Tarea 6 – Topología

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Sebastián Fuentes

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega:[1] Hasta el Miércoles 19 de Junio de 2024 a las 23h59.

Esta Tarea debe ser realizada **individualmente**.

Problema 1

Recordemos que para un espacio topológico X con a lo más finitos grupos de homología no-nulos y donde cada grupo de homología es finitamente generado[2] se define la **característica de Euler-Poincaré** como

$$\chi(X) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rango} H_i(X).$$

Considere en lo que sigue un CW-complejo X conexo por caminos de dimensión 4 con

- dos 0-células.
- cuatro 2-células.
- cero 3-células.
- cinco 4-células.

Si además se sabe que $H_1(X) = \{0\}$ y que $\chi(X) = 8$, determine los grupos $H_i(X)$ para todo $0 \geq 1$.

Problema 2

Probar, usando el isomorfismo entre homología singular y homología simplicial, que si

$$f : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n,\ (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1})$$

es la reflexión en la última coordenada, entonces $\deg(f) = -1$. Usar lo anterior para calcular el grado de $a : \mathbf{S}^n \to \mathbf{S}^n,\ x \mapsto -x$ y deducir que si n es **par** entonces a **no es** homotópicamente equivalente a $\mathrm{Id}_{\mathbf{S}^n}$.

Indicación: Para calcular $\deg(f) = -1$ *usando homología simplicial, se recomienda considerar la estructura de* Δ*-complejo más simple posible en la esfera (cf. Tarea 5, Problema 1).*

Problema 3

Probar que los grupos de homología del toro real 3-dimensional $\mathbf{T}^3 := \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ satisfacen

$$H_0(\mathbf{T}^3) \cong H_3(\mathbf{T}^3) \cong \mathbf{Z} \text{ y } H_1(\mathbf{T}^3) \cong H_2(\mathbf{T}^3) \cong \mathbf{Z}^3.$$

Indicación: Considere la sucesión de Mayer-Vietoris asociada a los conjuntos $A = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times A'$ y $B = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times B'$ donde $A', B' \subseteq \mathbf{S}^1$ son abiertos homeomorfos a un intervalo real, su unión es $\mathbf{S}^1$ y su intersección es homeomorfa a la unión disjunta de dos intervalos.

Problema 4

Calcular los grupos de homología del espacio topológico $X = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \subset \mathbb{R}^3$, donde

- $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
- $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ (x-5)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
- $C_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3,\ z = 1\}$,
- $C_4 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\ z = -1\}$.

[1] Factor de retraso: 0.7 por 1 día de retraso, 0.55 por 2 días de retraso, 0.01 por 3 días de retraso.

[2] Por un teorema famoso de Kirby, esto ocurre si X es homotópicamente equivalente a una variedad topológica compacta.