Tarea 5 – Topología

Profesor: Pedro Montero, Ayudante: Sebastián Fuentes

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

Fecha de entrega:[1] Hasta el Miércoles 5 de Junio de 2024 a las 23h59.

Esta Tarea debe ser realizada **individualmente**.

Problema 1

Dotar a $\mathbf{S}^n$ de una estructura de Δ-complejo. Calcular todos los grupos de homología simplicial de $\mathbf{S}^2$.

Problema 2

Sea X un espacio topológico. La **suspención de** X es el espacio cociente[2] $SX := (X \times [-1,1])/\sim$ donde $(x,1) \sim (x',1)$ y $(x,-1) \sim (x',-1)$ para todos $x, x' \in X$. Pruebe (e.g. usando excisión) que si X es un espacio topológico arco-conexo entonces $H_{n+1}(SX) \cong H_n(X)$ para todo $n \geq 1$.

Problema 3

Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ un subespacio no-vacío. Demuestre que el morfismo de conexión $\delta_n : H_n(X,A) \to H_{n-1}(A)$ en la sucesión exacta larga de homología asociada al par (X,A) está dado precisamente por la fórmula $\delta_n([\alpha]) = [\partial_n(\alpha)]$.

Problema 4

Dada una sucesión exacta de grupos abelianos $A \to B \to C \to D \to E$, demuestre que $C = 0$ si y sólo si se cumple simultáneamente que $A \to B$ es sobreyectivo y $D \to E$ es inyectivo. Deducir que para X espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio no-vacío, la inclusión $A \hookrightarrow X$ induce isomorfismos en todos los grupos de homología si y sólo si $H_n(X,A) = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

[1] Factor de retraso: 0.7 por 1 día de retraso, 0.55 por 2 días de retraso, 0.01 por 3 días de retraso.

[2] Ver también la §3.2 aquí.