

## PAUTA AYUDANTÍA 6 TOPOLOGÍA

### TEOREMA DE SEIFERT-VAN KAMPEN

29 DE ABRIL DE 2024

**Problema 1.** Considere  $n \geq 3$  y  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  conjunto finito. Muestre que  $\mathbb{R}^n \setminus X$  es simplemente conexo.

*Demostración.* Probamos por inducción en el número de puntos de  $X$ . Si  $X = \{x\}$  es un punto, entonces  $\mathbb{R}^n \setminus X \cong \mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty)$  y se tiene el resultado notando que hay una homotopía  $\mathbb{S}^{n-1} \times (0, \infty) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ . Supongamos que  $|X| = k$  y que  $\mathbb{R}^n \setminus Y$  es simplemente conexo para todo  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $|Y| < k$ . Considerar un índice  $1 \leq j \leq n$  tal que existan  $x, y \in X$  cuyas coordenadas  $j$ -ésimas  $x_j \neq y_j$  sean distintas. Dado que hay solo finitos puntos en  $X$ , podemos fijar  $x \in X$  y considerar que el punto  $y \in X$  es tal que  $x_j > y_j$  y que su coordenada  $j$ -ésima es la más grande entre todos los puntos en  $X$  cuya coordenada  $j$ -ésima es menor que  $x_j$ , i.e., si  $z \in X$  es tal que  $x_j > z_j$  entonces  $y_j \geq z_j$ .

Considerar  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  tal que  $y_j < y_j + \varepsilon < x_j - \varepsilon < x_j$  y definamos los abiertos  $U = \{z \in \mathbb{R}^n | z_j > y_j + \varepsilon\}$  y  $V = \{z \in \mathbb{R}^n | z_j > x_j - \varepsilon\}$ . Así,  $U \cap X \neq \emptyset$  y  $V \cap X \neq \emptyset$  pero  $U \cap V \cap X = \emptyset$ . Considerar  $|U \cap X| = k_1, |V \cap X| = k_2$ . Tenemos la descomposición  $\mathbb{R}^n \setminus X = U' \cup V'$  donde

$$U' := U \setminus (U \cap X), \quad V' := V \setminus (V \cap X)$$

Además notemos que

$$U' \cap V' = U \cap V \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) = U \cap V$$

y  $U \cap V = (y_j + \varepsilon, x_j - \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^n$  es simplemente conexo. Así, el Teorema de Seifert-Van Kampen nos dice que

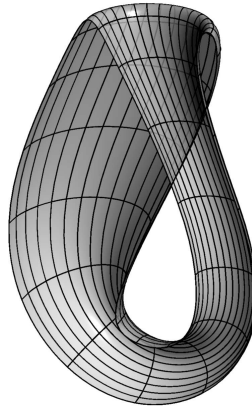
$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus X) = \pi_1(U') * \pi_1(V')$$

y de hecho  $U' \cong \mathbb{R}^n \setminus Y_1, V' \cong \mathbb{R}^n \setminus Y_2$  donde  $Y_1, Y_2$  son conjuntos de  $k_1, k_2$  puntos respectivamente. Así, por hipótesis de inducción

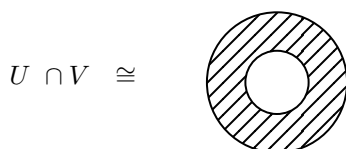
$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus X) = \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus Y_1) * \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus Y_2) = \{0\}$$

□

**Problema 2** (Botella de Klein). Considere la botella de Klein  $K$ , definida como  $K := [0, 1]^2 / \sim$  donde  $\sim$  es generada por  $(0, y) \sim (1, y)$  y  $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$  para  $0 \leq x, y \leq 1$ . Calcule el grupo fundamental de  $K$ .



*Demostración.* En el cuadrado  $[0, 1]^2$  considerar el punto  $p = (0, 0) \in [0, 1]^2$  y los abiertos  $U = [0, 1]^2 \setminus \{p\}$ ,  $V = B(p, \varepsilon)$  para un cierto  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(p, \varepsilon) \subseteq (0, 1)^2$ . Entonces  $U \cap V = B(p, \varepsilon) \setminus \{p\} \cong \mathbb{S}^1$  (es una bola agujerada),  $V \simeq \{p\}$  y por el mismo argumento visto en el Problema 4 Ayudantía 3, si denotamos por  $\bar{U}$  la imagen en el cociente del abierto  $U$  entonces  $\bar{U} \cong \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ . Note que los abiertos  $V, U \cap V$  bajan de manera intacta al cociente pues no intersectan el borde.



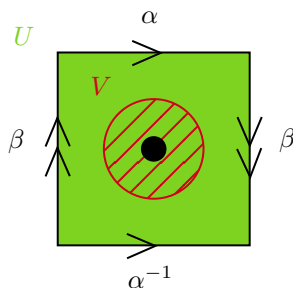
Tenemos entonces que  $\pi_1(\bar{U}) \cong \langle \alpha, \beta \rangle$  es el grupo libre de dos generadores, mientras que  $\pi_1(V) \cong \{1\}$  y  $\pi_1(U \cap V) \cong \langle \gamma \rangle$  es el grupo libre de un generador. El Teorema de Seifert-van Kampen nos da entonces un isomorfismo

$$\pi_1(K, x) \cong \pi_1(\bar{U}, x) *_{\pi_1(\bar{U} \cap V, x)} \pi_1(V, x)$$

donde  $x \in U \cap V$  es cualquier punto en la intersección. Necesitamos entonces entender las relaciones amalgamadas en este contexto. Dado que  $V$  es simplemente conexo consideramos únicamente la inclusión  $i_* : \pi_1(\bar{U} \cap V, x) \hookrightarrow \pi_1(\bar{U}, x)$ , y tenemos que

$$\pi_1(K, x) \cong \langle \alpha, \beta | i_*(\gamma) = 1, \gamma \in \pi_1(\bar{U} \cap V, x) \rangle = \langle \alpha, \beta | \alpha\beta\alpha^{-1}\beta = 1 \rangle$$

donde la relación se deduce del hecho que el generador de  $\pi_1(\bar{U} \cap V, x)$  es dar una vuelta, y al retractar este lazo al borde genera el lazo  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta$ . Esto se puede observar en la siguiente imagen:



□

**Problema 3.** (Grupo fundamental de un bouquet de espacios). Decimos que un espacio basado  $(X, x)$  es correctamente basado si  $\{x\}$  admite una vecindad abierta la cual se retracta por deformación fuerte en  $\{x\}$ . Considere  $(X_1, x_1), \dots, (X_n, x_n)$  espacios correctamente basados.

1. Pruebe que si  $X = \bigvee_{i=1}^n (X_i, x_i)$  es el bouquet de espacios y  $x$  es el punto de pegado, entonces  $(X, x)$  es correctamente basado.
2. Demuestre que

$$\pi_1 \left( \bigvee_{i=1}^n (X_i, x_i), x \right) \cong \pi_1(X_1, x_1) * \dots * \pi_1(X_n, x_n)$$

donde  $x \in \bigvee_{i=1}^n (X_i, x_i)$  denota el punto de pegado.

*Demostración.*

1. Para cada  $1 \leq i \leq n$  consideramos una vecindad  $x_i \in U_i \subseteq X_i$  que admita un retracto de deformación a  $\{x_i\}$ , y consideramos  $H_i : U_i \times I \rightarrow U_i$  homotopía asociada a cada retracto de deformación. Podemos definir entonces un mapeo  $H : \prod_i U_i \times I \rightarrow \prod_i U_i$  definiendo  $H = H_i$  en cada  $U_i \times I$ . Notar que por construcción  $\bigcup_i U_i$  es un abierto saturado para la proyección  $\pi : \bigcup_i U_i \rightarrow U$  donde  $x \in U \subseteq X$  es un abierto de  $x$ . Así,  $\pi \circ H : \prod_i U_i \times I \rightarrow U$  respeta la identificación (i.e., es constante en cada clase de equivalencia), y por tanto baja al cociente obteniendo un retracto de deformación de  $U$  en  $\{x\}$ . Para ver que  $\{x\}$  es cerrado en  $X$  basta notar que  $\pi^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_n\}$  el cual es cerrado por hipótesis.

2. Demostraremos esto para  $n = 2$  y luego procederemos por inducción. Consideremos vecindades  $x_i \in W_i \subseteq X_i$  que se retracten por deformación en cada  $\{x_i\}$ . Definamos

$$U := \pi(X_1 \amalg W_2), \quad V := \pi(W_1 \amalg X_2)$$

donde  $\pi : X_1 \amalg X_2 \rightarrow X_1 \vee X_2$  es la proyección al cociente. Los conjuntos  $X_1 \amalg W_2, W_1 \amalg X_2$  son abiertos saturados tenemos que  $U, V$  son abiertos de  $X_1 \vee X_2$ . Notemos que el punto anterior implica que  $U \cap V$  es un retracto de deformación de  $\{x\}$ . Veamos que las inclusiones  $X_1 \hookrightarrow U, X_2 \hookrightarrow V$  son también retratos de deformación. Para  $U$  podemos escoger un retracto de deformación  $H_2 : W_2 \times I \rightarrow W_2$  de  $W_2$  en  $\{x_2\}$  y definir  $H : (X_1 \amalg W_2) \times I \rightarrow X_1 \amalg W_2$  como la identidad en  $X_1 \times I$  y como  $H_2$  en  $W_2 \times I$ . Similar al punto anterior, notando que  $\pi \circ H_2$  respeta la identificación baja al cociente obteniendo un retracto por deformación de  $U$  en  $X_1$ . El mismo argumento vale para  $V$ , y todo lo dicho nos entrega equivalencias homotópicas

$$U \simeq X_1, \quad V \simeq X_2, \quad U \cap V \simeq \{x\}$$

El Teorema de Seifert-van Kampen nos permite afirmar que

$$\pi_1(X_1 \vee X_2, x) \cong \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x) \cong \pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2)$$

lo cual demuestra el caso  $n = 2$ . El caso general es inmediato pues el punto 1. implica que la hipótesis se verifica para  $X_1$  y  $X_2 \vee \cdots \vee X_n$ .

3. De acuerdo a la propiedad demostrada anteriormente basta considerar  $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \vee \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

□