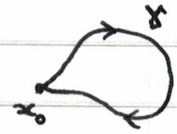
**Def:** Sea $X$ un espacio topológico y sea $x_0 \in X$ un "punto base". Definimos el **grupo fundamental** de $X$ relativo a $x_0 \in X$ como:

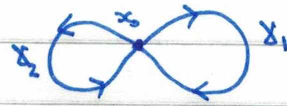
$$\pi_1(X, x_0) := \left\{ \begin{array}{l} \text{caminos } \underline{\text{cerrados}}\ \gamma : [0,1] \to X \\ \text{tales que } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \end{array} \right\} \Big/ \sim_{\text{homotopía}}$$




**Obs importante:** $\pi_1(X, x_0)$ se puede dotar naturalmente de estructura de **grupo** (que, en general, no es abeliano):

i) **Producto**: si $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X, x_0)$ se define $[\gamma_1]\cdot[\gamma_2] := [\gamma]$

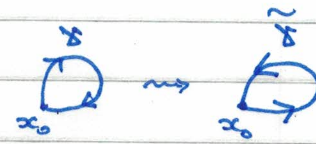
donde $\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$




ii) **Neutro**: $e(t) := x_0$ para todo $t \in [0,1]$.

iii) **Inverso**: si $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ se define $[\gamma]^{-1} := [\tilde{\gamma}]$

donde $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$




**Ejercicio** Con la notación anterior, probar que:

i) $([\gamma_1]\cdot[\gamma_2])\cdot[\gamma_3] = [\gamma_1]\cdot([\gamma_2]\cdot[\gamma_3])$ considerando las parametrizaciones


y "moviendo" $[1/4, 1/2]$ a $[1/2, 3/4]$.

ii) Probar que $[\gamma]\cdot[e] = [e]\cdot[\gamma] = [\gamma]$ en $\pi_1(X, x_0)$.

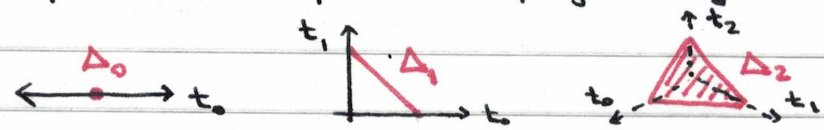
iii) Probar que $[\gamma]\cdot[\gamma]^{-1} = [\gamma]^{-1}[\gamma] = [e]$ en $\pi_1(X, x_0)$.

## §33. Homología singular

Sea $X$ un espacio topológico, que fijaremos durante toda esta sección.
La **homología** es una herramienta topológica que permite extender el concepto de camino (de dimensión real 1) a objetos de dimensión superior!

**Def:** Sea $p \in \mathbb{N}$. Definimos el **$p$-simplex** (o símplice) **estándar** como
$$\Delta_p := \{(t_0, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \text{ tq } t_j \geq 0 \text{ y } t_0 + t_1 + \dots + t_p = 1\}.$$

Ej.




etc.

**Def:** El grupo de **$p$-cadenas** (singulares) en $X$, denotado $C_p(X, \mathbb{Z})$, es el conjunto de sumas formales finitas de la forma
$$[\sigma] := \sum_{\text{finita}} m_j [\sigma_j], \quad \text{donde } m_j \in \mathbb{Z} \text{ y } \sigma_j : \Delta_p \to X \text{ continua}$$
(ie, el grupo abeliano libre generado por el conjunto $\mathcal{C}^0(\Delta_p, X)$ de funciones continuas $\Delta_p \to X$).

Ejemplos:

0) Una **0-cadena** es una suma formal finita de puntos $\sum m_j [p_j]$, $m_j \in \mathbb{Z}$.

1) Una **1-cadena** es una suma formal finita de caminos $\sum m_j [\gamma_j]$, con $m_j \in \mathbb{Z}$ y $\gamma_j : [0,1] \to X$ continua. Aquí, identificamos $\Delta_1$ con $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ mediante $t := t_1$ y $t_0 = 1-t$.

Construcción (borde): Construyamos $\partial_p : C_p(X,\mathbb{Z}) \to C_{p-1}(X,\mathbb{Z})$ de la manera siguiente.

i) Definimos $C_p(X,\mathbb{Z}) = \{0\}$ si $p<0$, y luego $\partial_p := 0$ si $p \leq 0$.

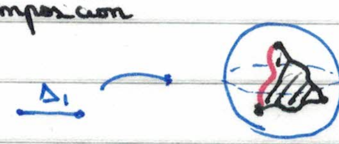
ii) Para $p>0$, definimos las funciones "cara" mediante

$$\delta_p^l : \Delta_{p-1} \to \Delta_p, \quad (t_0, t_1, \ldots, t_{p-1}) \mapsto (t_0, \ldots, t_{l-1}, 0, t_l, \ldots, t_{p-1})$$

Eg.


Más generalmente, si $\sigma_j : \Delta_p \to X$ continua, la composición

$$\sigma_j \circ \delta_p^l : \Delta_{p-1} \to X$$




es la cara de índice $l \in \{0, \ldots, p\}$ de $\sigma_j$.

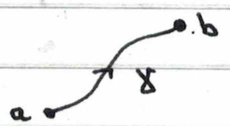
Para $\sigma_j : \Delta_p \to X$ continua, definimos $\partial_p[\sigma_j]$ como la suma alternada de sus caras:

$$\partial_p[\sigma_j] := \sum_{l=0}^{p} (-1)^l [\sigma_j \circ \delta_p^l] \in C_{p-1}(X,\mathbb{Z}).$$

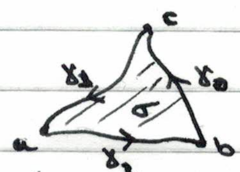
Para $[\sigma] = \sum_j m_j [\sigma_j]$ $p$-cadena arbitraria, definimos $\partial_p[\sigma] := \sum m_j \partial_p[\sigma_j]$.

⚠ La aplicación borde es $\mathbb{Z}$-lineal (ie, $\partial_p(a[\sigma] + [\tau]) = a\partial_p[\sigma] + \partial_p[\tau]$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ y $[\sigma], [\tau] \in C_p(X,\mathbb{Z})$) y cumple $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Eg.




$\partial_1[\gamma] = [b] - [a]$




$\partial_2[\sigma] = [\gamma_0] - [\gamma_1] + [\gamma_2]$

$\Rightarrow \partial_1(\partial_2[\sigma]) = \partial_1([\gamma_0] - [\gamma_1] + [\gamma_2]) = ([c] - [b]) - ([c] - [a]) + ([b] - [a]) = 0.$

**Def**: Definimos el subgrupo

i) De **$p$-ciclos** como $Z_p(X,\mathbb{Z}) := \ker \partial_p$ $(\ni [\sigma]$ si $\partial_p[\sigma] = 0)$

ii) De **$p$-bordes** como $B_p(X,\mathbb{Z}) := \operatorname{Im} \partial_{p+1}$ $(\ni [\sigma]$ si $[\sigma] = \partial_{p+1}[\tau])$

Más aún, dado que $B_p(X,\mathbb{Z}) \subseteq Z_p(X,\mathbb{Z})$ (pues $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$), se define el **$p$-ésimo grupo de homología** de $X$ como el cociente

$$\boxed{H_p(X,\mathbb{Z}) := Z_p(X,\mathbb{Z}) / B_p(X,\mathbb{Z})}$$

**Obs:** ① Un camino $\gamma : [0,1] \to X$ es un ciclo si y sólo si es un camino cerrado (ie, $\gamma(0) = \gamma(1)$), pues $\partial_1[\gamma] = [\gamma(1)] - [\gamma(0)]$.

② El camino constante $\gamma(t) = x_0$ siempre es un borde, pues $[\gamma] = \partial_2[\sigma]$ donde $\sigma : \Delta_2 \to X$, $(t_0, t_1, t_2) \mapsto \sigma(t_0,t_1,t_2) \equiv x_0$.

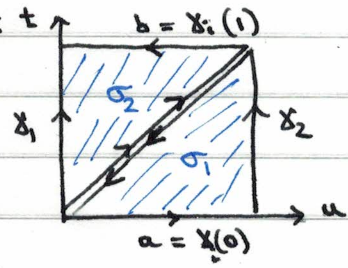
③ **Ejercicio** Sea $\gamma : [0,1] \to X$ un camino, y sea $\gamma^-(t) := \gamma(1-t)$ el camino recorrido en sentido opuesto. Probar que $[\gamma] + [\gamma^-]$ es un borde, ie, $[\gamma] + [\gamma^-] = 0 \iff [\gamma^-] = -[\gamma]$ en $H_1(X,\mathbb{Z})$.
[Indicación: Considerar $\sigma(t_0, t_1, t_2) := \gamma(t_1)$]

**Terminología:** Sean $[\gamma], [\gamma']$ dos 1-ciclos. Decimos que $[\gamma]$ y $[\gamma']$ son **homólogos** si $[\gamma] = [\gamma']$ en $H_1(X,\mathbb{Z})$, ie, $\exists$ 2-cadena $\sigma$ tq $\partial_2[\sigma] = [\gamma] - [\gamma']$. En tal caso, escribiremos $[\gamma] \sim [\gamma']$.

**Prop:** Si dos caminos $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son homotópicamente equivalentes, entonces el 1-ciclo $[\gamma_2] - [\gamma_1]$ es un borde. En part, si $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son caminos cerrados, entonces $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ en $H_1(X,\mathbb{Z})$, y luego hay un morfismo de grupos

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X,\mathbb{Z}), \quad [\gamma] \mapsto [\gamma] \qquad \text{bien definido.}$$

**Dem:**




$$\Rightarrow \partial_2([\sigma_1] + [\sigma_2]) = [\gamma_1^-] + [\gamma_2]$$
$$= [\gamma_2] - [\gamma_1] \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

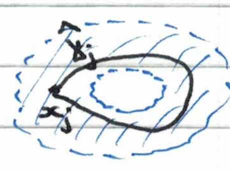
**Notación:** Si $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j] \in C_1(X,\mathbb{Z})$ es una 1-cadena (donde sólo escribimos los términos tales que $m_j \neq 0$), definimos el **soporte** de $[\gamma]$ por

$$\operatorname{Supp}([\gamma]) := \bigcup_{\gamma} \operatorname{Im}(\gamma_j)$$

**Hechos útiles** (sin demostración):

① Sea $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j] \in Z_1(X,\mathbb{Z})$ un 1-ciclo. Entonces, existe un 1-ciclo $[\hat\gamma] = \sum \hat m_j [\hat\gamma_j]$ tal que cada $\hat\gamma_j$ es un camino cerrado y tal que $[\gamma] = [\hat\gamma]$ en $H_1(X,\mathbb{Z})$ y $\operatorname{Supp}([\gamma]) = \operatorname{Supp}([\hat\gamma])$.

② Mejor aún, si $X = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y si no imponemos la condición $\operatorname{Supp}([\gamma]) = \operatorname{Supp}([\hat\gamma])$, entonces:
Podemos asumir que cada $\hat\gamma_j$ verifica $\hat\gamma_j(0) = \hat\gamma_j(1) = x_j$, donde $x_j$ es cualquier punto en la componente conexa del camino cerrado $\hat\gamma_j$.



③ El Hecho ① y el Hecho ② implican que si $X = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, y si escogemos un punto $x_j$ por cada componente conexa de $X$ entonces el morfismo de grupos

$$\bigoplus_j \pi_1(X, x_j) \twoheadrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$$

es sobreyectivo.

En particular, si $X$ es conexo entonces $\pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ es sobreyectivo.

④ Por construcción, $H_1(X, \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano (ie, conmutativo). Sin embargo, existen espacios topológicos conexos tales que $\pi_1(X, x_0)$ no es abeliano (eg. $X = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$), y por ende el kernel del morfismo de grupos $\pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ es no trivial!

⑤ Dado un grupo $G$, el conmutador de $G$ es el subgrupo más pequeño $N := [G, G]$ tal que el cociente $G/[G,G] =: G^{ab}$ es abeliano.

Teorema de Hurewicz - Poincaré: Supongamos que $X$ es un espacio topológico conexo por caminos (ie, todo par de puntos puede ser conectado por un camino $\gamma : [0,1] \to X$). Entonces,

$$\pi_1(X, x_0)^{ab} \cong H_1(X, \mathbb{Z}).$$

En otras palabras, el grupo de homología $H_1(X, \mathbb{Z})$ es la abelianización del grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$.

Obs: En particular, si $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ entonces $H_1(X, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

## §34. Dominios estrellados y lema de Poincaré

En toda esta sección, denotamos por $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no-vacío. Recordemos que si $\omega$ es una 1-forma de clase $\mathcal{C}^1$ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces podemos escribir

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n)\, dx_j = \sum_{j=1}^n f_j\, dx_j$$

En tal caso, el diferencial exterior de $\omega$ es la 2-forma diferencial

$$d\omega := \sum_{j=1}^n df_j \wedge dx_j \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_j = \sum_{1 \le i < j \le n} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j$$

Def: Decimos que la 1-forma $\omega$ es:

① Cerrada si $d\omega = 0$, ie, $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ para todos $1 \le i, j \le n$.

② Exacta si $\exists\, F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\omega = dF \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial F}{\partial x_j} dx_j$.