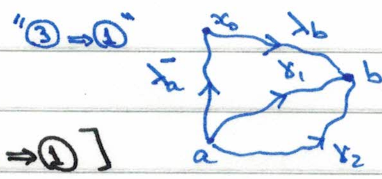
**Def/Lema**: Sea $X$ un espacio topológico conexo por caminos. Decimos que $X$ es **simplemente conexo** si verifica alguna de las condiciones equivalentes sgtes:

① Todo par de caminos con los mismos extremos son homotópicamente equiv.

② $\pi_1(X,x_0)=\{0\}$ para todo $x_0\in X$.

③ Existe $x_0\in X$ tal que $\pi_1(X,x_0)=\{0\}$.




**Ejercicio** Probar que dichas condiciones son equivalentes.
[Indicación: ① ⇒ ② ⇒ ③ por definición. Basta ver que ③ ⇒ ①]

Ejemplo: Sean $\gamma,\gamma':[0,1]\to\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ caminos en $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto no-vacío.

① Si $\Omega$ es convexo, entonces $\gamma\sim\gamma'$ y luego $\pi_1(\Omega,x_0)=\{0\}$.
En efecto, $h(u,t):=(1-u)\gamma_1(t)+u\gamma_2(t)$ es una homotopía ✓

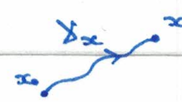
② Si $\Omega$ es un dominio estrellado resp. a $x_0\in\Omega$, entonces $\pi_1(\Omega,x_0)=\{0\}$.
En efecto, $h(u,t):=(1-u)x_0+u\gamma(t)$ es una homotopía $\gamma\sim e(t)\equiv x_0$ ✓

③ Si $\pi_1(\Omega,x_0)=\{0\}$, entonces $H_1(\Omega,\mathbb{Z})\cong\pi_1(\Omega,x_0)^{ab}=\{0\}$.

⚠ Si $n\geq 3$, existen abiertos $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ tal que $H_1(\Omega,\mathbb{Z})=\{0\}$ pero $\pi_1(\Omega,x_0)\neq\{0\}$ (cf. Conjetura de Poincaré / Teorema de Perelman ❗)

**Teorema**: Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ abierto no-vacío y sea $\omega$ una 1-forma **cerrada** en $\Omega$. Si $H_1(\Omega,\mathbb{Z})=\{0\}$, entonces $\omega$ es exacta (i.e., $\exists$ primitiva global $F\in\mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\omega=dF$).

Dem: Restringiéndonos a una componente conexa, podemos asumir que $\Omega$ es conexo (y luego conexo por caminos). Fijemos un punto base $x_0\in\Omega$:




Para todo $x\in\Omega$, fijemos un camino $\gamma_x$ uniendo $x_0$ y $x$, y sea:
$F(x):=\int_{\gamma_x}\omega$, la cual está bien definida pues dos caminos diferentes $\gamma_x$ y $\tilde{\gamma}_x$ verifican $[\gamma_x]-[\tilde{\gamma}_x]=\partial[\sigma]$, pues $H_1(\Omega,\mathbb{Z})=\{0\}$ ✓

Finalmente, eligiendo $\gamma_x$ como un camino poligonal (i.e., unión de segmentos rectos) notamos que el mismo cálculo usado para probar el Lema de Poincaré implica que $dF=\omega$ ✓ ■

Recordemos que si $\Omega \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, entonces la Ecuación de Cauchy-Riemann implica que $\omega = f(z)\,dz$ es cerrada.

**Corolario**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío tal que $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = \{0\}$. Entonces, toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ posee una primitiva $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ (ie, $F'(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega$).

**Teorema**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío tal que $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = \{0\}$, y sea $f \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ función holomorfa que no se anula en $\Omega$. Entonces:

① $\exists\, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $f = e^g$, y dos posibles $g_1, g_2$ con $e^{g_j} = f$ difieren en $2\pi i k$, con $k \in \mathbb{Z}$, en cada componente conexa de $\Omega$.

② $\forall n \geq 2$ entero, $\exists\, h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $h^n = f$, y dos posibles $h_1, h_2$ con $h_j^n = f$ cumplen $h_2(z) = \lambda h_1(z)$, con $\lambda^n = 1$, en cada comp. conexa de $\Omega$.

Dem: Para ①, notamos que el corolario anterior implica que $h := f'/f$ posee una primitiva $H \in \mathcal{O}(\Omega)$. Además, se calcula:

$$(f e^{-H})' = (f' - hf) e^{-H} \equiv 0, \quad \text{ie}, \quad f e^{-H} = c = e^{\lambda} \ \text{constante}.$$

$\Rightarrow g := H + \lambda$ verifica $e^g = f$ ✓ Por propiedades de la exponencial compleja dos soluciones $g_1$ y $g_2$ difieren por $2\pi i k$ en cada comp. conexa de $\Omega$.

② Sea $g$ tal que $e^g = f$, entonces $h := \exp(g/n)$ verifica $h^n = f$ y dicha $h$ es única módulo multiplicar por una raíz $n$-ésima de $1$ ✓ ■

**Observación útil**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío tal que $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = \{0\}$, y sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (resp. $f \in \mathcal{M}(\Omega)$) no-idénticamente nula en $\Omega$. Entonces,

$\exists\, h \in \mathcal{O}(\Omega)$ (resp. $h \in \mathcal{M}(\Omega)$) tal que $h^n = f$ si y sólo si $\operatorname{div}(f)$ es divisible por $n$ (ie, todas las mult. de ceros y polos son divisibles por $n$).

No es difícil ver que la condición de divisibilidad es necesaria ✓ Por otra parte, si $\operatorname{div}(f)$ es divisible por $n$ entonces el Teorema de Factorización de Weierstrass implica que $\exists\, g_1 \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $\operatorname{div}(g_1) = \frac{1}{n}\operatorname{div}(f)$.

$\Rightarrow h := f/g_1^n$ es una función holomorfa sin ceros ni polos!

$\Rightarrow \exists\, g_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ sin ceros ni polos tal que $g_2^n = h$, ie,

$$g_2^n = f/g_1^n \iff f = (g_1 g_2)^n \quad ✓$$