \omega := i_{\vec{n}}(dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n)\big|_M$ es una forma de volumen en M (cf. Ejercicio anterior!).

③ El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: Sea $p : S^n \longrightarrow S^n / \langle \tau \rangle = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ con $\tau(x) = -x$.

Si $\omega = (i_\xi v)|_{S^n}$ es la forma de volumen de S^n entonces se calcula que

$$\tau^* \omega = (-1)^{n+1} \omega \quad \boxed{\text{Ejercicio}}$$

$\Rightarrow \tau$ preserva (resp. invierte) la orientación de S^n si n es impar (resp. n es par).

Consecuencia: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es orientable $\iff n$ es impar. En efecto:

$(\Rightarrow)$ Sup. $\exists\, \eta$ forma de volumen en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{\eta} := p^* \eta$ forma de vol. en S^n (p difeo local!)

Como $p \circ \tau = p$ se tiene $\tau^* \hat{\eta} = \hat{\eta}$, i.e., τ preserva orientación y luego n impar ✓

$(\Leftarrow)$ n impar $\Rightarrow \tau^* \omega = \omega$ y luego $\exists\, \eta \in \Omega^n \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tq $\omega = p^* \eta \Rightarrow \eta$ forma de volumen ✓

⚠ Los ejemplos ② y ③ prueban que $\nexists$ encajamiento $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (cf. Teorema de Whitney).

§ 23. Variedades con borde

La bola cerrada $\overline{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| \leq 1\}$ <u>no</u> es una variedad diferenciable. 
Sin embargo, en $\partial\overline{\mathbb{B}}^n = S^{n-1}$ luce como $\mathbb{R}^{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$: es una "variedad con borde".
En esta sección resumimos (sin demostración) las propiedades de estos objetos (cf. Lee).

<u>Def</u> : Una <u>variedad con borde</u> es un esp. topológico Hausdorff y σ-compacto M junto con un atlas de cartas $\varphi_i : \mathcal{U} \subseteq M \to V$, donde V es un abierto de $\mathbb{R}^n$ o de $\mathbb{R}^{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ y tal que los cambios de cartas son difeomorfismos.

<u>Obs técnica</u> : Decimos que $f : \mathcal{U} \underset{\text{abierto}}{\subseteq} \mathbb{R}^{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^m$ es $\mathcal{C}^\infty$ si se extiende en una función $\mathcal{C}^\infty$ de un abierto de $\mathbb{R}^n$ hacia $\mathbb{R}^m$.

<u>Construcción</u> : Sean $\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{R}^{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ y $\varphi_2 : \mathcal{U}_2 \to \mathbb{R}^{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ dos cartas en el borde.
Entonces, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \xrightarrow{\sim} \varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ envía $\varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ en el conjunto $\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$. Luego, si definimos el <u>borde</u> de M por

$$\partial M := \bigcup_{\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathbb{R}^{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}} \varphi_i^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$$

tenemos que $\{\varphi_i|_{\mathcal{U}_i \cap \partial M}\}$ forman un atlas de ∂M con valores en abiertos de $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ y luego ∂M es una variedad diferenciable (sin borde !) de $\dim(\partial M) = n - 1$.

$\boxed{\text{Ejercicio útil}}$ Sea M var. diferenciable y $f : M \to \mathbb{R}$ suave. Si $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular de f, entonces $M := f^{-1}(]-\infty, c])$ es una variedad con borde y $\partial M = f^{-1}(c)$.

<u>Ejemplo</u> : ① Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$ entonces $\overline{\mathbb{B}}^n = f^{-1}(]-\infty, 1])$ variedad con borde.
② Si M var diferenciable, entonces $N = M \times [0,1]$ es una var. con borde y $\partial N = M \times \{0,1\}$.

La orientación de variedades con borde es análoga al curso de Cálculo Vectorial (MAT024):
Sea $x \in M$. Si $x \in \mathrm{int}(M) := M \setminus \partial M$ entonces $T_x M$ se define de manera usual.
Si $x \in \partial M$ y $\varphi_i : \mathcal{U} \subseteq M \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ es una carta en el borde entonces consideramos $\varphi_i(x) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ como un punto de $\mathbb{R}^n$ y declaramos que

$$d_x \varphi_i : T_x M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

es un isomorfismo. Notar que $T_x \partial M \cong \mathbb{R}^{n-1}$ es un sub.ev de $T_x M$:

$$\begin{array}{ccc} T_x \partial M & \hookrightarrow & T_x M \\ \downarrow d_x(\varphi_i|_{\partial M}) & & \downarrow d_x \varphi_i \\ \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$$

⚠ Si φ_j es otra carta en $x \in \partial M$, entonces $d_x \varphi_j = (d_{\varphi_i(x)}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})) \circ d_x \varphi_i$ con

$(\star)$ $d_{\varphi_i(x)}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ * & A \end{pmatrix}$ con $\underbrace{\lambda > 0}$ y $A = d_{\varphi_i(x)}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}}) \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$.

$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\mathbb{R}^{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}) \subseteq \mathbb{R}^{\leq 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ "$(+) \cdot (-) = (-)$"

Convención / Construcción: Supongamos M una variedad con borde orientada, entonces ∂M tiene una orientación "canónica" inducida:

Opción 1: Si $\{\varphi_i\}$ es un atlas orientado de M, entonces ($\star$) implica que si $\det(J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})) > 0$ entonces lo mismo vale para $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}$ y luego ∂M está orientada.

$\Updownarrow$

Opción 2: Si $x \in \partial M$ y $\vec{n} \in T_x M$ vector tangente "exterior" de M, ie, $\exists$ una carta φ_i tal que $(d_x\varphi_i)(\vec{n}) \in \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R}^{n-1}$ (indep. de φ_i por ($\star$)) entonces decimos que $(e_2, \dots, e_n)$ es una base directa de $T_x \partial M$ si la base $(\vec{n}, e_2, \dots, e_n)$ de $T_x M$ es directa.

§24. Integración en variedades y Teorema de Stokes

Sea M variedad (con o sin borde) orientada y $\omega \in \Omega^n_c(M)$ una n-forma diferencial con soporte compacto. Definimos la integral $\int_M \omega$ en varios pasos:

Paso 1: Si $\mathrm{Supp}(\omega) \subseteq \mathcal{U}$ abierto asociado a una carta, con coord. $(x_1, \dots, x_n)$ resp. a una base directa, entonces $\omega = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ y definimos $\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx_1 \dots dx_n$.

Paso 2: Si $\mathrm{Supp}(\omega) \subseteq \mathcal{U} \cap V$ con $\mathcal{U}$ y V abiertos como en el Paso 1, con coord. locales $(x_1, \dots, x_n)$ y $(y_1, \dots, y_n)$ resp. Entonces, $x = \varphi(y)$ con φ un difeo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \omega = (f\circ\varphi)\cdot \det(J(\varphi))\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ con $\det(J(\varphi)) > 0$ por la orientabilidad. Así,

$\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} (f\circ\varphi)\cdot|\det(J(\varphi))|\, dy_1 \cdots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n} (f\circ\varphi) \det(J(\varphi))\, dy_1 \cdots dy_n$,

ie, el cálculo de $\int_M \omega$ es independiente de las coord. x o y.

Paso 3: Sea $\{\mathcal{U}_i\}$ un cubrimiento de M por cartas locales y $\{\mu_i\}$ una partición de la unidad subordinada a él. Entonces, definimos $\int_M \omega := \sum_i \int_M \mu_i \omega$.

Si $\{V_j\}$ es otro cubrimiento con partición asociada $\{\rho_j\}$ entonces:

$$\int_M \rho_j \omega = \int_M \Big(\sum_i \mu_i\Big)\rho_j \omega = \sum_i \int_M \mu_i \rho_j \omega \Rightarrow \sum_j \int_M \rho_j \omega = \sum_{i,j} \int_M \mu_i \rho_j \omega = \sum_i \int_M \mu_i \omega$$

Así, la construcción es independiente del cubrimiento y $\int_M \omega$ está bien definida ✓

Observación útil: Sea $f : M \xrightarrow{\sim} N$ un difeomorfismo preservando (resp. invirtiendo) la orientación, ie, $d_x f : T_x M \xrightarrow{\sim} T_{f(x)} N$ preserva (resp. invierte) la orientación de cada espacio. Entonces, los cálculos del Paso 2 implican que para toda $\omega \in \Omega^n_c(N)$ se tiene que:

$$\int_M f^*\omega = \int_N \omega \quad \Big(\text{resp. } \int_M f^*\omega = -\int_N \omega\Big).$$

Ejemplo: Sea $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ dada por $c(t) = (x(t), y(t))$ y sea $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$

$\Rightarrow \int_c \omega = \int_{[a,b]} c^*\omega \underset{\text{dy}}{=} \int_a^b \big(f(x(t),y(t))\,x'(t) + g(x(t),y(t))\,y'(t)\big)\,dt$.

Teorema de Stokes: Sea M una variedad con borde orientada de $\dim(M) = n$ y sea $\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$. Si denotamos por $i : \partial M \hookrightarrow M$ la inclusión, entonces

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega$$

En particular, si M no tiene borde entonces $\int_M d\omega = 0$.

Dem: Usando particiones de la unidad, podemos asumir (dado que la integral es invariante por difeomorfismos) que $M = \mathbb{R}^n$ ó $M = \mathbb{R}^{\le 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $M = \mathbb{R}^n$: Escribamos $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m$ y $d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$

Como ω tiene soporte compacto, $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i = 0 \overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$ ✓

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $M = \mathbb{R}^{\le 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$: El razonamiento anterior vale para $i \in \{2, \dots, n\}$. Para $i = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^{\le 0} \times \{(x_2,\dots,x_m)\}} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \underset{\text{TFC}}{=} f_1(0, x_2, \dots, x_m) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{\le 0} \times \mathbb{R}^{n-1}} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_m) \, dx_2 \cdots dx_m$$

⚠ Como $(x_2, \dots, x_m)$ son coord. en $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ compatibles con la orientación inducida por $M = \mathbb{R}^{\le 0} \times \mathbb{R}^{n-1}$, y como $i^*\omega \underset{\text{dy}}{=} f_1(0, x_2, \dots, x_n) \, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ (!) concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_m) \, dx_2 \cdots dx_m \underset{\text{dy}}{=} \int_{\partial(\mathbb{R}^{\le 0} \times \mathbb{R}^{n-1})} i^*\omega \quad \text{y así} \quad \int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que si $M = \mathbb{R}^n$ con $n=1$ (resp. $n=2$, resp. $n=3$) entonces el Teo. de Stokes permite reformular el Teo. Fundamental del Cálculo (resp. Teo. de Green, resp. Teo. de Gauss).

Veamos otra aplicación del Teorema de Stokes:

Def: Sea X un esp. topológico y $A \subseteq X$ un subesp. top. Una función continua $r : X \to A$ es un retracto (de deformación) si $r|_A = Id_A$, ie, $r(a) = a$ para todo $a \in A$.

Teorema: Sea M una variedad compacta orientada con $\partial M \neq \emptyset$. Entonces, no existe una retracción $r : M \to \partial M$ de clase C^∞ de M sobre su borde ∂M.

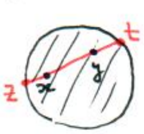
Dem: Sup. que r existe y sea $\omega \in \Omega^{n-1}(\partial M)$ tal que $\int_{\partial M} \omega > 0$. Para esto último, basta considerar (en coord. locales orientadas) $\omega \underset{\text{loc}}{=} f \, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ con $f \geq 0$ no-nula de soporte compacto. Si $i : \partial M \hookrightarrow M$ entonces $r|_{\partial M} = Id_M \iff r \circ i = Id_M$ y luego:

$$\int_M d(r^*\omega) \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial M} i^* r^* \omega \underset{r \circ i = Id_M}{=} \int_{\partial M} \omega > 0 \;, \text{ pero } d(r^*\omega) = r^*(d\omega) \underset{\substack{\uparrow \\ \dim(\partial M) = m-1}}{=} 0 \;\; ⚡ \;\; \blacksquare$$

Una consecuencia del resultado anterior es el famoso:

Teorema del Punto Fijo de Brouwer: Sea $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } \|x\| \leq 1\}$, y sea $f : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ función suave. Entonces, f posee un punto fijo.

Dem: Supongamos que f no posee puntos fijos, y sea $x \in \overline{B}^n$. Dado que $y = f(x) \neq x$ podemos considerar la recta $\langle x, y \rangle$ que corta $\partial\overline{B}^n$ en $\langle x, y \rangle \cap \partial\overline{B}^n = \{z, t\}$:



Escribiendo los puntos (z, x, y, t) de manera ordenada en la recta, podemos definir $r : \overline{B}^n \to \partial\overline{B}^n$, $x \mapsto r(x) := z$.

No es difícil verificar (eg. escribiendo una fórmula explícita) que r es una función C^∞. Más aún, por construcción, r define un retracto de $\overline{B}^n$ en $\partial\overline{B}^n = S^{n-1}$ ⚡ $\blacksquare$

Cultura general: Ambos Teoremas son válidos para funciones continuas en lugar de C^∞.

§25. Cohomología de de Rham

Durante toda esta sección, M es una variedad diferenciable (sin borde) de $\dim(M) = n$.

Sea $\omega \in \Omega^p(M)$ una p-forma diferencial. Decimos que:

① ω es una forma cerrada si $d\omega = 0$.

② ω es una forma exacta si $\exists\, \eta \in \Omega^{p-1}(M)$ tal que $\omega = d\eta$.

Dado que $d^2 = 0$, hay una inclusión de espacios vectoriales $\{p\text{-formas exactas}\} \subseteq \{p\text{-formas cerradas}\}$

Def: Para todo $p \geq 0$ se define la p-ésima cohomología de de Rham como el cociente

$$H^p_{dR}(M) := \{p\text{-formas cerradas}\} / \{p\text{-formas exactas}\}.$$

Además, se define $H^\bullet_{dR}(M) := \bigoplus_{p\geq 0} H^p_{dR}(M)$.

Notación: Si $\omega \in \Omega^p(M)$ es cerrada, denotamos por $[\omega]$ su clase en $H^p_{dR}(M)$.

Ejemplos:

① Si $p = 0$, entonces $H^0_{dR}(M)$ consiste en $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $df = 0$, ie, f es localmente constante. Así, $H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}^{b_0(M)}$ donde $b_0(M) := \#$ comp. conexas de M.

② Si $p = n$, entonces toda $\omega \in \Omega^n(M)$ es cerrada. Por otra parte, si M es una variedad compacta y orientada entonces el Teorema de Stokes implica que si $\omega = d\eta$ $\Rightarrow \int_M \omega = \int_M d\eta = 0$ pues $\partial M = \emptyset$. Luego, la aplicación lineal $\omega \mapsto \int_M \omega$ induce

$$\int_M : H^n_{dR}(M) \twoheadrightarrow \mathbb{R}, \quad [\omega] \longmapsto \int_M \omega$$

sobreyectiva (pues si ω forma de volumen entonces $\int_M \omega > 0$).

Def: El p-ésimo número de Betti es $b_p(M) := \dim_{\mathbb{R}} H^p_{dR}(M) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si todos ellos son finitos, se define la característica de Euler-Poincaré como

$$\chi(M) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, b_i(M).$$

Prop: ① El producto exterior de formas diferenciales induce una estructura de álgebra en $H^\bullet_{dR}(M)$ definiendo $[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$.

② Sea $f: M \to N$ función suave. Entonces $f^*: \Omega(N) \to \Omega(M)$, $\omega \mapsto f^*\omega$ induce una aplicación en cohomología $f^*: H^p_{dR}(N) \to H^p_{dR}(M)$, $[\omega] \mapsto [f^*\omega]$.

③ Si $M = \bigcup_{i\in I} M_i$, con M_i componente conexa de M, entonces $H^\bullet_{dR}(M) = \bigoplus_{i\in I} H^\bullet_{dR}(M_i)$

Dem: $\boxed{\text{Ejercicio}}$ ■

Una propiedad "importante" de la cohomología de de Rham es la "invariancia por homotopía":

Recuerdo: Sean $f_0, f_1 : M \to N$ funciones suaves. Decimos que f_0 y f_1 son homotópicamente equivalentes si $\exists\, f: [0,1] \times M \to N$ suave tal que $f(0,x) = f_0(x)\ \forall x \in M$ y $f(1,x) = f_1(x)\ \forall x \in M$. En tal caso, escribimos $f_0 \sim f_1$.

Decimos que una función suave $f: M \to N$ es una equivalencia homotópica, y escribimos $M \underset{f}{\simeq} N$ o $M \sim N$, si $\exists\, g: N \to M$ suave tq $f \circ g \sim Id_N$ y $g \circ f \sim Id_M$.

[Caso particular importante: Decimos que M es contractible si $\exists\, x_0 \in M$ tal que la inclusión $i: \{x_0\} \hookrightarrow M$ es una equivalencia homotópica, ie, $\{x_0\} \underset{i}{\simeq} M$.

Por ejemplo, si $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto estrellado entonces $\mathcal{U}$ es contractible. En efecto, trasladando $\mathcal{U}$ si fuera necesario, podemos asumir que $0 \in \mathcal{U}$ y que $tx \in \mathcal{U}$ para todo $x \in \mathcal{U}$ y todo $t \in [0,1]$. Así, $f: [0,1] \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $(t,x) \mapsto tx$ verifica $f(0,x) \equiv 0$ y $f(1,x) = Id_{\mathcal{U}}$. Así, $\{0\} \sim \mathcal{U}$.

[Teorema: Sean $f_0 : M \to N$ y $f_1 : M \to N$ funciones suaves tal que $f_0 \sim f_1$. Entonces, $f_0^* = f_1^* = H^\bullet_{dR}(N) \to H^\bullet_{dR}(M)$ coinciden.

Dem (sketch): Es posible usar la fórmula mágica de Cartan para probar:

Hecho: $\exists\, K : \Omega^p([0,1] \times M) \to \Omega^{p-1}(M)$ "operador de homotopía" tal que para toda $\omega \in \Omega^p([0,1] \times M)$ se tiene $i_1^*\omega - i_0^*\omega = d(K\omega) + K(d\omega)$, donde $i_t : M \to [0,1]\times M$ está dado por $i_t(x) = (t,x)$.

Con la notación anterior, si $f: [0,1] \times M \to N$, $(t,x) \mapsto f(t,x) := f_t(x)$ es la homotopía entre f_0 y f_1, entonces $f_t \overset{\text{def}}{=} f \circ i_t$. Así, si $\omega \in \Omega^p(N)$ es cerrada (ie, $d\omega = 0$) entonces:

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = i_1^* f^*\omega - i_0^* f^*\omega \overset{\text{Hecho}}{=} d(Kf^*\omega) + K(df^*\omega) \overset{df^*\omega = f^*d\omega = 0}{=} d\eta, \text{ con } \eta = Kf^*\omega$$

$$\Rightarrow [f_1^*\omega] = [f_0^*\omega] \text{ en } H^p_{dR}(M) \blacksquare$$

Consecuencia: ① si $M \sim N$, entonces $H^p_{dR}(M) \cong H^p_{dR}(N)$.

② si $M \sim \{x_0\}$ es contractible (eg. $M = \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto estrellado) entonces $H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$ y $H^p_{dR}(M) = \{0\}$ si $p > 0$.

Cultura general: De manera más general, se puede probar (aproximando funciones continuas por funciones $\mathcal{C}^\infty$) que si $f_0 : M \to N$ y $f_1 : M \to N$ son homotópicamente equivalentes mediante $f: [0,1] \times M \to N$ una homotopía continua entonces

$$f_0^* = f_1^* : H^\bullet_{dR}(N) \to H^\bullet_{dR}(M) \text{ coinciden.}$$

Mejor aún, el Teorema de de Rham afirma que $H^p_{dR}(M) \cong H^p(M, \mathbb{R})$ coincide con la "cohomología singular" con coeficientes reales (cf. MAT426 para más detalles).

§26. Sucesión exacta de Mayer - Vietoris.

Sea M una variedad diferenciable y $M = \mathcal{U} \cup V$ cubrimiento por dos abiertos, entonces

$$(\star) \quad 0 \to \Omega(M) \xrightarrow{f} \Omega(\mathcal{U}) \oplus \Omega(V) \xrightarrow{g} \Omega(\mathcal{U} \cap V) \to 0 ,$$

donde $f(\omega) = (\omega|_{\mathcal{U}}, \omega|_V)$ y $g(\omega, \eta) = \omega|_{\mathcal{U}\cap V} - \eta|_{\mathcal{U}\cap V}$, es una sucesión exacta.

En otras palabras, f inyectiva, $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$ y g sobreyectiva.

Obs: Para ver que g es sobreyectiva, sea $(\mu_{\mathcal{U}}, \mu_V)$ una partición de la unidad subordinada a $\{\mathcal{U}, V\}$ y sea $\omega \in \Omega(\mathcal{U}\cap V)$. Entonces $\mu_{\mathcal{U}}\omega \in \Omega(V)$ y $\mu_V \omega \in \Omega(\mathcal{U})$ son tales que $\omega = g(\mu_V\omega, -\mu_{\mathcal{U}}\omega)$ ✓

extensión por 0

Un hecho general de Álgebra Homológica (cf. MAT426!) que $(\star)$ tiene asociada una "sucesión exacta larga", llamada la sucesión exacta de Mayer - Vietoris:

$$0 \to H^0_{dR}(M) \to H^0_{dR}(\mathcal{U}) \oplus H^0_{dR}(V) \to H^0_{dR}(\mathcal{U}\cap V) \xrightarrow{\delta} H^1_{dR}(M) \to \dots$$

$$\to H^p_{dR}(M) \to H^p_{dR}(\mathcal{U}) \oplus H^p_{dR}(V) \to H^p_{dR}(\mathcal{U}\cap V) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}_{dR}(M) \longrightarrow \dots$$

Ejemplo: Sea $S^n = \mathcal{U} \cup V$ con $\mathcal{U} = S^n \setminus \{N\}$ y $V = S^n \setminus \{S\}$.

$\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Entonces, el "ecuador" S^{n-1} es un retracto de deformación de $\mathcal{U}\cap V$, i.e., $S^{n-1} \hookrightarrow \mathcal{U}\cap V$ es una equivalencia homotópica

$$r : \mathcal{U}\cap V \to S^{n-1}$$
$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{\|(x_1, \dots, x_n)\|}$$
$$h(t; x_0, \dots, x_n) = \frac{(tx_0, x_1, \dots, x_n)}{\|(tx_0, x_1, \dots, x_n)\|}$$

$\Rightarrow H^\bullet_{dR}(\mathcal{U}\cap V) \cong H^\bullet_{dR}(S^{n-1})$. Dado que $\mathcal{U} \cong V \cong \mathbb{R}^n$ son contractibles, tenemos que $H^p_{dR}(\mathcal{U}) = H^p_{dR}(V) = \{0\}$ si $p \geq 1$. Luego, Mayer - Vietoris implica que si $p \geq 1$:

$$\dots \to H^p_{dR}(\mathcal{U}) \oplus H^p_{dR}(V) \simeq \{0\} \longrightarrow H^p_{dR}(\mathcal{U}\cap V) \simeq H^p_{dR}(S^{n-1}) \longrightarrow H^{p+1}_{dR}(S^n) \longrightarrow \{0\} \to \dots$$

$\Rightarrow H^p_{dR}(S^{n-1}) \cong H^{p+1}_{dR}(S^n)$ ✓ Calculemos por inducción:

Para $p = 0$, como $S^0 = \{\pm 1\}$ ($\Rightarrow H^0_{dR}(S^0) \cong \mathbb{R}^2$), tenemos que la sucesión

$$0 \to H^0_{dR}(S^n) \cong \mathbb{R} \to H^0_{dR}(\mathcal{U}) \oplus H^0_{dR}(V) \cong \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} H^0_{dR}(S^{n-1}) \to H^1_{dR}(S^n) \to 0$$
$$(\omega, \eta) \mapsto \omega - \eta$$

implica para $n = 1$ que $H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$ (pues $\mathrm{Im}(g) \cong \mathbb{R}$). Por otra parte, si $n \geq 2$ entonces $H^0_{dR}(S^{n-1}) \cong \mathbb{R}$ y luego $H^1_{dR}(S^n) = \{0\}$. En conclusión:

$$H^p_{dR}(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0 \text{ ó } n \\ 0 & \text{si } 0 < p < n \end{cases}$$

En part, $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ y además $\int : H^n_{dR}(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ es un isomorfismo.

§27. Grado topológico de Brouwer

Sea M una variedad diferenciable (sin borde) de $\dim(M) = m$. Si en lugar de utilizar $(\Omega(M), d)$ para calcular la cohomología de de Rham usamos $\Omega_c(M)$, las formas con soporte compacto, entonces construimos el grupo de cohomología a soporte compacto

$$H_c^\bullet(M) = \bigoplus_{p=0}^{m} H_c^p(M).$$

En particular, si M es una variedad compacta entonces $H_c^\bullet(M) \cong H_{dR}^\bullet(M)$.

⚠ Si M es una variedad orientada el Teorema de Stokes implica que

$$\int_M : H_c^m(M) \twoheadrightarrow \mathbb{R},\ [\omega] \mapsto \int_M \omega$$

está bien definida. Por ejemplo, vimos que $H_c^n(S^n) \cong H_{dR}^n(S^n) \cong \mathbb{R}$.

De manera análoga (ie, usando Mayer-Vietoris, y ciertas funciones "cut off") se prueba:

Teorema: Sea M una variedad conexa y orientada de $\dim(M) = m$. Entonces, $\int_M : H_c^m(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, $[\omega] \mapsto \int_M \omega$ es un isomorfismo.

Este resultado nos permitirá definir la noción de "grado topológico" de una función, la cual fue introducida por Brouwer (1911) y generalizada por Leray y Schauder (1934).

Motivación: Sea $P \in \mathbb{R}[X]$ polinomio real de grado ≥ 1. Entonces, la paridad del número de soluciones (con mult.) de la ecuación $P(x) = \lambda$ es independiente de $\lambda \in \mathbb{R}$!

¿Cómo formalizar y extender este fenómeno?

Def: Sean M y N dos variedades compactas conexas orientadas de $\dim(M) = \dim(N) = m$, y sea $f : M \to N$ una función suave. Se define $\deg(f) \in \mathbb{R}$ mediante el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^m(N) & \xrightarrow{f^*} & H^m(M) \\ \cong \downarrow \int_N & & \cong \downarrow \int_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\cdot \deg(f)} & \mathbb{R} \end{array}$$

ie, para toda $\omega \in \Omega^m(N)$ se tiene que $\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega$.

Obs importante:

① $\deg(f)$ está bien definido para funciones propias entre variedades no compactas.

② Dado que $f^* : H^m(N) \to H^m(M)$ es un invariante homotópico, si $f \sim g$ entonces $\deg(f) = \deg(g)$. Aproximando por funciones suaves, es posible definir $\deg(f)$ para $f : M \to N$ continua.

Ejemplo: Si $f : M \xrightarrow{\sim} N$ es un difeomorfismo, entonces

$$\deg(f) = \pm 1$$

con $\deg(f) = 1$ (resp. $\deg(f) = -1$) si f preserva (resp. invierte) la orientación.

Ejemplo: $M = N = S^1 \subseteq \mathbb{C}$. Si $f : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$ y $\omega = g(\theta)\, d\theta$ entonces:

$$\int_0^{2\pi} f^*(g(\theta)\, d\theta) = \int_0^{2\pi} g(k\theta)\, d(k\theta) = k \int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta \quad \text{, ie, } \deg(f) = k.$$

Notación: Sea $f : M \to N$ como antes y sea $y \in N$ valor regular de f. Si $x \in M$ es tal que $y = f(x)$ entonces $d_x f : T_x M \xrightarrow{\sim} T_y N$ es un isomorfismo. Se define:

$$\text{signo}(d_x f) = \sigma(d_x f) := \pm 1$$

dependiendo si f preserva o invierte orientación.

Teorema: Para todo valor regular $y \in N$ se tiene que

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \sigma(d_x f) \in \mathbb{Z}$$

Dem: Sea $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$. Dado que f es un difeo. local en torno a cada x_i, existen abiertos conexos $y \in V \subseteq N$, $x_i \in \mathcal{U}_i \subseteq M$ tales que $f|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} V$ es un difeomorfismo. Sea $\omega \in \Omega_c^n(V)$, entonces:

$$\int_M f^* \omega = \sum_{i=1}^r \int_{\mathcal{U}_i} (f|_{\mathcal{U}_i})^* \omega = \sum_{i=1}^r \sigma(d_{x_i} f) \int_V \omega \quad , \text{ie}, \ \deg(f) = \sum_{i=1}^r \sigma(d_{x_i} f) \ \checkmark \ \blacksquare$$

$\boxed{\text{Ejercicio útil}}$ Probar que si $f : M \to N$ <u>no</u> es sobreyectiva entonces $\deg(f) = 0$.

⚠ La forma más típica de usar lo anterior es de la forma

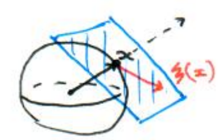
"$\deg(f) \neq 0$ entonces f es sobreyectiva"

El grado topológico de Leray-Schauder extiende esta observación a dimensión infinita, y es una herramienta muy útil para probar existencia de soluciones de EDP.

Ejemplo: Sea $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomio no-constante. Entonces, las ecuaciones de Cauchy Riemann implican que P conserva la orientación de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. En particular, $\deg(P) > 0$ y luego P es <u>sobreyectivo</u> (¡Teorema Fundamental del Álgebra!).

Teorema de la Bola Peluda: Si n es par, entonces todo campo vectorial $\xi \in \mathfrak{X}(S^n)$ en la esfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ posee un cero.

Dem: Sea $\xi : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ campo de vectores, ie, $\xi(x) \perp x$.



Si $\xi(x) \neq 0 \ \forall x \in S^n$, podemos asumir $\|\xi(x)\| \equiv 1 \ \forall x \in S^n$.

Definamos $f_t : S^n \to S^n$, $x \mapsto \cos(\pi t) x + \sin(\pi t) \xi(x)$.

$\Rightarrow f_0 = \text{Id}$ y $f_1 = -\text{Id}$. Luego $\text{Id} \sim -\text{Id}$ y en particular se tiene que:

$1 = \deg(\text{Id}_{S^n}) = \deg(-\text{Id}_{S^n}) = (-1)^{n+1}$ y luego n debe ser <u>impar</u>. $\blacksquare$

Comentario final: Algunas recomendaciones para continuar aprendiendo son

1. "Riemannian Geometry" por Gallot, Hulin, Lafontaine.
2. "Differential Forms in Algebraic Topology" por Bott y Tu.
3. "Introduction to Lie Groups and Lie Algebras" por Kirillov.
4. "Differential Analysis on Complex Manifolds" por Wells.