§36. Índices y Teorema de Residuos generalizado

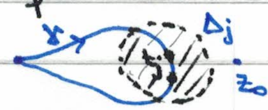
En esta sección consideraremos 1-ciclos $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$, donde podemos asumir que los γ_j son distintos y que sólo escribimos los $m_j \neq 0$. En tal caso, se define el soporte de $[\gamma]$ como $\mathrm{Supp}([\gamma]) := \bigcup \mathrm{Im}(\gamma_j)$.

Teorema y Definición: Sea $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$ un 1-ciclo en $\mathbb{C}$, y sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}([\gamma])$. Definimos el índice de $[\gamma]$ respecto a z_0 como

$$\mathrm{Ind}([\gamma], z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{[\gamma]} \frac{1}{z - z_0}\, dz$$

Más aún, $\mathrm{Ind}([\gamma], z_0) \in \mathbb{Z}$ y representa el "nº de vueltas" al rededor de z_0 (contadas con multiplicidad m_j y con signos determinados por el sentido de la rotación en torno a z_0).

Dem: Sup. primero que $[\gamma]$ está dado por un único camino cerrado $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, con $\gamma(0) = \gamma(1)$. Sea $\delta := \mathrm{dist}(z_0, \mathrm{Im}(\gamma)) > 0$, y notar que la continuidad uniforme de γ en el compacto $[0,1]$ implica que existe una subdivisión $0 =: t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ tal que



$\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subseteq D(\gamma(t_j), \delta) =: \Delta_j$. Ejercicio

Notar que si $z_1 \in D_j$, entonces para todo $z \in D_j \Rightarrow (z - z_0)/(z_1 - z_0) \notin \mathbb{R}^{\leq 0}$

Luego, $F(z) := \mathrm{Ln}((z - z_0)/(z_1 - z_0)) \in \mathcal{O}(D_j)$ es una primitiva de $f(z) = 1/(z - z_0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} \frac{1}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Ln}\left(\frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0}\right)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \frac{-i}{2\pi} \ln\left|\frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0}\right| + \frac{1}{2\pi} \mathrm{Arg}\left(\frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0}\right)$$

Dado que $\mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2) = \mathrm{Ln}(z_1 z_2) \mod 2\pi i \mathbb{Z}$, obtenemos al sumar:

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Ln}\left(\frac{\gamma(1) - z_0}{\gamma(0) - z_0}\right) \mod \mathbb{Z}$$

Dado que $\gamma(0) = \gamma(1)$, se tiene $\frac{\gamma(1) - z_0}{\gamma(0) - z_0} = 1$ y luego $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.

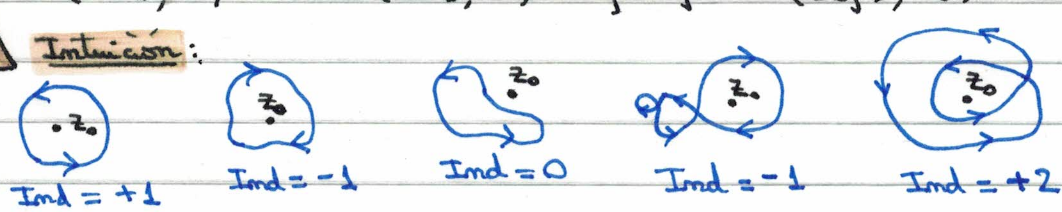
Más aún, el cálculo anterior muestra que:

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{Arg}\left(\frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0}\right)$$

En el caso general $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$, sabemos que $[\gamma] - [\hat{\gamma}] = \partial[\sigma]$, donde $[\hat{\gamma}] = \sum \hat{m}_j [\hat{\gamma}_j]$ es una suma de caminos cerrados $\hat{\gamma}_j$ y luego

$\mathrm{Ind}([\gamma], z_0) = \mathrm{Ind}([\hat{\gamma}], z_0) = \sum_j \hat{m}_j \mathrm{Ind}([\hat{\gamma}_j], z_0) \in \mathbb{Z}$ ■

⚠ **Intuición:**



Obs: ① La 1-forma $\omega = \frac{1}{z-z_0}\,dz$ es cerrada en $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.
Luego, si $[\gamma_1]-[\gamma_2] = \partial[\sigma]$ en $C_1(\Omega,\mathbb{Z})$ entonces

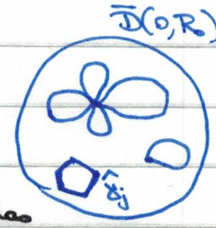
$$\mathrm{Ind}([\gamma_1],z_0) = \mathrm{Ind}([\gamma_2],z_0)$$

En part, si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ homotópicamente equiv. entonces $\mathrm{Ind}(\gamma_1,z_0) = \mathrm{Ind}(\gamma_2,z_0)$.
② El Teorema de los Residuos aplicado a $\omega = \frac{1}{z-z_0}\,dz$ y K compacto con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos, implica que

$$\mathrm{Ind}(\partial K,z_0)=0 \text{ si } z_0\in\Omega\setminus K \quad \text{y} \quad \mathrm{Ind}(\partial K,z_0)=1 \text{ si } z_0\in \mathrm{Int}(K).$$

Prop: Sea $[\gamma]$ un 1-ciclo en $\mathbb{C}$, y sean $z_0, z_1 \in \mathbb{C}\setminus\mathrm{Supp}([\gamma])$.
① Si z_0 y z_1 están en la misma componente conexa, entonces $\mathrm{Ind}([\gamma],z_0) = \mathrm{Ind}([\gamma],z_1)$.
② Si z_0 está en la componente conexa no-acotada de $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Supp}([\gamma])$, entonces $\mathrm{Ind}([\gamma],z_0)=0$.

Dem: La función $w \mapsto \mathrm{Ind}([\gamma],w) \overset{\text{dy}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{[\gamma]}\frac{1}{z-w}\,dz$ es holomorfa (y en part. continua) en $\Omega = \mathbb{C}\setminus\mathrm{Supp}([\gamma])$. Como ella toma valores enteros, es necesariamente constante en cada comp. conexa Ω_j de Ω, i.e, ① ✓



Dado que $\mathrm{Supp}([\gamma])$ es compacto, está contenido en $\overline{D}(0,R_0)$ para cierto $R_0\in\mathbb{R}^{>0}$, y luego $\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,R_0)\subseteq\Omega$.
$\Rightarrow \Omega$ posee una única comp. conexa no-acotada (es aquella que contiene $\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,R_0)$, y las otras comp. conexas están contenidas en $\overline{D}(0,R_0)$) ✓

Módulo homotopía, podemos reemplazar los caminos γ_j que componen $[\gamma]$ por caminos poligonales $\hat{\gamma}_j$ contenidos en $\overline{D}(0,R_0)$, que en particular son de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y de longitud finita. Luego, $\forall w\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,R_0)$:

$$\mathrm{Ind}([\gamma],w) \overset{①}{=} \mathrm{Ind}([\hat{\gamma}],w) \quad \text{y} \quad |\mathrm{Ind}([\hat{\gamma}],w)| \underset{\text{dy}}{\leq} \frac{1}{2\pi(|w|-R_0)}\sum |m_j|\,\mathrm{long}(\hat{\gamma}_j)$$

y luego $\mathrm{Ind}([\gamma],w)\longrightarrow 0$ cuando $R_0\to+\infty$, i.e, $\mathrm{Ind}([\gamma],w)=0$ para todo w en la comp. conexa no-acotada de $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Supp}([\gamma])$ ✓ ∎

Veamos que lo anterior nos permite generalizar el Teorema de Cauchy-Goursat. Para ello, recordemos que si $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$, entonces $\int_{[\gamma]} f(z)\,dz = 0$ para todo 1-ciclo $[\gamma] = \partial[\sigma]$.
Además, recordemos que un agujero de Ω es una componente conexa acotada de $\mathbb{C}\setminus\Omega$. Con esta terminología se tiene que:

Teorema de Cauchy-Goursat generalizado: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces, para todo 1-ciclo $[\gamma]$ en Ω tal que $\mathrm{Ind}([\gamma], z_0) = 0$ para al menos un punto z_0 en cada agujero de Ω, se tiene que:

$$\int_{[\gamma]} f(z)\, dz = 0.$$

Dem: Módulo homotopía, podemos suponer que $[\gamma]$ está formado por caminos de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos, y luego $\int_{[\gamma]} f(z)\,dz = \sum m_j \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$.
Sea K compacto de borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos tal que $\mathrm{Supp}([\gamma])$ esté contenido en $\mathrm{int}(K) \subseteq \Omega$ (cf. demostración del Teo. de Cauchy-Goursat).
Si $\mathbb{C} \setminus \mathrm{int}(K)$ posee "agujeros" C_j, reemplazamos K por $K \cup \bigcup_j C_j$ y con ello podemos asumir que ninguna componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{int}(K)$ está contenida en Ω ✓

Por otra parte, la fórmula de Cauchy implica que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \quad \text{para todo } z \in \mathrm{int}(K)$$

Luego, gracias al Teorema de Fubini, deducimos que

$$\int_{[\gamma]} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} f(w) \left(\int_{[\gamma]} \frac{1}{w - z}\, dz \right) dw \overset{\text{def}}{=} \int_{\partial K} f(w)\, \mathrm{Ind}([\gamma], w)\, dw.$$

Veamos que $\mathrm{Ind}([\gamma], w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{int}(K)$ (y en part. para $w \in \partial K$): Sea C la comp. conexa de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{int}(K)$ que contiene a w. Si C es no-acotada, el resultado anterior implica que $\mathrm{Ind}([\gamma], w) = 0$ ✓ Si C es acotada, entonces (por hipótesis) $\exists\, z_0 \in C$ tal que $0 = \mathrm{Ind}([\gamma], z_0) \overset{\text{Prop}}{=} \mathrm{Ind}([\gamma], w) = 0$ ✓ ■

Una consecuencia útil de lo anterior, y de los resultados discutidos en la sección anterior, es el siguiente:

Corolario: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío sin agujeros (i.e, $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no posee componentes conexas acotadas). Entonces:

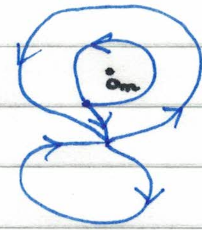
① Para todo 1-ciclo $[\gamma]$ en Ω y toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ se tiene que

$$\int_{[\gamma]} f(z)\,dz = 0.$$

② Toda función holomorfa f en Ω posee una primitiva F. Más aún, si f no se anula en Ω entonces $\exists\, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $e^g = f$ y $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $h^n = f$, con $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. ■

Teorema de Residuos generalizado: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y sea $[\gamma]$ un 1-ciclo en Ω tal que $\mathrm{Ind}([\gamma], z_0) = 0$ para al menos un punto z_0 en cada agujero de Ω. Sea $\{a_n\}_{n\geq 0}$ un conjunto de puntos aislados en Ω que no pertenecen a $\mathrm{Supp}([\gamma])$ y sea f holomorfa en $\Omega \setminus \{a_n\}_{n\geq 0}$.
Entonces:
$$\int_{[\gamma]} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a_m \in \Omega} \mathrm{Ind}([\gamma], a_m)\,\mathrm{Res}(f, a_m).$$

Dem: Como en la prueba anterior, consideramos K un compacto con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos sin agujeros en Ω y tal que $\mathrm{Supp}([\gamma]) \subseteq \mathrm{int}(K)$.
Además, podemos asumir que $\partial K \cap \{a_n\}_{n\geq 0} = \emptyset$.
Dado que $\mathrm{Ind}([\gamma], w) = 0$ si $w \notin K$ (pues ninguna componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{int}(K)$ está contenida en Ω), basta considerar las singularidades en $K \cap \{a_n\}_{n\geq 0}$ (que son finitas por hipótesis).
Sea $\Omega' := \Omega \setminus \{a_n\}_{n\geq 0}$, y notar que que el índice de $[\gamma]$ en cada a_m no es necesariamente nulo!



Sin embargo, si $\mu_m := \mathrm{Ind}([\gamma], a_m)$ y $0 < \varepsilon << 1$ es suficientemente pequeño, entonces el 1-ciclo
$$[\gamma'] := [\gamma] - \sum_{a_m \in K} \mu_m [\Gamma(a_m, \varepsilon)]$$
tiene índice 0 en cada agujero de Ω' y $f \in \mathcal{O}(\Omega')$
$\Rightarrow \int_{[\gamma']} f(z)\,dz = 0$, i.e.,
$$\int_{[\gamma]} f(z)\,dz = \sum_{a_m \in K} \mu_m \int_{[\Gamma(a_m,\varepsilon)]} f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} 2\pi i \sum_{a_m \in K} \mu_m \,\mathrm{Res}(f, a_m) \checkmark \blacksquare$$

{Cultura general} Se puede probar que si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ posee un número finito de agujeros y si $\{w_1, \ldots, w_p\}$ es un conjunto de puntos, uno en cada agujero, entonces:
$$H_1(\Omega, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^p, \quad [\gamma] \longmapsto \left(\mathrm{Ind}([\gamma], w_j)\right)_{1\leq j\leq p}$$
es un isomorfismo. En general, la topología puede ser más sofisticada cuando hay infinitos agujeros (eg. cuando Ω es el complemento del conjunto de Cantor $K \subseteq [0,1]$) y se necesitan herramientas más sofisticadas de Topología Algebraica para analizarlo!