③ El Hecho ① y el Hecho ② implican que si $X = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, y si escogemos un punto $x_j$ por cada componente conexa de $X$ entonces el morfismo de grupos

$$\bigoplus_j \pi_1(X, x_j) \twoheadrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$$

es sobreyectivo.

En particular, si $X$ es conexo entonces $\pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ es sobreyectivo.

④ Por construcción, $H_1(X, \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano (ie, conmutativo). Sin embargo, existen espacios topológicos conexos tales que $\pi_1(X, x_0)$ no es abeliano (eg. $X = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$), y por ende el kernel del morfismo de grupos $\pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ es no trivial!

⑤ Dado un grupo $G$, el conmutador de $G$ es el subgrupo más pequeño $N := [G, G]$ tal que el cociente $G/[G, G] =: G^{ab}$ es abeliano.

Teorema de Hurewicz - Poincaré: Supongamos que $X$ es un espacio topológico conexo por caminos (ie, todo par de puntos puede ser conectado por un camino $\gamma : [0, 1] \to X$). Entonces,

$$\pi_1(X, x_0)^{ab} \cong H_1(X, \mathbb{Z}).$$

En otras palabras, el grupo de homología $H_1(X, \mathbb{Z})$ es la abelianización del grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$.

Obs: En particular, si $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ entonces $H_1(X, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

## §34. Dominios estrellados y Lema de Poincaré

En toda esta sección, denotamos por $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no-vacío. Recordemos que si $\omega$ es una 1-forma de clase $\mathcal{C}^1$ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces podemos escribir

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_1, \dots, x_n)\, dx_j = \sum_{j=1}^{n} f_j\, dx_j$$

En tal caso, el diferencial exterior de $\omega$ es la 2-forma diferencial

$$d\omega := \sum_{j=1}^{n} df_j \wedge dx_j \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_j = \sum_{1 \le i < j \le n} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j$$

Def: Decimos que la 1-forma $\omega$ es:

① Cerrada si $d\omega = 0$, ie, $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ para todos $1 \le i, j \le n$.

② Exacta si $\exists\, F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\omega = dF \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} dx_j$.

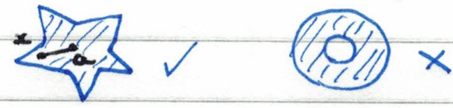
**Obs importante**: Toda 1-forma exacta es cerrada. En efecto, si $\omega = dF$ entonces $\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j \, dx_j$ con $f_j = \frac{\partial F}{\partial x_j}$. Luego, el Teorema de Schwarz implica que $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \underset{\text{Schwarz}}{=} 0$, ie, $d\omega = 0$.

El recíproco de lo anterior (¡bajo ciertas condiciones!) es un resultado clásico de Poincaré (probado por primera vez por Volterra en 1889):

**Def**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no-vacío. Decimos que $\Omega$ es un **dominio estrellado** respecto a un punto $a \in \Omega$ si para todo $x \in \Omega$ el segmento

$$[a,x] := \{ a + tx, \ t \in [0,1] \}$$

está contenido en $\Omega$.



**Lema de Poincaré**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio estrellado respecto a cierto $a \in \Omega$. Entonces, toda 1-forma cerrada en $\Omega$ es exacta (ie, si $d\omega = 0$ entonces existe $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\omega = dF$).

**Dem**: Trasladando $\Omega$ si fuera necesario, podemos asumir que $a = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Sea $F(x) := \int_{[0,x]} \omega \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} f_j(tx_1, \dots, tx_n) \, x_j \, dt$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^{n} t \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) x_j + f_i(tx_1, \dots, tx_n) \right) dt$$

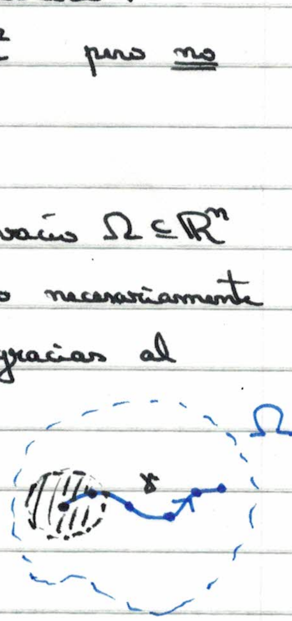
$$\overset{\boxed{d\omega = 0}}{=} \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^{n} t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_n) x_j + f_i(tx_1, \dots, tx_n) \right) dt$$

$$\overset{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{d}{dt}\left( t f_i(tx_1, \dots, tx_n) \right) dt \overset{\text{TFC}}{=} f_i(x) \quad ✓ \quad \blacksquare$$

⚠ El Lema de Poincaré **no** es válido para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario.

Por ejemplo, $\omega = \frac{dz}{z}$ es cerrada en $\Omega = \mathbb{C}^* \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ pero no es exacta (pues $\int_{\Gamma(0,1)} \omega = 2\pi i \neq 0 = \int_{\Gamma(0,1)} dF$).

**Obs útil**: Sea $\omega$ una 1-forma cerrada en un abierto no-vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario y sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ un camino continuo (¡no necesariamente de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos!) entonces podemos definir $\int_\gamma \omega$ gracias al Lema de Poincaré:



Sea $K := \gamma([0,1]) \subseteq \Omega$ compacto y sea $\delta := \text{dist}(K, \Omega^c)$

La continuidad uniforme de $\gamma$ implica que existe una subdivisión $0 =: \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N =: 1$ de $[0,1]$

tal que cada segmento $\gamma([\tau_j,\tau_{j+1}])$ está contenido en $B(\gamma(\tau_j),\delta)$, el cual es un dominio estrellado (!). Así, el lema de Poincaré implica la existencia de primitivas locales $F_j$ que permiten definir: 

$$\int_{\gamma|_{[\tau_j,\tau_{j+1}]}} \omega = \int_{\gamma|_{[\tau_j,\tau_{j+1}]}} dF_j := F_j(\gamma(\tau_{j+1})) - F_j(\gamma(\tau_j)).$$

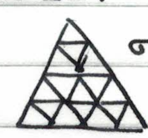
Así, definimos $\int_\gamma \omega := \sum_{j=0}^{N-1} F_j(\gamma(\tau_{j+1})) - F_j(\gamma(\tau_j))$, y esta definición es independiente de la subdivisión y de las primitivas escogidas.

Def: Sea $\omega$ una 1-forma cerrada en un abierto no-vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j] \in C_1(\Omega, \mathbb{Z})$ una 1-cadena en $\Omega$. Definimos

$$\int_{[\gamma]} \omega := \sum m_j \int_{\gamma_j} \omega.$$

Lema: Si $[\gamma] = \partial[\sigma]$ es el borde de una 2-cadena $[\sigma] \in C_2(\Omega, \mathbb{Z})$ y $\omega$ es una 1-forma cerrada en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $\int_{[\gamma]} \omega = 0$.

Dem: Basta probar el resultado cuando $[\sigma]$ es un triángulo en $\Omega$. En tal caso, podemos realizar una subdivisión en triángulos arbitrariamente pequeños $\sigma_j$ y, dado que $\int_{\partial[\sigma]} \omega = \sum_j \int_{\partial[\sigma_j]} \omega$,



$\sigma$

podemos asumir que $\sigma_j \subseteq B(x_j, \varepsilon_j)$ y que $\omega|_{B(x_j,\varepsilon_j)} = dF_j$ (Poincaré). Si $a_j, b_j, c_j \in \Omega$ son los vértices de $\sigma_j$, entonces:

$$\int_{\partial[\sigma_j]} \omega \overset{\text{def}}{=} (F_j(c_j) - F_j(b_j)) - (F_j(c_j) - F(a_j)) + (F_j(b_j) - F(a_j)) = 0 \checkmark \quad \blacksquare$$

Corolario: Sea $\omega$ una 1-forma cerrada en un abierto no-vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos homotópicamente equivalentes en $\Omega$. Entonces:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

En part, si $\gamma$ es un camino <u>cerrado</u> en $\Omega$ entonces $\int_\gamma \omega$ es independiente de la clase de $\gamma$ en $\pi_1(\Omega, x_0)$ o en $H_1(\Omega, \mathbb{Z})$.

Dem: Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ entonces $[\gamma_1] - [\gamma_2] = \partial[\sigma]$, y podemos aplicar el Lema ✓ ■

Obs: Si $\Omega \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, entonces la Ecuación de Cauchy-Riemann implica que $\omega := f(z)\,dz$ es una 1-forma cerrada, i.e., $d\omega = 0$. Por otro lado, si $K \subseteq \Omega$ es un compacto con borde $\partial K$ de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos entonces podemos triangular $K$ y notar que $[\partial K] = \partial[\sigma]$ para cierta $[\sigma] \in C_2(\Omega, \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow \int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K} f(z)\,dz = 0 \quad \text{(cf. Teorema de Cauchy-Goursat !)}$$