# MAT235: "Análisis Complejo"

En este curso, nos interesamos en funciones

$$f : \underset{\text{abierto}}{\Omega \subseteq} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto f(z)$$

y especialmente en funciones holomorfas:

$\forall z_0 \in \Omega$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $D(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega$ y
$f$ derivable en $D(z_0, \varepsilon)$.

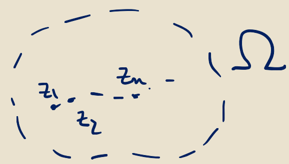
$\rightsquigarrow f \in \mathcal{O}(\Omega) \longrightarrow$ "olomorfico" (en italiano)

## (I) Funciones holomorfas e Integración:

$\rightsquigarrow$ Las funciones holomorfas cumplen propiedades impresionantes!

Eg. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ entonces:

- $f$ es $\mathcal{C}^\infty$ ! Mejor aún, son analíticas (ie, convergen a su serie de Taylor) $\rightarrow$ Falso en $\mathbb{R}$! Eg. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
  es $\mathcal{C}^\infty$ y $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
- Si $|f|$ acotada en $\mathbb{C} \Rightarrow f$ constante ($\rightsquigarrow$ cf. $f(x) = \sin(x)$ en $\mathbb{R}$)
- Si $\Omega$ abierto conexo $\Rightarrow f$ es abierta (ie, $\forall\, \mathcal{U} \subseteq \Omega$ abierto se tiene que $f(\mathcal{U})$ abierto).
- Si $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $\exists\, \{z_n\}_{n \geq 0} \subseteq \Omega \leftarrow$ abierto conexo sucesión no-constante tq $f(z_n) = g(z_n)\ \forall n \geq 0 \Rightarrow f \equiv g$ en $\Omega$.



etc!

## (II) Funciones meromorfas y Residuos:

$\rightsquigarrow$ Relajar la definición de función holomorfa y permitirles no estar definidas en algunos puntos

$\Rightarrow$ Cálculos de Integrales impropias! Eg. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$.

## (III) Introducción al Análisis de Fourier:

$\rightsquigarrow f(x) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx \leftarrow$ ¿Bien definida? ¿Cómo calcular?

$\hookrightarrow$ Veremos algunas aplicaciones a EDP y Teo. de Probabilidades.