Preliminares de Topología y Análisis

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Estas notas son material complementario al curso de Topología para estudiantes de Matemáticas, y tienen como objetivo recordar y recopilar resultados vistos en el curso de Análisis I (o fácilmente deducibles de lo allí aprendido) que serán usados directamente en el curso.

Valparaíso, Marzo 2024

Índice

1. Definiciones generales

Un **espacio topológico** es un conjunto X dotado de un conjunto τ de subconjuntos de X (i.e., $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$ o símplemente *una familia* de subconjuntos de X) tal que:

1. Toda intersección finita de elementos de τ pertenece a τ.
2. Toda unión de elementos de τ pertenece a τ.

Por abuso de notación, usualmente nos referimos al espacio topológico X en lugar de (X, τ).

Atención. Por convención, una *intersección vacía* de subconjuntos de un conjunto A es igual al conjunto A y una *unión vacía* de subconjuntos de A es igual al conjunto vacío $\emptyset$. En particular, los axiomas (1) y (2) implican que $X \in \tau$ y $\emptyset \in \tau$.

Definición 1.1 (abiertos y cerrados)**.** Sea (X, τ) un espacio topológico. Los elementos $U \in \tau$ son llamados **abiertos** y decimos que τ es una **topología** sobre el conjunto X. Los complementos $F = X \setminus U$ de abiertos $U \in \tau$ son llamados **cerrados**.

Observación 1.2. *Sea A un conjunto dado. Dada una familia de subconjuntos de A que sea estable por intersecciones y por uniones finitas, se tiene que el conjunto formado por los complementos de dicha familia definen una topología sobre A. En otras palabras,* una topología se puede definir declarando qué subconjuntos son abiertos o qué subconjuntos son cerrados*.*

Definición 1.3 (homeomorfismo)**.** Una biyección $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos es un **homeomorfismo** si la preimagen por f de la topología de Y es precisamente la topología de X. Decimos que dos espacios topológicos X e Y son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre desde X a Y.

Observación 1.4. *La relación "ser homeomorfo a" es una relación de equivalencia para todo conjunto de espacios topológicos. Decimos que una propiedad $\mathscr{P}$ sobre espacios topológicos es* **invariante por homeomorfismos** *si todo espacio topológico homeomorfo a un espacio topológico verificando la propiedad $\mathscr{P}$ también verifica la propiedad $\mathscr{P}$.*

Veamos algunos ejemplos concretos de espacios topológicos.

Ejemplo 1.5. Sea X un conjunto. Entonces,

1. $\tau = \{\emptyset, X\}$ es llamada la **topología gruesa** en X. Decimos que (X, τ) es *grueso.*

2. $\tau = \mathscr{P}(X)$ es llamada la **topología discreta** en X. Decimos que (X, τ) es *discreto.*

Las propiedades "ser grueso" y "ser discreto" son invariantes por homeomorfismos.

Ejemplo 1.6. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $B(x, r) = \{y \in X,\ d(x, y) < r\}$ la bola abierta de centro $x \in X$ y radio $r > 0$. Entonces, la familia de conjuntos $U \subseteq X$ tales que

$$\text{Para todo } x \in U \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B(x, r) \subseteq U$$

definen una topología en X, llamada la **topología inducida por la distancia**. Salvo mención explícita de lo contrario, todo espacio métrico estará siempre dotado de la topología inducida por su distancia.

Ejemplo 1.7. Sea k un cuerpo y sea $\mathbb{A}^n(k) := k^n$. Un **cerrado de Zariski** de $\mathbb{A}^n(k)$ es un subconjunto de la forma

$$F = \{x \in \mathbb{A}^n(k),\ P_i(x) = 0 \text{ para todo } i \in I\},$$

donde $\{P_i\}_{i \in I} \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ es una familia de polinomios en n variables con coeficientes en k. Aquí:

1. El conjunto vacío es un cerrado de Zariski, pues es el lugar de ceros del polinomio constante 1.

2. Si F y F' son cerrados de Zariski dados por familias de polinomios $\{P_i\}_{i \in I}$ y $\{Q_j\}_{j \in J}$ respectivamente, entonces $F \cup F'$ es el conjunto de ceros comunes de la familia de polinomios $\{P_i Q_j\}_{(i,j) \in I \times J}$.

3. Si $\{F_j\}_{j \in J}$ son cerrados de Zariski dados por los ceros de la familia de polinomios $\{P_{i,j}\}_{i \in I_j}$, entonces $\cap_{j \in J} F_j$ es el conjunto de ceros comunes de todos los $P_{i,j}$ para $j \in J$ y para $i \in I_j$.

Así, los (complementos de los) cerrados de Zariski definen una topología en $\mathbb{A}^n(k)$, llamada la **topología de Zariski**.

Proposición 1.8 (topología generada, prebase)**.** *Sea X un conjunto. Para todo subconjunto $S \subseteq \mathscr{P}(X)$ existe una única topología minimal τ_S (respecto a la inclusión) conteniendo S. Más precisamente, τ_S es el conjunto de las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de S, que a su vez es la intersección de todas las topologías de X conteniendo S. Diremos que τ_S es la* **topología generada** *por S y que S es una* **prebase** *de τ_S.*

Demostración. Por definición, toda topología conteniendo a S contiene a τ_S. Por otro lado, basta notar que la propiedad de distributividad

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I,\ j \in J} (A_i \cap B_j)$$

implica que τ_S es en efecto una topología. □

Definición 1.9 (base)**.** Una **base** de abiertos para un espacio topológico (X, τ) es un subconjunto $\mathscr{B} \subseteq \tau$ tal que todo abierto de X es unión de elementos de $\mathscr{B}$.

Ejemplo 1.10. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces los conjuntos

$$\left\{B\left(x, \tfrac{1}{n+1}\right),\ x \in X \text{ y } n \in \mathbb{N}\right\}$$

forman una base para la topología inducida por la distancia.

Proposición 1.11 (criterio para que una prebase sea una base)**.** *Sea X un conjunto. Sea $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ tal que $\bigcup_{U \in \mathscr{B}} U = X$ y tal que*

$$\text{Para todos } U, V \in \mathscr{B} \text{ y para todo } x \in U \cap V, \text{ existe } W \in \mathscr{B} \text{ tal que } x \in W \subseteq U \cap V. \qquad (\star)$$

Entonces, el conjunto τ de uniones de elementos en $\mathscr{B}$ es la topología generada por $\mathscr{B}$. En particular, $\mathscr{B}$ es una base de abiertos para su topología generada.

Demostración. Basta probar que τ es una topología. Dado que $X \in \tau$ y dada la fórmula de distributividad en la demostración de la Proposición 1.8, basta probar que la intersección de dos elementos de $\mathscr{B}$ es también un elemento de $\mathscr{B}$. Esto último se deduce de la condición $(\star)$. $\square$

Ejemplo 1.12. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo y si $\mathscr{B}$ es una prebase (resp. base) de abiertos de X, entonces $f(\mathscr{B})$ es una prebase (resp. base) de abiertos en Y.

Ejemplo 1.13. Sean $+\infty$ y $-\infty$ dos conjuntos diferentes y disjuntos de $\mathbb{R}$. La familia de subconjuntos de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ que son de la forma

$$\left]-x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[, \text{ o bien } \{-\infty\} \cup]-\infty, -n[, \text{ o bien }]n, +\infty[\cup \{+\infty\},$$

donde $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, forman una base de abiertos para una topología de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dicho espacio topológico, llamado la **recta real extendida**, será denotado $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 1.14 (vecindad)**.** Sea X un espacio topológico. Una **vecindad** de un subconjunto $A \subseteq X$ es un conjunto $V \subseteq X$ tal que V contiene un abierto U que a su vez contiene a A, i.e., $A \subseteq U \subseteq V$. Por definición, una vecindad de un punto $x \in X$ es una vecindad del singleton $\{x\}$.

Observación 1.15. *Un subconjunto $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si es vecindad de cada uno de sus puntos, pues en tal caso es igual a la unión de los abiertos que contiene.*

Notación 1.16. Sea $x \in X$ un punto en un espacio topológico. Entonces, denotamos por $\mathscr{V}(x)$ es el conjunto de vecindades de x. En particular,

1. Todo subconjunto de X conteniendo un elemento de $\mathscr{V}(x)$ pertenece a $\mathscr{V}(x)$.
2. Toda intersección finita de elementos de $\mathscr{V}(x)$ pertenece a $\mathscr{V}(x)$.

Definición 1.17 (sistema fundamental de vecindades)**.** Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Un **sistema fundamental de vecindades** es un subconjunto $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{V}(x)$ tal que toda vecindad de x contiene un elemento de $\mathscr{P}$.

Ejemplo 1.18. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, para toda sucesión de números reales estríctamente positivos $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $r_n \to 0$ cuando $n \to +\infty$, se tiene que $\{B(x, r_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema fundamental de vecindades de $x \in X$.

Ejemplo 1.19. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo y $x \in X$, entonces $f(\mathscr{V}(x)) = \mathscr{V}(f(x))$. Además, la imagen de un sistema fundamental de vecindades de $x \in X$ es un sistema fundamental de vecindades de $f(x) \in Y$.

Recordemos algunas de las operaciones básicas para subconjuntos de un espacio topológico.

Recuerdo 1.20. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ un subconjunto. Entonces,

- El **interior** de A es el conjunto $\operatorname{int}(A)$ de puntos de A tal que A es una vecindad.
- La **adherencia** de A es el conjunto $\overline{A}$ de puntos de X tal que toda vecindad intersecta A de manera no-vacía.
- La **frontera** de A es el conjunto ∂A de puntos en la adherencia de A y en la adherencia de $X \setminus A$.

Además, decimos que un subconjunto de A es **denso** (resp. **denso en ninguna parte**) si $\overline{A} = X$ (resp. $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$). Notar además que si $A, B \subseteq X$ son subconjuntos arbitrarios entonces:

1. A es abierto si y sólo si $A = \operatorname{int}(A)$.
2. A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.
3. $\operatorname{int}(\overline{A \cap B}) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(\overline{A \cup B})$ y $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

5. $X \setminus \operatorname{int}(A) = \overline{X \setminus A}$ y $X \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(\overline{X \setminus A})$.

6. El interior de A es la unión de los abiertos contenidos en A, i.e., es el abierto más grande contenido en A.

7. La adherencia de A es la intersección de los cerrados conteniendo a A, i.e., es el cerrado más pequeño que contiene a A.

8. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo $f(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(\overline{f(A)})$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ y $f(\partial A) = \partial(f(A))$.

Definición 1.21. Un espacio topológico X es **Hausdorff** (o **separado**) si todo par de puntos distintos de X admiten vecindades disjuntas. En particular, "ser Hausdorff" es invariante por homeomorfismos.

Ejemplo 1.22. Sea X un espacio topológico. Entonces,

1. Si X es de Hausdorff, entonces los singletons $\{x\}$ son cerrados.

2. Si X es discreto, entonces X es de Hausdorff.

3. Si X es grueso, entonces X es de Hausdorff si y sólo si X contiene a lo más un punto.

Definición 1.23. Un espacio topológico es **metrizable** si su topología está inducida por una distancia. En particular, "ser metrizable" es invariante por homeomorfismos.

Proposición 1.24. *Todo espacio topológico metrizable es de Hausdorff.*

Demostración. Sea d una distancia sobre un conjunto X, y sea $x, y \in X$ dos puntos. Si $x \neq y$ entonces $r = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$. Por otra parte, si $B(x, r) \cap B(y, r)$ fuese no vacío y z fuera un punto en dicha intersección, entonces $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, y)$ lo cual es imposible. $\square$

Ejercicio 1.25 (intervalo con dos orígenes)**.** Sean 0_- y 0_+ dos conjuntos diferentes y disjuntos de $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Denotamos por X al conjunto $\{0_+\} \cup \{0_-\} \cup]0, 1]$, y para $x \neq 0_\pm$ sea

$$\mathscr{B}(x) = \left\{ \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\cap]0, 1],\ n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \right\},$$

y sea $\mathscr{B}(0_\pm) = \left\{ \{0_\pm\} \cup \left]0, \frac{1}{n}\right[,\ n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \right\}$. Probar que $\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ es una base de abiertos para una topología de X y que ella **no** es Hausdorff.

Definición 1.26 (continuidad)**.** Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos. Si $x_0 \in X$, decimos que f es **continua en** x_0 si para toda vecindad V de $f(x_0)$ en Y, existe una vecindad U de x_0 en X tal que $f(U) \subseteq V$.

Observación 1.27. *Sea $\mathscr{U}$ un sistema fundamental de vecindades de x_0 y $\mathscr{V}$ un sistema fundamental de vecindades de $f(x_0)$. Entonces, f es continua en x_0 si y sólo si para todo $V \in \mathscr{V}$ existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $f(U) \subseteq V$.*

Ejemplo 1.28. Si la topología de X está inducida por una distancia d y la topología de Y está inducida por una distancia d', entonces $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si

$$\text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que si } d(x, x_0) < \delta \text{ entonces } d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Definición 1.29 (función continua)**.** Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

1. Para todo abierto $V \subseteq Y$, la preimagen $f^{-1}(V)$ es un abierto de X.

2. Para todo cerrado $F \subseteq Y$, la preimagen $f^{-1}(F)$ es un cerrado de X.

3. Para todo $x \in X$, f es continua en x.

4. Para todo $A \subseteq X$, se tiene que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Así, decimos que f es **continua** si verifica cualquiera de las condiciones anteriores.

Ejemplo 1.30. Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos. Entonces:

1. Si X es discreto, entonces f es continua.
2. Si Y es grueso, entonces f es continua.
3. Si f es continua y $g : Y \to Z$ es una función continua, entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua.
4. Si f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo si y sólo si f y f^{-1} son continuas.

Definición 1.31 (función abierta y cerrada)**.** Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos. Decimos que f es una función **abierta** (resp. **cerrada**) si la imagen por f de todo abierto (resp. cerrado) de X es un abierto (resp. cerrado) de Y.

Muchas de las nociones centrales en Topología Algebraica buscan extender el concepto de conexidad.

Definición 1.32 (espacio conexo, localmente conexo)**.** Un espacio topológico X es **conexo** si verifica alguna de las siguientes propiedades equivalentes:

1. Los únicos conjuntos abiertos y cerrados de X son $\emptyset$, X.
2. No existe una partición de X en dos abiertos no-vacíos.
3. No existe una partición de X en dos cerrados no-vacíos.
4. Toda función continua de X con valores en un espacio discreto es constante.
5. Toda función continua de X con valores en el espacio discreto $\{0, 1\}$ es constante.

Una **componente conexa** de un espacio topológico X es un sub-espacio topológico (ver Recuerdo 2.8) conexo maximal de X respecto a la inclusión. Un espacio topológico es **localmente conexo** si todo punto de X posee un sistema fundamental de vecindades conexas.

Ejemplo 1.33.

1. Los conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ son conexos.
2. La imagen de un espacio conexo por una función continua es conexo.
3. Para todo subconjunto conexo $C \subseteq X$, si $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$, entonces A es conexo.
4. Si A es conjunto conexo no-vacío de un espacio topológico X, entonces la unión de todos los sub-espacios conexos de X conteniendo a A es la componente conexa de X conteniendo a A.
5. Una componente conexa es cerrada, y dos componentes conexas son disjuntas.
6. En un espacio topológico localmente conexo, las componentes conexas son abiertas y cerradas.

Definición 1.34 (espacio conexo por arcos, localmente conexo por arcos)**.** Un espacio topológico es **conexo por arcos** si para todos $x, y \in X$ existe una función continua $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Una **componente conexa por arcos** de un espacio topológico X es un subespacio conexo por arcos maximal de X, respecto a la inclusión. Un espacio topológico X es **localmente conexo por arcos** si todo punto de X posee un sistema fundamental de vecindades conexas por arcos.

Ejemplo 1.35.

1. Los conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ son conexos por arcos.
2. Un espacio conexo por arcos es conexo.
3. La imagen de un espacio conexo por arcos por una función continua es conexo por arcos.
4. Si un espacio topológico X es unión de una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subespacios conexos por arcos tal que la intersección $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ es no-vacía, entonces X es conexo por arcos.
5. Un espacio conexo y localmente conexo por arcos es conexo por arcos.
6. En un espacio localmente conexo por arcos, las componentes conexas y las componentes conexas por arcos coinciden.
7. La adherencia en $\mathbb{R}^2$ del gráfico de la función $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ es conexo, pero no es conexo por arcos ni localmente conexo.

2. Construcción de topologías

Sea X un conjunto, y sean τ_1 y τ_2 dos topologías en X. Decimos que:

1. Decimos que τ_1 es **menos fina** que τ_2 si $\tau_1 \subseteq \tau_2$, es decir, todo abierto respecto a τ_1 también es abierto respecto a τ_2.

2. Decimos que τ_1 es **más fina** que τ_2 si $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

La topología gruesa (resp. discreta) es la topología menos fina (resp. más fina) posible en X.

Ejemplo 2.1. La topología usual de $\mathbb{R}^n$ (es decir, aquella inducida por la distancia euclideana) es más fina que la topología de Zariski en $\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$. En efecto, un cerrado de Zariski en $\mathbb{R}^n$ es la intersección de conjuntos de ceros de una familia de funciones polinomiales, que en particular son continuas.

Ejercicio 2.2. Sea X un conjunto, y sean τ_1 y τ_2 dos topologías en X. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. τ_1 es más fina que τ_2.

2. Todo cerrado respecto a τ_2 es cerrado respecto a τ_1.

3. La función identidad $\mathrm{Id} : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua.

4. Para todo $x \in X$, toda vecindad de x respecto a τ_2 es una vecindad de x respecto a τ_1.

Definición 2.3 (topología inicial)**.** Sea X un conjunto y sea $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Dada una familia de funciones $\{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$, se define la **topología inicial** en X respecto a $\{f_i\}_{i\in I}$ como la topología generada por los conjuntos

$$\{f_i^{-1}(U_i),\ i \in I,\ U_i \subseteq Y \text{ abierto}\}.$$

Es decir, es la topología *menos fina* en X que hace que las funciones f_i sean continuas para todo $i \in I$.

Observación 2.4. *Con la notación anterior, si Z es un espacio topológico y si $g : Z \to X$ es una función, entonces g es continua si y sólamente si cada $f_i \circ g$ es continua. Además, si $\mathscr{B}_i$ es una base de abiertos de Y_i para todo $i \in I$, entonces todas las posibles intersecciones finitas de elementos de $\{f_i^{-1}(U_i),\ i \in I,\ U_i \in \mathscr{B}_i\}$ es una base de abiertos de X respecto a la topología inicial. Más aún, si $x \in X$ y $\mathscr{V}_i$ es un sistema fundamental de vecindades de $f_i(x)$ en Y_i para todo $i \in I$, entonces todas las posibles intersecciones finitas de elemenos de $\{f_i^{-1}(V_i),\ i \in I,\ V_i \in \mathscr{V}_i\}$ es un sistema fundamental de vecindades de x en X.*

Ejemplo 2.5 (topología débil)**.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial real normado. La topología en E inducida por la distancia $d(x, y) := \|x - y\|$ es llamada la **topología fuerte** de E. Además, una función continua desde E, dotado de la topología fuerte, a otro espacio topológico es llamada **fuertemente continua**. Por otra parte, si consideramos el **dual topológico**

$$E^* := \{\ell : E \to \mathbb{R} \text{ lineal y fuertemente continua}\},$$

entonces las topología inicial en E definida por la familia $\{\ell\}_{\ell\in E^*}$ es llamada la **topología débil** de E. Así, la topología débil es la topología menos fina en E de tal suerte que sean continuos todos los funcionales lineales fuertemente continuos $\ell : E \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.6. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial real normado. Probar que:

1. Si $x_0 \in E$, entonces los conjuntos de la forma

$$V_{\varepsilon,\ell_1,\ldots,\ell_n}(x_0) := \{x \in E,\ |\ell_i(x) - \ell_i(x_0)| < \varepsilon\}$$

   forman un sistema fundamental de vecindades de x_0 en E respecto a la topología débil, donde $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $\ell_1, \ldots, \ell_n \in E^*$.

2. Los abiertos en la topología débil de E son todas las posibles uniones de intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\ell^{-1}(I)$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y donde $\ell \in E^*$.

3. La topología fuerte de E es más fina que la topología débil.

4. Si E es de dimensión finita, entonces la topología fuerta y la topología débil coinciden.

Ejercicio 2.7. Considere el espacio de Hilbert de sucesiones reales cuadrado sumables

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \|x\|_2 := \left(\sum_{n\geq 0} x_n^2\right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

dotado del producto escalar $\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_n y_n$. Probar que la topología fuerte es estríctamente más fina que la topología débil.

Recordemos que todo subconjunto de un espacio topológico es un espacio topológico también al declarar que los abiertos son la intersección de abiertos del ambiente con el subconjunto en cuestión:

Recuerdo 2.8. Sea X un espacio topológico, A un subconjunto arbitrario y $\iota : A \to X$ la inclusión. La topología inicial en A respecto a ι se llama la **topología inducida** (o **topología traza**) sobre A, y decimos que el conjunto A dotado de esta topología es un **sub-espacio topológico** (o símplemente un sub-espacio) de X. A menos que se explicite lo contrario, todo subconjunto de un espacio topológico estará siempre dotado de su topología inducida.

Ejercicio 2.9. Sea X un espacio topológico, A un subconjunto arbitrario y $\iota : A \to X$ la inclusión. Probar que al dotar a A con la topología inducida (i.e., la inclusión ι es continua, y la topología inducida sobre A es la topología menos fina que hace continua a ι) se tiene que:

1. Un subconjunto $U \subseteq A$ es abierto en A si y sólo si existe un abierto U' de X tal que $U = U' \cap A$. Decimos que U es la **traza** de U' en A.

2. Un subconjunto $F \subseteq A$ es cerrado en A si y sólo si existe un cerrado F' de X tal que $F = F' \cap A$.

3. Las vecindades de un punto $x \in A$ son las trazas en A de vecindades de x en X.

4. Todo abierto de A es un abierto de X si y sólo si A es abierto en X.

5. Todo cerrado de A es un cerrado de X si y sólo si A es cerrado en X.

6. Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces la adherencia de A en B es la traza en B de la adherencia de A en X.

7. Probar que todo sub-espacio de un espacio topológico de Hausdorff es de Hausdorff también.

Ejercicio 2.10. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Decimos que $x \in A$ es un **punto aislado** de A si existe una vecindad V de x en X tal que $V \cap A = \{x\}$. Probar que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. El sub-espacio A es discreto.

2. Todo punto de A es aislado.

Ejercicio 2.11. Sea X un espacio topológico y sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Suponga que al menos una de las condiciones siguientes se cumple:

(a) $\{\mathrm{int}(A_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento (ver Recuerdo 5.1) de X.

(b) $\{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento cerrado de X **localmente finito** (es decir, para todo $x \in X$ existe una vecindad V de x tal que $\{i \in I,\ V \cap A_i \neq \emptyset\}$ es un conjunto finito).

Probar que un subconjunto $B \subseteq A$ es cerrado (resp. abierto) si y sólo si $A_i \cap B$ es cerrado (resp. abierto) en A_i para todo $i \in I$.

Recordemos que el producto cartesiano de espacios topológicos también es naturalmente un espacio topológico.

Recuerdo 2.12. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y consideremos el producto

$$X = \prod_{i\in I} X_i := \{(x_i)_{i\in I} \in (\cup_{i\in I} X_i)^I\ ,\ x_i \in X_i \text{ para todo } i \in I\},$$

dotado de sus proyecciones canónicas $\mathrm{pr}_i : X \to X_i,\ x = (x_i)_{i\in I} \mapsto x_i$. Entonces, la topología inicial en X definida por las $(\mathrm{pr}_i)_{i\in I}$ se llama la **topología producto** sobre X. A menos que se explicite lo contrario, el producto de una familia de espacios topológicos será dotado de la topología producto.

Notación 2.13. Con la notación anterior, decimos que un **abierto elemental** de X es un subconjunto de la forma

$$V_{J,(U_j)_{j\in J}} := \{(x_i)_{i\in I} \in X,\ x_j \in U_j \text{ para todo } j \in J\} = \bigcap_{j\in J} \mathrm{pr}_j^{-1}(U_j),$$

donde J es un subconjunto **finito** de I y donde $U_j \subseteq X_j$ es un abierto para todo $j \in J$. Por ejemplo, si $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ es un producto *finito*, entonces un abierto elemental de X es un subconjunto de la forma $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ donde U_i es un abierto de X_i.

Ejercicio 2.14. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$ con la topología producto. Probar que:

1. Los abiertos elementales de X forman una base de la topología producto de X.

2. Si $a = (a_i)_{i\in I} \in X$ y si $\mathscr{V}_i$ es un sistema fundamental de vecindades de a_i en X_i para todo $i \in I$, entonces todos los subconjuntos de X de la forma

$$\{(x_i)_{i\in I} \in I,\ x_j \in V_j \text{ para todo } j \in J\} = \bigcap_{j\in J} \mathrm{pr}_j^{-1}(V_j),$$

donde J es un subconjunto finito de I y donde $V_j \in \mathscr{V}_j$ para todo $j \in J$, es un sistema fundamental de vecindades de a en X respecto a la topología producto.

3. Sea Y un espacio topológico y sea $f : Y \to X$ una función. Denotemos por $f_i := \mathrm{pr}_i \circ f$ la i-ésima componente de f, de tal suerte que $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$. Probar que f es continua si y sólo si $f_i : Y \to X$ es continua para todo $i \in I$.

4. Sea $I = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$ una partición del conjunto I y suponga que $Y_\alpha = \prod_{i\in I_\alpha} X_i$. Probar que la topología producto es asociativa, es decir, que la función canónica

$$\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i,\ (y_\alpha)_{\alpha\in A} \longmapsto (x_i)_{i\in I} \text{ si } y_\alpha = (x_i)_{i\in I_\alpha}$$

es un homeomorfismo.

5. Probar la conmutatividad de la topología producto, es decir, si $\sigma : I \to I$ es una función biyectiva entonces la función

$$\prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_{\sigma(i)},\ (x_i)_{i\in I} \longmapsto (x_{\sigma(i)})_{i\in I}$$

es un homeomorfismo.

6. Suponga que A_i es un subconjunto de X_i para todo $i \in I$. Probar que $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

7. Suponga que A_i es un subconjunto de X_i para todo $i \in I$. Probar que $\prod_{i\in I} A_i$ es cerrado en X si y sólo si A_i es cerrado en X_i para todo $i \in I$.

8. Probar que $[0,1[^{\mathbb{N}}$ **no** es abierto en $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (es decir, el Ejercicio (7) es **falso** si cambiamos la palabra *cerrado* por *abierto*).

Observación 2.15. *El Ejercicio anterior implica que si X, Y, Z son espacios topológicos entonces*

$$(X \times Y) \times Z \to X \times (Y \times Z),\ ((x,y),z) \mapsto (x,(y,z)), \text{ y } X \times Y \to Y \times X,\ (x,y) \mapsto (y,x)$$

son homeomorfismos.

Proposición 2.16. *El producto de espacios topológicos de Hausdorff es de Hausdorff. Si un producto de espacios topológicos no-vacíos es de Hausdorff, entonces cada uno de sus factores es de Hausdorff.*

Demostración. Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ un espacio topológico producto. Si $x = (x_i)_{i \in I} \neq y = (y_i)_{i \in I}$ entonces existe $j \in I$ tal que $x_j \neq y_j$. Si cada X_i es Hausdorff, entonces existen abiertos disjuntos $U, V \subseteq X_j$ tales que $x_j \in U$ y $y_j \in V$. Luego, los $\mathrm{pr}_j^{-1}(U)$ y $\mathrm{pr}_j^{-1}(V)$ son abiertos (elementales) disjuntos de X que contienen a x e y, respectivamente. Así, X es un espacio de Hausdorff.
Recíprocamente, si X es de Hausdorff y cada X_i es no-vacío, entonces podemos elegir $a_i \in X_i$ para cada $i \in I$. Sea $j \in I$ fijo y consideremos la función $\varphi : X_j \to X,\ x \mapsto (x_i)_{i \in I}$ donde $x_j = x$ y donde $x_i = a_i$ para todo $i \neq j$. Notar que φ es un homeomorfismo sobre su imagen, pues φ es inyectiva y continua pues $\mathrm{pr}_i \circ \varphi$ es continua para todo $i \in I$, y su inversa es la restricción a $\mathrm{Im}(\varphi)$ de la j-ésima proyección (ya cual es continua). Concluímos así que X_j es Hausdorff pues es homeomorfo a un sub-espacio de un espacio topológico de Hausdorff. $\square$

Ejercicio 2.17 (conjunto de Cantor)**.** Definimos por inducción una sucesión C_n de subconjuntos cerrados de $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ al declarar $C_0 := [0,1]$ y, suponiendo que C_n es la unión disjunta de 2^n intervalos de largo $\frac{1}{3^n}$, construímos C_{n+1} dividiendo cada componente conexa de C_n en tres intervalos de la misma longitud y removiendo el interior del intervalo del medio. Se define el **conjunto 3-ádico de Cantor**[1] como

$$C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Si dotamos al conjunto $\{0,1\}$ de la topología discreta y a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la topología producto, probar que

$$\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow C,\ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \longmapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2x_i}{3^{i+1}}$$

es un homeomorfismo.

Ejercicio 2.18. Probar que el producto de una familia arbitraria de espacios topológicos conexos (resp. conexos y localmente conexos, resp. conexos por arcos, resp. conexos y localmente conexos por arcos) es conexo (resp. conexo y localmente conexo, resp. conexo por arcos, resp. conexo y localmente conexo por arcos). Probar que el producto *finito* de espacios topológicos localmente conexos (resp. localmente conexo por arcos) es localmente conexo (resp. localmente conexo por arcos).

Definición 2.19 (topología final)**.** Sea X un conjunto y sea $\{Y_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Dada una familia de funciones $\{f_i : Y_i \to X\}_{i \in I}$, se define la **topología final** en X respecto a $\{f_i\}_{i \in I}$ como la topología donde los abiertos $U \subseteq X$ son los conjuntos tales que

$$f_i^{-1}(U) \text{ es un abierto de } Y_i \text{ para todo } i \in I.$$

Es decir, es la topología *más fina* en X que hace que las funciones f_i sean continuas para todo $i \in I$.

Observación 2.20. *Con la notación anterior, si Z es un espacio topológico y $g : X \to Z$ es una función, entonces g es continua si y sólo si cada $g \circ f_i$ es continua.*

Ejemplo 2.21 (topología unión disjunta o coproducto)**.** Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. Recordemos que un conjunto X dotado de funciones $f_i : X_i \to X$ es un **coproducto** o **unión disjunta** de los X_i si

> Para todo conjunto Y dotado de funciones $g_i : X_i \to Y$, existe una única función $\varphi : X \to Y$ tal que $g_i = \varphi \circ f_i$. Es decir, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & X \arrow[d, "\exists!\, \varphi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

[1] La terminología hace alusión al cuerpo de números 3-ádicos $\mathbb{Q}_3$.

Por ejemplo, el conjunto $\{(x,i) \in (\cup_{i\in I} X_i) \times I,\ x \in X_i\}$ dotado de las funciones $f_i : X_i \to X,\ f_i(x) = (x,i)$ es una unión disjunta. Más aún, la unión disjunta es única salvo por biyecciones que hagan conmutar los diagramas anteriores. Típicamente, identificamos cada $x \in X_i$ con su imagen por f_i y denotamos $X = \coprod_{i\in I} X_i$ a la unión disjunta dotada de las inclusiones $X_i \hookrightarrow X$. Con esta notación, la topología final en X definida por las $\{f_i\}_{i\in I}$ se llama la **topología unión disjunta**, y toda unión disjunta de espacios topológicos será dotada de dicha topología salvo que se explicite lo contrario.

Ejemplo 2.22 (topología coherente)**.** Sea X un conjunto y sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X. Supongamos que cada X_i está dotado de una topologia y sea $f_i : X_i \hookrightarrow X$ la inclusión de cada subconjunto. La topología final en X definida por las inclusiones $\{f_i\}_{i\in I}$ se llama la **topología coherente** definida por $\{X_i\}_{i\in I}$. En particular, se tiene que:

1. Un subconjunto $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $F \cap X_i$ es cerrado en X_i para todo $i \in I$.
2. Un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si $U \cap X_i$ es abierto en X_i para todo $i \in I$.
3. Para todo espacio topológico Y y toda función $f : X \to Y$, se tiene que f es continua si y sólo si cada restricción $f|_{X_i} : X_i \to Y$ es continua para todo $i \in I$.

Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^2$ y $\{X_i\}_{i\in I}$ es la familia de rectas vectoriales (es decir, aquellas que pasan por el origen $0 \in \mathbb{R}^2$) dotadas de su topología usual, entonces la topología coherente definida por $\{X_i\}_{i\in I}$ es más fina que la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Atención. Esta topología solía ser llamada topología débil. Sin embargo, resulta que la topología coherente es más fina que la topología original del espacio X, mientras que la topología débil de un espacio vectorial topológico es menos fina que la topología original. La topología débil es una topología inicial, mientras que la topología coherente es final. Por lo tanto, es preferible modernizar el vocabulario. Recordaremos que la letra W en la palabra CW-complejo significa débil, en referencia a esta topología.

Ejercicio 2.23. Sea X un espacio topológico. Probar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. X es discreto.
2. La topología de X es la topología coherente definida por la familia de singletons[2] en X.
3. La biyección canónica $\coprod_{x\in X}\{x\} \to X$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 2.24. Sea X un conjunto, dotado de la topología coherente definida por una familia de subconjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$ de X, cada uno de ellos dotados de una topología. Demostrar que si para todos $i, j \in I$ las topologías inducidas en $X_i \cap X_j$ por las topologías de X_i y de X_j coinciden, y si $X_i \cap X_j$ es cerrado en X_i y en X_j, entonces se tiene que

1. La topología de X_i coincide con la topología inducida en X_i por la topología de X.
2. Cada X_i es cerrado en X.

Uno de los usos más importantes del concepto de topología final es definir la topología cociente.

Recuerdo 2.25. Sea X un conjunto y sea $\mathscr{R} \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia en X. Denotemos por $Y = X/\mathscr{R}$ al conjunto cociente, cuyos elementos son las clases de equivalencia de $\mathscr{R}$, y sea

$$\pi : X \to X/\mathscr{R} = Y,\ x \mapsto [x]$$

la proyección canónica, que asocia a cada $x \in X$ su clase de equivalencia $[x] \in Y$. Recordemos que los cocientes poseen la siguiente *propiedad universal*:

> Para todo conjunto Z y para toda función $f : X \to Z$ que sea *constante* en cada clase de equivalencia de $\mathscr{R}$, existe una única función $F : X/\mathscr{R} \to Z$ tal que $f = F \circ \pi$. Es decir, el diagrama siguiente es conmutativo
>
> $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ X/\mathscr{R} \arrow[ur, "\exists!\, F"'] & \end{tikzcd}$$

[2] Notar que un singleton posee una y sólo una topología posible.

Ejemplo 2.26 (topología cociente)**.** Sea X un conjunto y sea $\mathscr{R} \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia en X. Sea $Y = X/\mathscr{R}$ el conjunto cociente y $\pi : X \to Y$ la proyección canónica. Si X es un espacio topológico, entonces la topología final en Y respecto a π es llamada la **topología cociente**. Así, la proyección canónica π es continua y la topología cociente en Y es la topología más fina en Y tal que π es continua. A menos se explicite lo contrario, todo conjunto cociente de un espacio topológico será dotado de esta topología.

Ejercicio 2.27. Con la notación anterior, probar que:

1. Un subconjunto $U \subseteq Y$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X.
2. Un subconjunto $F \subseteq Y$ es cerrado si y sólo si $\pi^{-1}(F)$ es cerrado en X.
3. Para todo espacio topológico Z y toda función $f : Y \to Z$, se tiene que f es continua si y sólo si $f \circ \pi : X \to Z$ es continua.

Definición 2.28 (saturación)**.** Sea X un conjunto y sea $\mathscr{R} \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia en X. Dado un subconjunto $A \subseteq X$, la **saturación** de A por $\mathscr{R}$ es el conjunto

$$\mathscr{R}A := \bigcup_{a \in A} [a] = \pi^{-1}(\pi(A)).$$

Además, decimos que A es un **subconjunto saturado** si $A = \mathscr{R}A$.

Observación 2.29. *Por definición, la preimagen por la proyección canónica $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ determina una biyección entre los subconjuntos de $X/\mathscr{R}$ y los subconjuntos saturados de X, y además se preservan las operaciones típicas de la teoría de conjuntos. Más aún, si A es un abierto (resp. cerrado) saturado en X, $\pi(A) \subseteq X/\mathscr{R}$ es abierto (resp. cerrado). En general, la hipótesis "saturado" no puede omitirse.*

Proposición 2.30. *El espacio topológico cociente $Y = X/\mathscr{R}$ es de Hausdorff si y sólo si para todos $x, y \in X$ tales que $[x] \neq [y]$ existen abiertos* saturados *disjuntos $U, V \subseteq X$ conteniendo a x e y respectivamente.*

Demostración. Si dichos abiertos existen, entonces para $x', y' \in Y$ con $x' \neq y'$ podemos considerar $x, y \in X$ tales que $\pi(x) = x'$ y $\pi(y) = y'$, y conderamos $U, V \subseteq X$ abiertos como en el enunciado. Entonces, $\pi(U), \pi(V)$ son abiertos (pues sus preimagenes por π son U, V, que son abiertos) disjuntos que contienen a x', y' respectivamente. Así, Y es de Hausdorff.
Recíprocamente, si Y es de Hausdorff y si $x, y \in X$ no pertenecen a la misma clase de equivalencia, entonces $x' = \pi(x) \neq \pi(y) = y'$. Sean U', V' dos abiertos disjuntos en Y conteniendo a x', y' respectivamente. Entonces, $U := \pi^{-1}(U')$ y $V := \pi^{-1}(V')$ son abiertos disjuntos saturados que contienen a x e y respectivamente. □

Atención. El cociente de un espacio de Hausdorff **no siempre** es Hausdorff. Por ello, verificar que un cociente es o no Hausdorff debe convertirse en **<u>un hábito</u>**.

Ejercicio 2.31. Sea X un espacio topológico y $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X. Probar que:

1. Si $X/\mathscr{R}$ es Hausdorff, entonces $\mathscr{R} \subseteq X \times X$ es un cerrado.
2. Si X' es un espacio topológico de Hausdorff y si $f : X \to X'$ es una función continua tal que $[x] = [y]$ si y sólo si $f(x) = f(y)$ para todos $x, y \in X$, entonces $X/\mathscr{R}$ es de Hausdorff.

Ejemplo 2.32 (toro)**.** Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Sea $\mathscr{R}$ la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$(x, y) \in \mathscr{R}, \text{ i.e., } x \sim_{\mathscr{R}} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,\ t_i \in \mathbb{Z} \text{ para todo } i\}.$$

Denotamos por $\mathbb{T}^n$ o $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ al espacio topológico cociente $\mathbb{R}^n/\mathscr{R}$, con proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$, y lo llamamos el **toro** (real) de dimensión n. Si identificamos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ via $(x, y) \mapsto x + iy$, y en particular pensamos al círculo unitario $\mathbb{S}^1$ como subconjunto de $\mathbb{C}$, entonces la función

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{S}^1)^n,\ (t_1, \ldots, t_n) \longmapsto (e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n})$$

es continua, sobreyectiva y induce, por la propiedad universal del cociente, una biyección

$$\Phi : \mathbb{T}^n \longrightarrow (\mathbb{S}^1)^n,\ [(t_1, \ldots, t_n)] \longmapsto (e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n}).$$

Dicha biyección es continua, puesto que $\Phi \circ \pi = \varphi$ lo es. Además, el Ejercicio 2.31 implica que $\mathbb{T}^n$ es Hausdorff. Más aún, veremos más adelante (ver Ejemplo 5.21) que Φ es de hecho un homeomorfismo.

Ejercicio 2.33 (clases de equivalencia densas)**.** Sea X un espacio topológico y $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X.

1. Probar que si una clase de equivalencia de $\mathscr{R}$ es densa en X y si $\mathrm{Card}(X/\mathscr{R}) \geq 2$, entonces $X/\mathscr{R}$ no es de Hausdorff.

2. Probar que si todas las clases de equivalencia de $\mathscr{R}$ son densas, entonces la topología cociente en $X/\mathscr{R}$ es la topología gruesa.

Ejercicio 2.34 (topología cociente inducida)**.** Sea X un espacio topológico y $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X, y sea $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ la proyección canónica. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto arbitrario y $\mathscr{R}_A := \mathscr{R} \cap (A \times A)$ la relación de equivalencia inducida en A. Así, hay una inclusión continua $A/\mathscr{R}_A \hookrightarrow X/\mathscr{R}$. Suponga que alguna de las condiciones siguientes se verifica

1. Todo abierto saturado de A es la traza sobre A de un abierto saturado de X.

2. A es abierto y π es una función abierta.

3. A es cerrado y π es una función cerrada.

4. La restricción $\pi|_A : A \to X/\mathscr{R}$ es una función cerrada.

y demuestre que la topología cociente de $A/\mathscr{R}_A$ coincide con la topología inducida por $X/\mathscr{R}$. ¿Qué ocurre si $X = \mathbb{R}$, si $\mathscr{R}$ está dada por $x \sim_{\mathscr{R}} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ y si $A = [0, 1[$ o $A = [0, 1]$?

Recuerdo 2.35 (relación de equivalencia generada)**.** Sea X con junto y sea $\sim \subseteq X \times X$ una relación (donde, como siempre, escribimos $x \sim y$ en lugar de $(x, y) \in \sim$). Definimos la **relación de equivalencia generada por** $\sim$ como la intersección de todas las relaciones de equivalencia en X que contienen a $\sim$, es decir, como la relación de equivalencia más pequeña (respecto a la inclusión) que contiene a $\sim$. De manera más concreta, está dada por la relación de equivalencia $\mathscr{R}$ definida por $x \sim_{\mathscr{R}} y$ si y sólo si

> Existe $n \in \mathbb{N}$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $x_0 = x$, $x_n = y$, y para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $x_{i-1} \sim x_i$ o bien $x_i \sim x_{i-1}$ o bien $x_i = x_{i-1}$.

Ejemplo 2.36. Sean I_1, I_2 dos copias del intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Sea $\mathscr{R}$ la relación de equivalencia en la unión disjunta $I_1 \coprod I_2$ generada por la relación $t \in I_1 \sim t \in I_2$ para todo $t > 0$. Entonces, el conjunto $(I_1 \coprod I_2)/\mathscr{R}$, dotado de la topología cociente de la topología unión disjunta, es homeomorfo al espacio topológico considerado en el Ejercicio 1.25 y por ende **no** es Hausdorff.

Ejercicio 2.37. Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la proyección canónica, y sea $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1. Sea L una recta de pendiente α en $\mathscr{R}^2$. Demostrar que si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ entonces $\pi(L)$ es homeomorfa a un círculo. Demostrar que si $\alpha \notin \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ entonces $\pi(L)$ es densa en $\mathbb{T}^2$ y $\pi|_L : L \to \pi(L)$ es una biyección continua. ¿Es $\pi|_L$ un homeomorfismo sobre su imagen?

2. Sea $\sim$ la relación en $\mathbb{T}^2$ definida por $x' \sim y'$ si y sólo si existe una recta L de pendiente α en $\mathbb{R}^2$ y existen $x, y \in L$ tales que $\pi(x) = x'$, $\pi(y) = y'$. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia y que el espacio cociente $\mathbb{T}^2/\sim$ es Hausdorff si y sólo si $\alpha \in \mathbb{Q}$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, probar que el espacio cociente $\mathbb{T}^2/\sim$ es homeomorfo a un círculo. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, probar que la topología de $\mathbb{T}^2/\sim$ es la topología gruesa.

Ejercicio 2.38. Para todo $t \in \mathbb{S}^1$, sea L_t una copia de $[0, +\infty[$. En la unión disjunta $X = \coprod_{t \in \mathbb{S}^1} L_t$ denotamos por $\mathscr{R}$ a la relación de equivalencia generada por $0 \in L_t \sim 0 \in L_s$ para todos $t, s \in \mathbb{S}^1$. Demostrar que el espacio topológico cociente $X/\mathscr{R}$ es homeomorfo al conjunto $\mathbb{R}^2$ dotado de la topología coherente definida por la familia de rayos vectoriales de $\mathbb{R}^2$.

3. Algunas operaciones con espacios topológicos

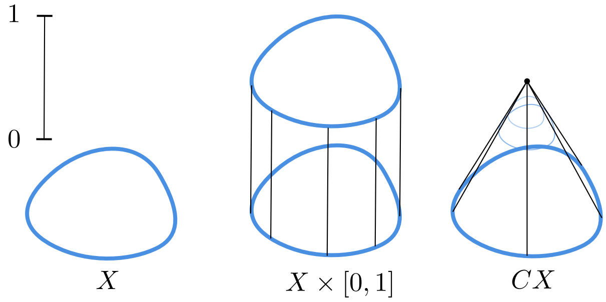
En esta sección recordaremos algunas construcciones importantes y que serán muy útiles en Topología Algebraica. Muchas de las propiedades serán sólamente anunciadas y se deja como ejercicio demostrarlas.

3.1. Cono sobre un espacio topológico.

Sea X un espacio topológico. El **cono sobre** X es el espacio topológico cociente

$$CX := (X \times [0,1])/\mathscr{R},$$

donde $\mathscr{R}$ es la relación de equivalencia generada por $(x,1) \sim (x',1)$ para todos $x, x' \in X$.



Notamos que la función $\iota : X \to CX,\ x \mapsto [(x,0)]$ es un homeomorfismo sobre su imagen y por ende permite pensar a X como un subconjunto de CX. Además, si $f : X \to Y$ es una función continua entonces

$$Cf : CX \to CY,\ [(x,t)] \mapsto [(f(x),t)]$$

es una función continua. La imagen de $X \times \{1\}$ en CX es un punto, que llamamos el **vértice** de CX.

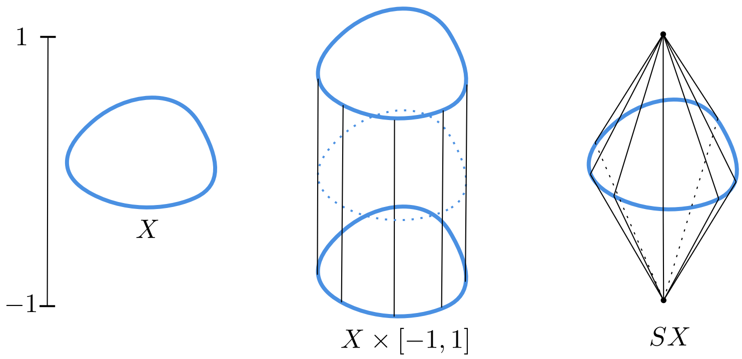
Notar que si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces $C(g \circ f) = (Cg) \circ (Cf)$ y además $C(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{CX}$. En otras palabras, la construcción define *un functor covariante.*

3.2. Suspensión.

Sea X un espacio topológico. La **suspensión de** X es el espacio topológico cociente

$$SX := (X \times [-1,1])/\mathscr{R},$$

donde $\mathscr{R}$ es la relación de equivalencia generada por $(x,1) \sim (x',1)$ y $(x,-1) \sim (x',-1)$ para todos $x, x' \in X$.



Notamos que la función $\iota : X \to SX,\ x \mapsto [(x,0)]$ es un homeomorfismo sobre su imagen y por ende permite pensar a X como un subconjunto de SX. Además, si $f : X \to Y$ es una función continua entonces

$$Sf : SX \to SY,\ [(x,t)] \mapsto [(f(x),t)]$$

es una función continua.

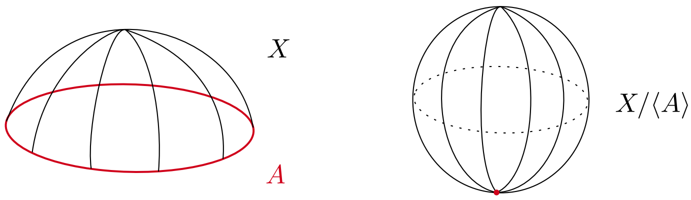
Notar que si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces $S(g \circ f) = (Sg) \circ (Sf)$ y además $S(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{SarX}$. En otras palabras, la construcción define *un functor covariante.*

3.3. Colapso de sub-espacios.

Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ un subconjunto. El **colapso de** A **en** X se denota $X/\langle A\rangle$ y se define como el espacio topológico cociente

$$X/\langle A\rangle := X/\mathscr{R},$$

donde $\mathscr{R}$ es la relación de equivalencia generada por $x \sim x'$ para todos $x, x' \in A$.



Notamos que si A es abierto o cerrado en X entonces la restricción a $X \setminus A$ de la proyección canónica $\pi : X \to X/\langle A\rangle$ es un homeomorfismo sobre su imagen. Notar que $CX/\langle X\rangle$ y SX son homeomorfos.

3.4. Bouquet de espacios.

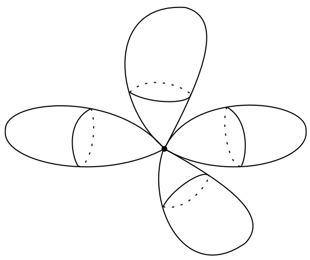
Un **espacio basado** (X, x) es un espacio topológico X junto con un **punto base** $x \in X$.

Sea $(X_i, x_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos basados. El **bouquet** o **wedge** de esta familia es el espacio topológico cociente

$$\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i) := \left(\coprod_{i\in I} X_i\right)/\mathscr{R},$$

donde $\mathscr{R}$ es la relación de equivalencia generada por $x_i \sim x_j$ para todos $i, j \in I$. Notar que la inclusión $X_i \to \coprod_{i\in I} X_i$ induce un homeomorfismo sobre su imagen, de X_i en $\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)$ y en particular podemos identificar a cada X_i por su imagen vía este homeomorfismo.

Por ejemplo, el bouquet de dos círculos $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ es homeomorfo a la figura "8", dos círculos tocándose en un punto. Más generalmente, llamamos **bouquet de esferas** de dimensión n (o de círculos, cuando $n = 1$) al bouquet $\mathbb{S}^n \vee \cdots \vee \mathbb{S}^n$ formado por copias de la esfera $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ basada en el punto $(1, 0, \ldots, 0)$.

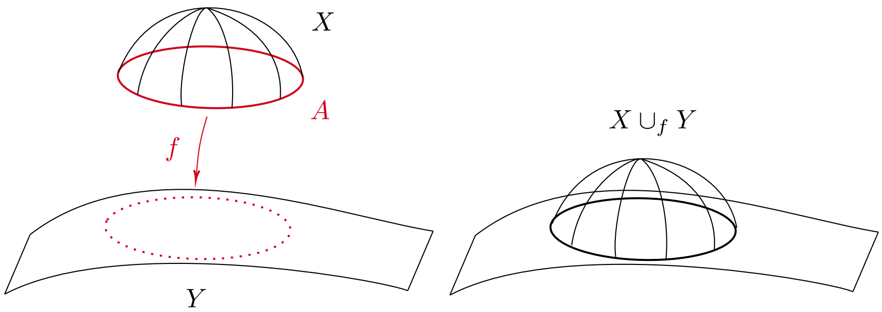


3.5. Pegado de un espacio sobre otro.

Sean X, Y espacios topológicos, sea $A \subseteq X$ un sub-espacio, y sea $f : A \to Y$ una función continua. El **pegado de** X **a** Y **mediante** f es el espacio topológico cociente

$$X \cup_f Y := (X \coprod Y)/\mathscr{R},$$

donde $\mathscr{R}$ es la relación de equivalencia generada por $x \sim f(x)$ para todo $x \in A$.



Notamos que si A es cerrado (resp. abierto) y si $\pi : X \coprod Y \to X \cup_f Y$ es la proyección canónica, entonces $\pi|_Y : Y \to X \cup_f Y$ es un homeomorfismo sobre su imagen y además es una función cerrada (resp. abierta).

Notamos que si A es no-vacío y si X, Y son conexos (resp. conexos por arcos) entonces $X \cup_f Y$ es conexo (resp. conexo por arcos).

Además, si $u : X \to Z$ y $v : Y \to Z$ son funciones continuas tales que $u(x) = v(f(x))$ para todo $x \in A$, entonces existe una única función continua $w : X \cup_f Y \to Z$ tal que $w \circ \pi|_X = u$ y $w \circ \pi|_Y = v$.

Por último, observamos que si $Y = \{*\}$ es un punto, entonces $f : A \to Y$ es necesariamente una función constante y la inclusión de X en $X \coprod \{*\}$ induce un homeomorfismo

$$X/\langle A\rangle \cong X \cup_f \{*\}.$$

3.6. Producto smash.

Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios topológicos basados. Notar que en el producto $X \times Y$ hay dos copias naturales de X e Y dadas por $X \cong X \times \{y_0\}$ e $Y \cong \{x_0\} \times Y$, y dichos sub-espacios se intersectan solamente en $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Así, la unión $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \cong X \vee Y$ es homeomorfa al bouquet de (X, x_0) y (Y, y_0). El **producto smash** de (X, x_0) con (Y, y_0) es el espacio topológico cociente

$$X \wedge Y := (X \times Y)/\langle X \vee Y\rangle.$$

Por ejemplo, si $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ es el espacio discreto con dos puntos, entonces $\mathbb{S}^0 \wedge X \cong X$ para todo espacio topológico basado (X, x_0). Por otra parte, el producto smash de dos círculos $\mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^1$ es homeomorfo a un cociente del toro $\mathbb{T}^2$ que es homeomorfo[3] a $\mathbb{S}^2$ y, más generalmente, se prueba que

$$\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \cong \mathbb{S}^{n+m}.$$

4. Límites y adherencia

Durante toda esta sección consideraremos X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subconjunto no-vacío, $a \in \overline{A}$, y $f : B \to Y$ una función donde $A \subseteq B \subseteq X$.

Definición 4.1 (límite)**.** Decimos que $f(x)$ **posee un límite** cuando x tiende a $a \in A$ si existe $\ell \in Y$ tal que para toda vecindad V de ℓ, existe una vecindad U de a tal que

$$f(U \cap A) \subseteq V.$$

En tal caso, escribimos $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} \ell$ o bien $\lim\limits_{x \to a,\ x \in A} f(x) = \ell$. Cuando el conjunto A es claro en el contexto (e.g. si $A = X$ o el dominio de definición de f), decimos símplemente que f posee un límite ℓ en a y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ o incluso $\lim\limits_{a} f = \ell$.

Ejemplo 4.2. Si $X = \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, y consideramos para $\alpha > 0$ el conjunto

$$A = \begin{cases} [x_0, x_0 + \alpha[\\ ]x_0, x_0 + \alpha[\\ ]x_0 - \alpha, x_0] \\ ]x_0 - \alpha, x_0[\end{cases} \quad \text{entonces escribimos } \ell = \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0,\ x \geq x_0} f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0,\ x \leq x_0} f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \end{cases}$$

Ejemplo 4.3. Si $X = \overline{\mathbb{R}}$, A es un conjunto no-acotado superiormente de $\mathbb{R}$ y si $a = +\infty$, entonces escribimos (en caso de existir) $\lim\limits_{x \to +\infty,\ x \in A} f(x)$ o bien $\lim\limits_{+\infty} f$ al límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ en A. De manera análoga para $-\infty$. Luego, por definición se tiene que

$$\ell = \lim_{+\infty} f \Leftrightarrow \text{ Para toda } V \in \mathscr{V}(\ell), \text{ existe } R \in \mathbb{R} \text{ tal que para todo } x > R,\ x \in A \text{ implica que } f(x) \in V.$$

[3] Ver aquí

Por ejemplo, si $X = \overline{\mathbb{R}}$, $a = +\infty$, y $A = \mathbb{N}$, entonces una función $f : A = \mathbb{N} \to Y$ es precisamente una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en Y. Así, decimos que $\ell = \lim\limits_{+\infty} x_n$ o bien $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \ell$ si f posee a ℓ como límite en $+\infty$. Así, por definición se tiene que

$$\ell = \lim_{+\infty} x_n \Leftrightarrow \text{ Para toda } V \in \mathscr{V}(\ell), \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo } n \geq N \text{ se tiene que } x_n \in V.$$

Una observación práctica importante es que la definición de límite no cambia si pedimos que los abiertos U y V pertenezcan a sistemas fundamentales de vecindades de a y ℓ prefijados.

Proposición 4.4. *Sean $\mathscr{U}, \mathscr{W}$ sistemas fundamentales de vecindades de a, ℓ en X, Y respectivamente. Entonces,*

$$f(x) \xrightarrow[x\in A]{x\to a} \ell \Leftrightarrow \text{ Para todo } V' \in \mathscr{W}, \text{ existe } U' \in \mathscr{U} \text{ tal que } f(U' \cap A) \subseteq V'.$$

Demostración. Si $f(x) \xrightarrow[x\in A]{x\to a} \ell$ entonces para todo $V' \in \mathscr{W}$ existe U en $\mathscr{V}(a)$ tal que $f(U \cap A) \subseteq V'$. Sea $U' \in \mathscr{U}$ tal que $U' \subseteq U$. Entonces, necesariamente $f(U' \cap A) \subseteq V'$.
Recíprocamente, si asumimos la afirmación al lado derecho y consideramos $V \in \mathscr{V}(\ell)$, entonces basta considerar $V' \in \mathscr{W}$ tal que $V' \subseteq V$ y $U' \in \mathscr{U}$ tal que $f(U' \cap A) \subseteq V'$. Dado que $U' \in \mathscr{V}(a)$ y $f(U' \cap A) \subseteq V$, tenemos que $f(x) \xrightarrow[x\in A]{x\to a} \ell$. □

Ejemplo 4.5. En el caso en que (X, d_X) y (Y, d_Y) sean espacios métricos, lo anterior y el Ejemplo 1.18 implican que

$$f(x) \xrightarrow[x\in A]{x\to a} \ell \Leftrightarrow \text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que para } x \in A,\ d_X(x, a) < \delta \text{ implica } d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Observación 4.6. *Los límites también pueden ser usados para caracterizar a las funciones continuas. Por definición, si X, Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función, entonces f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si $\lim\limits_{x_0} f$ existe y vale $f(x_0)$.*

Cabe destacar que los límites no son siempre únicos. Por ejemplo, si Y es el espacio topológico construído en el Ejercicio 1.25, entonces la sucesión $x_n = \frac{1}{n}$ converge tanto a 0_+ como a 0_-. Sin embargo, este problema no ocurre en los espacios de Hausdorff (e.g. espacios metrizables) gracias al siguiente resultado.

Proposición 4.7. *Si Y es un espacio de Hausdorff y si $f(x)$ posee un límite cuando x tiende a $a \in A$, entonces dicho límite es* único.

Demostración. Si ℓ, ℓ' son dos límites distintos, entonces consideramos V, V' dos vecindades disjuntas de ℓ, ℓ' respectivamente. Por definición de límite, existen U, U' vecindades de a tales que $f(U \cap A) \subseteq V$ y $f(U' \cap A) \subseteq V'$. Dado que $U \cap U'$ es una vecindad de a y dado que a es un punto de adherencia de A, el conjunto $U \cap U' \cap A$ es no-vacío. Así, $f(U \cap U' \cap A)$ es no-vacío. Sin embargo, $f(U \cap U' \cap A) \subseteq V \cap V' = \emptyset$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 4.8. *Supongamos que $f(x)$ posee un límite ℓ cuando x tiende a $a \in A$. Entonces, $\ell \in \overline{f(A)}$.*

Demostración. Para toda vecindad V de ℓ, consideramos U una vecindad de a tal que $f(U \cap A) \subseteq V$. Dado que $a \in \overline{A}$, tenemos que $U \cap A$ es no-vacío y luego $f(A) \cap V$, que contiene a $f(U \cap A)$, es no-vacío. □

Proposición 4.9 (composición de límites)**.** *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ subconjuntos, $f : A \to Y$ y $g : B \to Z$ funciones tales que $f(A) \subseteq B$, y sea $a \in \overline{A}$. Entonces,*

$$\textit{Si } f(x) \xrightarrow[x\in A]{x\to a} b \textit{ y } g(y) \xrightarrow[y\in B]{y\to b} \ell, \textit{ entonces } (g \circ f)(x) \xrightarrow[x\in A]{x\to a} \ell.$$

Demostración. Por la Proposición anterior, $b \in \overline{f(A)} \subseteq \overline{B}$. Sea W una vecindad de ℓ. Entonces, existe una vecindad V de b tal que $g(V \cap B) \subseteq W$. Además, existe una vecindad U de a tal que $f(U \cap A) \subseteq V$. Entonces, $(g \circ f)(U \cap A) \subseteq g(V \cap f(A)) \subseteq g(V \cap B) \subseteq W$. □

Ejercicio 4.10. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, Y un espacio topológico, $A \subseteq Y$ un subconjunto y $a \in \overline{A}$.

1. Sea X un conjunto dotado de la topología inicial definida por $\{f_i : X \to X_i\}_{i \in I}$ familia de funciones, y sea $f : B \to X$ una función donde $A \subseteq B \subseteq Y$. Probar que

$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} \ell \text{ si y sólo si } (f_i \circ f)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} f_i(\ell) \text{ para todo } i \in I.$$

2. Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ dotado de las proyecciones canónicas $\mathrm{pr}_i : X \to X_i$, $(x_i)_{i \in I} \mapsto x_i$, y sea $f : Y \to X$ una función cuya i-ésima componente es $f_i = \mathrm{pr}_i \circ f$. Probar que

$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} (\ell_i)_{i \in I} \text{ si y sólo si } f_i(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} \ell_i \text{ para todo } i \in I.$$

Definición 4.11 (valor de adherencia)**.** Decimos que $\ell \in Y$ es un **valor de adherencia** de $f(x)$ cuando x tiende a $a \in A$ (o símplemente de f en a si el conjunto A es claro en el contexto) si

Para toda vecindad V de ℓ y toda vecindad U de a, se tiene que $f(U \cap A) \cap V$ es no-vacío.

Observación 4.12. *Si $\mathscr{U}, \mathscr{W}$ son sistemas fundamentales de vecindades de a, ℓ en X, Y respectivamente, entonces $\ell \in Y$ es un valor de adherencia de f en a si y sólo si para todo $V \in \mathscr{W}$ y todo $U \in \mathscr{U}$ se tiene $f(U \cap A) \cap V \neq \emptyset$. Por ejemplo, si (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos, entonces $\ell \in Y$ es valor de adherencia de f en a si y sólo si*

Para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $\delta > 0$, existe $x \in A$ tal que $d_X(a, x) < \delta$ y $d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon$.

Ejemplo 4.13. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X y si $x \in X$, entonces x es un valor de adherencia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si y sólo si para todo $V \in \mathscr{V}(x)$ y para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $x_n \in V$. En particular, todo límite de una sub-sucesión es un valor de adherencia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si X es un espacio métrico (o más generalmente, si todo punto de X admite un sistema fundamental de vecindades *numerable*), entonces x es un valor de adherencia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si y sólo si x es el límite de una sub-sucesión.

Proposición 4.14. *El conjunto de valores de adherencia de f en a está dado por*

$$\bigcap_{U \in \mathscr{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}.$$

Además, si f posee un límite ℓ en a entonces ℓ es un valor de adherencia de f en a. Si adicionalmente suponemos que Y es Hausdorff, entonces dicho valor de adherencia ℓ es único.

Demostración. Sea $\ell \in Y$. Entonces,

$$\ell \in \bigcap_{U \in \mathscr{V}(a)} \overline{f(U \cap A)} \Leftrightarrow \text{ Para todo } U \in \mathscr{V}(a),\, \ell \in \overline{f(U \cap A)},$$

y esto último equivale a que para todo $U \in \mathscr{V}(a)$ y para todo $V \in \mathscr{V}(\ell)$, $f(U \cap A) \cap V \neq \emptyset$, i.e., ℓ es un valor de adherencia de a. Supongamos en lo que sigue que $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \to a} \ell$:

Sea V una vecindad de ℓ y sea U una vecindad de a. Por hipótesis, existe una vecindad U' de a tal que $f(U' \cap A) \subseteq V$. Dado que $U \cap U'$ es una vecindad de $a \in \overline{A}$, el conjunto $U \cap U' \cap A$ es no-vacío. Luego,

$$f(U \cap A) \cap V \supseteq f(U \cap U' \cap A) \cap V = f(U \cap U' \cap A) \neq \emptyset.$$

Finalmente, si Y es Hausdorff y si ℓ' es un valor de adherencia de f en a diferente de ℓ, entonces consideramos V, V' vecindades disjuntas de ℓ, ℓ' respectivamente. Sea U una vecindad de a tal que $f(U \cap A) \subseteq V$. Entonces, $f(U \cap A) \cap V' = \emptyset$, contradiciendo que ℓ' es valor de adherencia de f en a. $\square$

Ejemplo 4.15. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces, el conjunto de valores de adherencia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está dado por

$$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n,\ n \geq N\}}.$$

Si X es Hausdorff y si $\lim x_n = x$, entonces x es el único valor de adherencia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ejemplo 4.16. Sea $X = \mathbb{R}$, $A =]0, +\infty$ y $a = 0 \in \overline{A}$. Si $f : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ entonces el conjunto de valores de adherencia de f en 0 es $[-1, 1]$.

5. Compacidad

Recuerdo 5.1. Sea X un conjunto. Una familia de subconjunos $\{A_i\}_{i\in I}$ de X es un **recubrimiento** de X (o que recubre X) si $\bigcup_{i\in I} A_i = X$. Un **sub-recubrimiento** es una sub-familia $\{A_j\}_{j\in J}$ donde $J \subseteq I$ que también recubre X. Si X es un espacio topológico, decimos que un recubrimiento $\{A_i\}_{i\in I}$ es **abierto** o **cerrado** si cada A_i lo es.

Atención. Tendremos especial cuidado en utilizar la palabra recubrimiento en lugar de *cubrimiento* (en inglés, *covering*). Esto último hace alusión a una construcción importante en Topología Algebraica, que también se le conoce como *revestimiento* (en francés, *revêtement*).

Definición 5.2 (espacio compacto)**.** Un espacio topológico X es **compacto** si es Hausdorff y si todo recubrimiento abierto de X admite un sub-recubrimiento finito.

Atención. En muchos textos no se incluye la hipótesis de Hausdorff en la definición de compacidad. Sin embargo, es importante en muchos contextos (e.g. en Geometría Algebraica) hacer la distinción. Más generalmente, decimos que un espacio topológico X es **quasi-compacto** si todo recubrimiento abierto de X admite un sub-recubrimiento finito. Así, un espacio topológico es compacto si es Hausdorff y quasi-compacto. Por otra parte, $\mathbb{A}^n(k)$ con la topología de Zariski es quasi-compacto pero no es compacto.

Observación 5.3. *En el caso de espacios metrizables, hay varias caracterizaciones equivalentes de los espacios compactos (vistas en el curso de Análisis I). Probablemente una de las más importante es que* toda sucesión admite una sub-sucesión convergente.

Ejemplo 5.4. Un espacio discreto es compacto si y sólo si es finito, pues la familia de singletons es un recubrimiento abierto.

Ejemplo 5.5. Tomando complementos, observamos que un espacio topológico de Hausdorff X es compacto si y sólo si toda familia de cerrados de X de intersección vacía admite una sub-familia finita de intersección vacía.

Definición 5.6 (subconjunto compacto)**.** Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Dado que los abiertos del sub-espacio topológico A son las trazas en A de abiertos en X, las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. El sub-espacio topológico A es compacto.
2. El sub-espacio topológico A es Hausdorff, y toda familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de X tales que $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ admite una sub-familia finita $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_N}\}$ tal que $A \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}$.

En tal caso decimos que A es un **subconjunto compacto** de X.

Proposición 5.7. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y sea $A \subseteq X$ un subconjunto compacto, entonces A es cerrado en X. En particular, todo sub-espacio cerrado de un compacto es compacto.*

Demostración. Veamos primero que $X \setminus A$ es abierto. Para ello, consideremos $x \in X \setminus A$ y notar que, dado que X es Hausdorff, para todo $y \in A$ existen abiertos U_y,V_y disjuntos tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$. En particular, $A \subseteq \bigcup_{y\in A} V_y$ y por compacidad existen $y_1, \ldots, y_n \in A$ tales que $A \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Así, $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ es un abierto de X tal que $U \cap A = \emptyset$ y tal que $x \in U$, es decir, $X \setminus A$ es abierto.

Para la última afirmación, notar primero que todo sub-espacio de un espacio de Hausdorff es también de Hausdorff. Así, si consideramos un cerrado A de un espacio compacto X, basta considerar una familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de cerrados de A de intersección vacía y extraer una sub-familia finita con la misma propiedad. Dado que A es cerrado, tenemos por definición que F_i es también cerrado en X, y el ser X compacto se tiene que existe una sub-familia finita de intersección vacía. □

Ejercicio 5.8. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Demostrar que dos compactos disjuntos de X admiten vecindades disjuntas.

Notación 5.9. En lo que resta de la sección, consideramos X, Y espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subconjunto, $a \in \overline{A}$ un punto de adherencia, y $f : B \to Y$ una función donde $A \subseteq B \subseteq X$.

Proposición 5.10. *Con la Notación 5.9, si Y es compacto entonces f posee al menos un valor de adherencia en a. Más aún, si f posee un único valor de adherencia ℓ en a, entonces f posee ℓ como límite en a.*

Demostración. Por la Proposición 4.14, el conjunto de valores de adherencia de f en a es $\bigcap_{U\in\mathscr{V}(a)} \overline{f(U\cap A)}$. Si este conjunto es vacío, por compacidad de X y dado que los $\overline{f(U\cap A)}$ son cerrados, existen vecindades $U_1,\dots,U_n$ de a tales que $\overline{f(U_1\cap A)}\cap\cdots\cap\overline{f(U_n\cap A)}=\emptyset$. Dado que

$$f(U_1\cap\cdots\cap U_n\cap A)\subseteq f(U_1\cap A)\cap\cdots\cap f(U_n\cap A)\subseteq\overline{f(U_1\cap A)}\cap\cdots\cap\overline{f(U_n\cap A)},$$

tenemos que $U_1\cap\cdots\cap U_n\cap A=\emptyset$. Por otra parte, dado que $U_1\cap\cdots\cap U_n$ es una vecindad de a, esto contradice el hecho que $a\in\overline{A}$. Así, f posee al menos un valor de adherencia en a.

Más aún, si asumimos que existe un único valor de adherencia ℓ y consideramos una vecindad abierta V de ℓ, entonces $(Y\setminus V)\cap\bigcap_{U\in\mathscr{V}(a)}\overline{f(U\cap A)}$ es vacío, donde tanto $Y\setminus V$ como los $\overline{f(U\cap A)}$ son cerrados. Luego, por compacidad, existen vecindades $U_1,\dots,U_n$ de a tales que

$$(Y\setminus V)\cap\overline{f(U_1\cap A)}\cap\cdots\cap\overline{f(U_n\cap A)}=\emptyset.$$

Así, $U:=U_1\cap\cdots\cap U_n$ es una vecindad de A que cumple $f(U\cap V)\subseteq\overline{f(U_1\cap A)}\cap\cdots\cap\overline{f(U_n\cap A)}\subseteq V$, y por ende f posee a ℓ como límite en a. □

Ejemplo 5.11. En un espacio topológico compacto, toda sucesión posee al menos un valor de adherencia. Si dicho valor es único, entonces la sucesión converge a él.

Recuerdo 5.12 (Lema de Zorn)**.** Sea A un conjunto dotado de una relación de orden parcial $\prec$.

1. Un elemento $x\in A$ es **maximal** si para todo $y\in A$ se tiene que $x\prec y$ implica que $y=x$.
2. Sea $B\subseteq A$ un subconjunto. Un elemento $x\in A$ es una **cota superior** de B si para todo $y\in B$ se tiene que $y\prec x$.
3. Un subconjunto $B\subseteq A$ es **totalmente ordenado** si para todos $x,y\in B$ se tiene $x\prec y$ o $y\prec x$.
4. Un conjunto parcialmente ordenado $(A,\prec)$ es **inductivo** si todo subconjunto totalmente ordenado posee una cota superior.

Con la terminología anterior, el **Lema de Zorn** afirma que

Todo conjunto inductivo no-vacío posee un elemento maximal.

Lema 5.13. *Sea X un espacio topológico. Un* **recubrimiento malo** *de X es un recubrimiento que no admite un sub-recubrimiento finito. Sea $\mathscr{A}$ una prebase de abiertos de X. Si X posee al menos un recubrimiento abierto malo, entonces posee un recubrimiento malo formado por elementos de $\mathscr{A}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{M}$ el conjunto no-vacío de recubrimientos abiertos malos de X, parcialmente ordenado por la inclusión. Veamos que $(\mathscr{M},\subseteq)$ es un conjunto inductivo:

Sea $\{\mathscr{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia totalmente ordenada de elementos de $\mathscr{M}$ y sea $\mathscr{U}:=\bigcup_{\alpha\in A}\mathscr{U}_\alpha$. Así, $\mathscr{U}$ es una cota superior de los $\mathscr{U}_\alpha$ y además es un recubrimiento abierto malo de X, pues si contuviese un sub-recubrimiento finito $\{V_1,\dots,V_n\}$ para ciertos $V_i\in\mathscr{U}_{\alpha_i}$ entonces todo $\beta\in A$ tal que $\mathscr{U}_{\alpha_i}\subseteq\mathscr{U}_\beta$ para todo i verificaría que $\mathscr{U}_\beta$ admite un sub-recubrimiento abierto finito, lo cual es una contradicción.

Así, el Lema de Zorn implica que existe un elemento maximal $\mathscr{U}^*$ de $\mathscr{M}$. En particular, para todo abierto $V\notin\mathscr{U}^*$ se tiene que el recubrimiento $\mathscr{U}^*\cup\{V\}$ *no es malo*, y por ende existen $U_1,\dots,U_n\in\mathscr{U}^*$ tales que $\{V,U_1,\dots,U_n\}$ recubren a X.

Notar además que para todo par de abiertos V,V' de X se tiene que si $V\notin\mathscr{U}^*$ y $V'\notin\mathscr{U}^*$ entonces $V\cap V'\notin\mathscr{U}^*$. En efecto, si $U_1,\dots,U_n,U'_1,\dots,U'_m\in\mathscr{U}^*$ son tales que $\{V,U_1,\dots,U_n\}$ y $\{V',U'_1,\dots,U'_m\}$ cubren X, entonces $\{V\cap V',U_1,\dots,U_n,U'_1,\dots,U'_m\}$ recubre a X y, dado que $\mathscr{U}^*$ es malo, tenemos necesariamente que $V\cap V'\notin\mathscr{U}^*$. Del mismo modo, tenemos que si V,V' son abiertos de X tales que $V\notin\mathscr{U}^*$ y $V\subseteq V'$, entonces $V'\notin\mathscr{U}^*$. En efecto, si $\{V,U_1,\dots,U_n\}$ cubre X entonces $\{V',U_1,\dots,U_n\}$ también. Considerando estas observaciones, probemos que $\mathscr{A}\cap\mathscr{U}^*$ recubre X:

Sea $x_0 \in X$. Dado que $\mathscr{U}^*$ recubre X, existe $U \in \mathscr{U}^*$ tal que $x_0 \in U$. Dado que $\mathscr{A}$ es una prebase, existen $V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{A}$ tales que $x_0 \in V_1 \cap \cdots \cap V_n \subseteq U$. En vista de la discusión del parrafo precedente, existe necesariamente i tal que $V_i \in \mathscr{U}^*$. Luego, $x_0 \in V_i$ y $V_i \in \mathscr{A} \cap \mathscr{U}^*$. Por último, dado que $\mathscr{U}^*$ es malo, tenemos que $\mathscr{A} \cap \mathscr{U}^*$ también lo es. □

Teorema 5.14 (Teorema de Tychonov). *El producto de espacios compactos es compacto.*

Demostración. Ya vimos en la Proposición 2.16 que el producto de espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff. Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ un producto de espacios compactos. Por las propiedades de la topología producto, tenemos que $\mathscr{A} := \{\mathrm{pr}_i^{-1}(V),\ i \in I$ y V abierto de $X_i\}$ es una prebase de abiertos de X.

Si X no es compacto, entonces el Lema anterior implica que existe un recubrimiento malo $\mathscr{U}$ de X formado por elementos de $\mathscr{A}$. Para $i \in I$, denotemos por $\mathscr{A}_i$ al conjunto de abiertos V de X_i tales que $\mathrm{pr}_i^{-1}(V) \in \mathscr{U}$. Si $\mathscr{A}_i$ recubre a X_i, por compacidad, existen $V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{A}_i$ que recubren X_i. Sin embargo, en tal caso tendríamos que $\mathrm{pr}_i^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_i^{-1}(V_n) = \mathrm{pr}_i^{-1}(X_i) = X$, lo que contradice el hecho que $\mathscr{U}$ es malo. Así, existe $x_i \in X_i$ tal que $x_i \notin \bigcup_{V \in \mathscr{A}_i} V$, y definimos $x := (x_i)_{i \in I} \in X$. Dado que $\mathscr{U}$ recubre a X, existe $i_0 \in I$ y $V \subseteq X_{i_0}$ abierto tal que $x \in \mathrm{pr}_{i_0}^{-1}(V) \in \mathscr{U}$ (es decir, con $V \in \mathscr{A}_{i_0}$), lo que contradice el hecho que $x_{i_0} \notin \bigcup_{V \in \mathscr{A}_{i_0}} V$. □

Definición 5.15 (espacio localmente compacto). Un espacio topológico es **localmente compacto** si es de Hausdorff y si todo punto admite una vecindad compacta.

Ejemplo 5.16.

1. Todo espacio discreto es localmente compacto.
2. Todo espacio compacto es localmente compacto.
3. Gracias al **Teorema de Riesz**, un espacio vectorial normado es localmente compacto si y sólo si es de dimensión finita. En particular, $\mathbb{R}$ es localmente compacto pero no es compacto.
4. Un sub-espacio cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto.
5. El producto *finito* de espacios localmente compactos es localmente compacto.
6. El espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones reales **no es** localmente compacto, pues si V es una vecindad compacta de $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ entonces contiene una vecindad elemental (ver Notación 2.13) de la forma
$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times \cdots \times]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$
Luego, $\mathrm{pr}_{n+1}(V) = \mathbb{R}$ no es compacto, contradiciendo la continuidad de pr_{n+1} (ver Teorema 5.20).

Proposición 5.17. *En un espacio localmente compacto X, todo punto posee un sistema fundamental de vecindades compactas.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea K una vecindad compacta de x. Para todo abierto U tal que $x \in U \subseteq K$, basta probar que existe una vecindad W de x que sea cerrada, contenida en U, y por ende compacta.

Dado que X es Hausdorff, si $y \neq x$ podemos considerar V, V' vecindades disjuntas de x, y respectivamente. Así, $y \notin \overline{V}$ y luego $\bigcap_{V \in \mathscr{V}(x)} \overline{V} = \{x\}$. En consecuencia, $(X \setminus U) \cap \bigcap_{V \in \mathscr{V}(x)} \overline{V} = \emptyset$. Por compacidad de K, existen vecindades $V_1, \ldots, V_n$ de x tales que $(X \setminus U) \cap \overline{V}_1 \cap \cdots \cap \overline{V}_n \cap K = \emptyset$. Finalmente, $W := \overline{V}_1 \cap \cdots \cap \overline{V}_n \cap K$ es una vecindad cerrada de x contenida en U. □

Ejemplo 5.18. Todo abierto de un espacio localmente compacto es localmente compacto. En particular, si X es localmente compacto y $x \in X$, entonces $X \setminus \{x\}$ es un espacio localmente compacto.

Ejercicio 5.19 (compactificación de Alexandrov). Sea X un espacio localmente compacto y sea ∞ un conjunto disjunto a X, y sea $\widehat{X} := X \cup \{\infty\}$.

1. Probar que la familia de subconjuntos de $\widehat{X}$ de la forma U, donde U es un abierto de X o bien de la forma $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$, donde $K \subseteq X$ es un compacto, es una topología en $\widehat{X}$. El espacio topológico $\widehat{X}$, dotado de esta topología, se llama la **compactificación de Alexandrov** de X y decimos que ∞ es el **punto al infinito**.

2. Demostrar que la topología inducida en X por aquella de $\widehat{X}$ es la topología original de X.
3. Probar que $\widehat{X}$ es un espacio compacto.
4. Probar la unicidad de la compactificación de Alexandrov. Más precisamente, dado Y espacio topológico compacto y $\varphi : X \to Y$ un homeomorfismo sobre su imagen tal que $\varphi(X) = Y \setminus \{y\}$, probar que $\Phi : \widehat{X} \to Y$ dado por $x \mapsto \varphi(x)$ si $x \in X$ y por $\infty \mapsto y$, es un homeomorfismo.
5. Probar que la compactificación de Alexandrov es functorial para homeomorfismos. Más precisamente, probar que si Y es otro espacio localmente compacto y si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces la función $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ dada por $\widehat{f}|_X = f$ y por $\widehat{f}(\infty) = \infty$, es un homeomorfismo.
6. Probar que la compactificación de Alexandrov es functorial para funciones continuas propias. Más precisamente, probar que si Y es otro espacio localmente compacto y si $f : X \to Y$ es una función **propia** (ver Definición 5.22), entonces la función $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ dada por $\widehat{f}|_X = f$ y por $\widehat{f}(\infty) = \infty$, es continua.
7. Probar que si X es compacto, entonces $\widehat{X}$ es homeomorfo a $X \coprod \{\infty\}$, dotado de la topología de la unión disjunta.
8. Probar que la compactificación de Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^n$. Para ello, es recomendable considerar a $\mathbb{R}^n$ contenido en $\mathbb{R}^{n+1}$ como el hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$. Si N es el polo norte de $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, pruebe que la proyección estereográfica $\pi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$, que asocia a x el punto de intersección con $\mathbb{R}^n$ de la recta que pasa por N y por x, es un homeomorfismo y concluya usando el ítem (4).

Teorema 5.20. *Sea X un espacio compacto y Y un espacio de Hausdorff. Entonces, para toda función continua $f : X \to Y$ se tiene que:*

1. *El espacio $f(X)$ es compacto.*
2. *Si f es biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Para (1), notar que $f(X)$ es Hausdorff dado que Y lo es. Para todo recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de $f(X)$, la familia $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X y por ende admite un subrecubrimiento finito $\{f^{-1}(U_j)\}_{j\in J}$. Así, $f(X) \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$ y luego $f(X)$ es compacto.
Para (2), basta demostrar que f^{-1} es continua, es decir, que f es una función cerrada. Si F es un cerrado de X, entonces F es compacto en X y por ende $f(F)$ es compacto en Y por (1). Dado que Y es Hausdorff, el compacto $f(F)$ es cerrado. $\square$

Ejemplo 5.21 (toro)**.** La función $\Phi : \mathbb{T}^n \to (\mathbb{S}^1)^n$, $[(t_1, \dots, t_n)] \mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})$ del Ejemplo 2.32 es continua, biyectiva, el espacio de llegada es Hausdorff y el espacio de partida es compacto (pues $\mathbb{T}^n$ es Hausdorff por el Ejercicio 2.31 y es la imagen del compacto $[0,1]^n$ por la proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$, que es una función continua). Así Φ es un homeomorfismo.

Definición 5.22 (función propia)**.** Sean X, Y espacios topológicos de Hausdorff y sea $f : X \to Y$ una función continua. Decimos que f es una función **propia** si es una función cerrada y si la preimagen por f de todo punto de Y es un compacto de X.

Atención. La condición de que f sea cerrada es, en la práctica, difícil de verificar. Sin embargo, si los espacios X, Y son localmente compactos, se utiliza casi exclusivamente la caracterización que veremos a continuación:

> Una función continua entre espacios localmente compactos es propia si y sólo si la preimagen de todo compacto es compacto.

Proposición 5.23. *Si $f : X \to Y$ es una función propia, entonces la preimagen por f de todo compacto de Y es un compacto de X. Si Y es localmente compacto y si la preimagen por $f : X \to Y$ de todo compacto de Y es un compacto de X, entonces f es una función propia.*

Demostración. Si $f : X \to Y$ es propia, consideramos $K \subseteq Y$ un compacto y $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados de $f^{-1}(K)$ con intersección vacía. Supongamos por contradicción que $A_J := \bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $J \subseteq I$. En particular, $f(A_J)$ es un cerrado no-vacío de Y, y luego de K. Notar además que para toda familia *finita* $\{J_\alpha\}$ de subconjuntos finitos de I se tiene que

$$\bigcap_\alpha f(A_{J_\alpha}) \supseteq f\left(\bigcap_{j\in\cup_\alpha J_\alpha} F_j\right) \neq \emptyset.$$

Así, dado que K es compacto, existe al menos un punto y que pertenece a la intersección de todos los conjuntos $f(A_J)$ donde J recorre todos los subconjuntos finitos de I. Así, para todo subconjunto finito $J \subseteq I$ tenemos que

$$f^{-1}(y) \cap \bigcap_{j\in J} F_j = f^{-1}(y) \cap A_J \neq \emptyset.$$

Dado que f es propia tenemos que $f^{-1}(y)$ es compacto y luego necesariamente $f^{-1}(y) \cap \bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, lo que contradice el hecho que la familia $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene intersección vacía.

Recíprocamente, si suponemos que Y es localmente compacto y que la preimagen por f de todo compacto de Y es un compacto de X, entonces el singleton $\{y\}$ es compacto en Y y luego $f^{-1}(y)$ es compacto. Sea $F \subseteq X$ un conjunto cerrado y sea $y \in \overline{f(F)}$. Sea W una vecindad compacta de y y sea $\{V_i\}_{i\in I}$ un sistema fundamental de vecindades compactas de y contenidas en W. El cerrado $F_i := f^{-1}(V_i) \cap F \subseteq X$ está contenido en el compacto $f^{-1}(W) \cap F$. Además, la intersección $\bigcap_{j\in J} F_j$ es no-vacía para todo subconjunto finito $J \subseteq I$ ya que $\bigcap_{j\in J} V_j$ es una vecindad de y. Así, por compacidad de $f^{-1}(W) \cap F$, tenemos que existe un punto x en $\bigcap_{i\in I} F_i$. Luego, $f(x) \in \bigcap_{i\in I} V_i = \{y\}$ y así $f(x) = y$, es decir, f es una función cerrada. □

Ejemplo 5.24. Sean V, W dos espacios vectoriales normados de dimensión finita y $f : V \to W$ una función continua. Entonces, f es propia si y sólo si para toda sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en V tal que $\|x_i\| \xrightarrow{i\to\infty} +\infty$ se tiene que $\|f(x_i)\| \xrightarrow{i\to+\infty} +\infty$. Esto pues los compactos de V, W son los conjuntos cerrados acotados.

Proposición 5.25. *Sean X, Y dos espacios de Hausdorff y sea $f : X \to Y$ una función continua. Si f es biyectiva y propia, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Si f es propia entonces es cerrada y luego f^{-1} es una función continua. □

Ejemplo 5.26. En el contexto de la Proposición anterior, si asumimos que X, Y son espacios localmente compactos entonces podemos dar una demostración alternativa utilizando la caracterización de funciones propias entre espacios topológicos localmente compactos. En efecto, basta mostrar que f^{-1} es continua en todo punto $y \in Y$. Sea V una vecindad compacta de y, entonces $U := f^{-1}(V)$ es una vecindad de $x := f^{-1}(y)$ puesto que f es continua, y $f^{-1}(V)$ es compacto pues f es propia. Así, $f|_U : U \to V$ es una biyección continua entre espacios compactos y por ende un homeomorfismo. Dado que U, V son vecindades de x, y respectivamente, deducimos que f^{-1} es continua en y.

Por último, cabe destacar que la noción de compacidad también es importante para dotar de una topología natural al conjunto de funciones continuas entre espacios topológicos.

Definición 5.27. Sean X, Y dos espacios topológicos, donde X es localmente compacto[4]. Consideremos el conjunto

$$\mathscr{C}(X, Y) = \{f : X \to Y \text{ función continua}\}.$$

La **topología compacta-abierta** en $\mathscr{C}(X, Y)$ es la topología generada por los subconjuntos de la forma

$$V(K, U) := \{f \in \mathscr{C}(X, Y),\ f(K) \subseteq U\},$$

donde $K \subseteq X$ es un compacto y $U \subseteq Y$ es un abierto. Salvo mención explícita de lo contrario, el conjunto $\mathscr{C}(X, Y)$ siempre será dotado de esta topología.

[4]En estricto rigor, no es necesario que X sea localmente compacto para definir esta topología, pero la hipótesis de compacidad local en X hace que tenga muchos conjuntos compactos y por ende que la topología sea más interesante

Ejercicio 5.28. Sean X, Y dos espacios topológicos, donde X es localmente compacto.

1. Probar que la función evaluación
$$\mathrm{ev} : \mathscr{C}(X, Y) \times X \to Y,\ (f, x) \mapsto f(x)$$
es continua.

2. Sea Z un espacio topológico. Probar que la función
$$\mathscr{C}(Z \times X, Y) \longrightarrow \mathscr{C}(Z, \mathscr{C}(X, Y)),\ f \longmapsto \{z \mapsto f_z : x \mapsto f(z, x)\}$$
es una biyección.

3. Probar que la topología compacta-abierta en $\mathscr{C}(X, Y)$ es la única topología en este conjunto tal que para todo espacio topológico Z la función $\mathscr{C}(Z \times X, Y) \to \mathscr{C}(Z, \mathscr{C}(X, Y))$ definida en (2) es una biyección.

4. Probar que si Y es de Hausdorff entonces $\mathscr{C}(X, Y)$ también lo es.

6. Ejercicios adicionales

Ejercicio 6.1. Sean X, Y espacios topológicos.

1. Probar que X es Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X,\ x = y\}$ es cerrada en $X \times X$.

2. Probar que si $f, g : X \to Y$ son funciones continuas y si Y es Hausdorff, entonces $\{x \in X,\ f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

3. Probar que si $f, g : X \to Y$ son funciones continuas, donde Y es Hausdorff, tales que f y g coinciden en un subconjunto denso de X, entonces $f = g$.

Ejercicio 6.2. Decimos que un espacio topológico X es **normal** si es Hausdorff y si para todo par de cerrados $F, F' \subseteq X$ disjuntos existen abiertos disjuntos U, U' de X tales que $F \subseteq U$ y $F' \subseteq U'$.

1. Probar que un espacio topológico compacto es normal.

2. Sea X un espacio topológico normal. Probar que si $F \subseteq X$ es un cerrado y $U \subseteq X$ es un abierto tal que $F \subseteq U$, entonces existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

3. Sea X un espacio topológico normal y sea $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X tal que la proyección canónica $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ es una función cerrada. Probar que $X/\mathscr{R}$ es normal (luego, Hausdorff).

4. Sea X un espacio topológico compacto y sea $\mathscr{R}$ una relación de equivalencia en X tal que la proyección canónica $\pi : X \to X/\mathscr{R}$ es una función cerrada. Probar que $X/\mathscr{R}$ es compacto.

5. Probar que la unión disjunta de espacios topológicos normales es normal.

6. Sea X un espacio topológico compacto y sea $\mathscr{R} \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia que es cerrada como subconjunto de $X \times X$. Probar que $X/\mathscr{R}$ es compacto.

7. Sean X, Y espacios topológicos normales, $A \subseteq X$ un cerrado y $f : A \to Y$ una función continua. Probar que $X \cup_f Y$ es normal (luego, Hausdorff). Deducir que $X/\langle A\rangle$ es normal. Si además X, Y son compactos, probar que $X \cup_f Y$ es compacto.

8. Probar que si X es un espacio topológico de Hausdorff (resp. normal) entonces tanto el cono CX como la suspensión SX son de Hausdorff (resp. normales).

Ejercicio 6.3. Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ fijo, y denotemos por $\|\cdot\|$ la norma euclideana estandar sobre $\mathbb{R}^n$. En lo que sigue, denotamos por $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \leq 1\}$ y $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ \|x\| = 1\}$ la bola cerrada de dimensión n y la esfera de dimensión n, respectivamente. Además, identificamos a $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ mediante $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\mathrm{Re}(z_1), \dots, \mathrm{Re}(z_n), \mathrm{Im}(z_1), \dots, \mathrm{Im}(z_n))$, y $\mathbb{R}^n$ con el hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. En $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, definimos la relación de equivalencia $x \sim_1 \lambda x$ para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En $\mathbb{S}^n$, definimos la relación de equivalencia $x \sim_2 \pm x$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$. En $\mathbb{B}^n$, definimos $\sim_3$ como la relación de equivalencia generada por $x \sim -x$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}^n$. Probar que la inclusión $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y la función $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - \sum x_i^2})$ inducen homeomorfismos $\mathbb{S}^n / \sim_2 \cong (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1$ y $\mathbb{B}^n / \sim_3 \cong \mathbb{S}^n / \sim_2$. Probar que dichos espacios son compactos. El espacio cociente $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1$ se llama el **espacio proyectivo real** de dimensión n y se denota $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ o $\mathbb{RP}^n$, donde usualmente se denota por $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ a la clase de equivalencia de $(x_1, \ldots, x_{n+1})$.

2. En $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, definimos la relación de equivalencia $x \sim_1 \lambda x$ para todo $x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ y todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En $\mathbb{S}^{2n+1}$, definimos la relación de equivalencia $x \sim_2 lambdax$ para todo $x \in \mathbb{S}^{2n+1}$ y todo $\lambda \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Probar que la inclusión $\mathbb{S}^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ induce un homeomorfismo $\mathbb{S}^{2n+1} / \sim_2 \cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1$, y probar que dichos espacios son compactos. El espacio cociente $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1$ se llama el **espacio proyectivo complejo** de dimensión n y se denota $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ o $\mathbb{CP}^n$, donde usualmente se denota por $[z_1, \ldots, z_{n+1}]$ a la clase de equivalencia de $(z_1, \ldots, z_{n+1})$.

3. Probar que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ es homeomorfo a la compactificación de Alexandrov de $\mathbb{R}$ (y luego a $\mathbb{S}^1$) mediante la función $[x, y] \mapsto x/y$ si $y \neq 0$ y $[x, 0] \mapsto \infty$. Probar que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es homeomorfo a la compactificación de Alexandrov de $\mathbb{C}$ (y luego a $\mathbb{S}^2$) mediante la función $[w, z] \mapsto w/z$ si $z \neq 0$ y $[w, 0] \mapsto \infty$.

4. Si $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ es la proyección canónica $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_1, \ldots, x_n]$, probar que la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{B}^n \coprod \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n &\mapsto [x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - \sum x_i^2}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \\ [x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) &\mapsto [x_1, \ldots, x_n, 0] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

induce un homeomorfismo $\mathbb{B}^n \cup_f \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

5. De manera análoga, si $f : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ es la proyección canónica $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto [z_1, \ldots, z_n]$, probar que la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{B}^{2n} \coprod \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) &\to \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{B}^{2n} &\mapsto [z_1, \ldots, z_n, \sqrt{1 - \sum |z_i|^2}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ [z_1, \ldots, z_n] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) &\mapsto [z_1, \ldots, z_n, 0] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

induce un homeomorfismo $\mathbb{B}^{2n} \cup_f \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Ejercicio 6.4. Un espacio topológico es **separable** si posee un subconjunto denso numerable.

1. Probar que un espacio metrizable compacto es separable.

2. Si X es un espacio separable, probar que todo abierto del producto $X^{\mathbb{N}}$ es unión numerable de abiertos elementales.

Ejercicio 6.5.* Un espacio topológico es **totalmente disconexo** si todo punto posee un sistema fundamental de vecindades que son a la vez abiertas y cerradas. Probar que todo espacio topológico no-vacío metrizable, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados es homeomorfo al conjunto 3-ádico de Cantor (ver Ejercicio 2.17).

Ejercicio 6.6. Sea A un conjunto. Si dotamos a $\{0, 1\}$ de la topología discreta, probar que $\{0, 1\}^A$ es un espacio totalmente disconexo sin puntos aislados. Probar que $\{0, 1\}^A$ es separable si y sólo si A es finito o numerable.

Índice alfabético