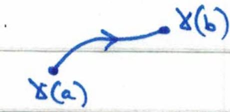
Parte IV : Tópicos Adicionales

Para finalizar el curso, discutiremos de manera introductoria sobre **propiedades topológicas globales** de las funciones holomorfas y sobre la teoría de **funciones sub-armónicas** (que pueden pensarse como el análogo complejo de las funciones convexas).

§32. Homotopía y Grupo fundamental

Sea X un espacio topológico arbitrario (ver §20, pág 49), que para efectos prácticos bastará pensar en $X = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío. Recordemos que si $a<b$ son reales, entonces un **camino** en X es una función continua

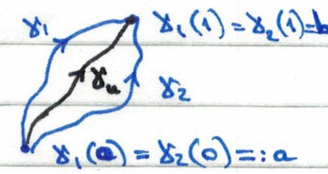
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow X \quad , \quad t \longmapsto \gamma(t)$$



Más aún, decimos que γ es un **camino cerrado** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Sin pérdida de generalidad (reparametrizando), podemos asumir que $[a,b] = [0,1]$.

Def: Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ dos caminos tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y $\gamma_1(1) = \gamma_1(1)$. Decimos que γ_1 y γ_2 son **homotópicamente equivalentes**, y escribimos $\gamma_1 \sim \gamma_2$, si existe una función continua

$$h : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \quad \text{tal que}$$



i) $h(0,t) = \gamma_1(t)$, $h(1,t) = \gamma_2(t)$ $\quad \forall t \in [0,1]$

ii) $h(u,0) = a$ y $h(u,1) = b$ $\quad \forall u \in [0,1]$

donde $a := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y $b := \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. En tal caso, decimos que h es una **homotopía** entre γ_1 y γ_2.

Obs: ① En términos prácticos, una homotopía es una "deformación continua" $\gamma_u(t) := h(u,t)$ desde γ_1 a γ_2 manteniendo los extremos fijos.

② Si $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ continua biyectiva, y $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$ es una reparametrización, entonces $h(u,t) := \gamma_1((1-u)t + u\varphi(t))$ es una homotopía ✓
Así, $\gamma_1 \sim \gamma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1 \circ \varphi$ siempre que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$.

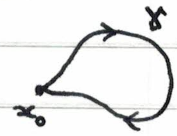
③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Demostrar que la relación de homotopía es una **relación de equivalencia**: (i) $\gamma \sim \gamma$ (reflexiva); (ii) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1$ (simétrica) y (iii) $\gamma_1 \sim \gamma_2$ y $\gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3$ (transitiva).

Indicación para (iii): Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ por h' y $\gamma_2 \sim \gamma_3$ por h'', considerar

$$h(u,t) := \begin{cases} h'(2u,t) & \text{si } u \in [0,1/2] \\ h''(2u-1,t) & \text{si } u \in [1/2,1] \end{cases}$$

Def: Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$ un "punto base". Definimos el **grupo fundamental** de X relativo a $x_0 \in X$ como:

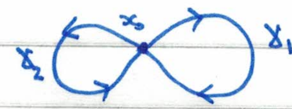
$$\pi_1(X,x_0) := \left\{ \begin{array}{l} \text{caminos } \underline{\text{cerrados}}\ \gamma : [0,1] \to X \\ \text{tales que } \gamma(0)=\gamma(1)=x_0 \end{array} \right\} \Big/ \sim_{\text{homotopía}}$$



Obs importante: $\pi_1(X,x_0)$ se puede dotar naturalmente de estructura de **grupo** (que, en general, no es abeliano):

i) **Producto**: si $[\gamma_1],[\gamma_2] \in \pi_1(X,x_0)$ se define $[\gamma_1]\cdot[\gamma_2] := [\gamma]$

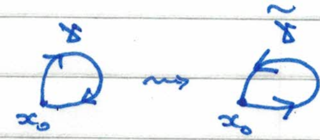
donde $\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$



ii) **Neutro**: $e(t) := x_0$ para todo $t \in [0,1]$.

iii) **Inverso**: si $[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$ se define $[\gamma]^{-1} := [\tilde{\gamma}]$

donde $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$



Ejercicio Con la notación anterior, probar que:

i) $([\gamma_1]\cdot[\gamma_2])\cdot[\gamma_3] = [\gamma_1]\cdot([\gamma_2]\cdot[\gamma_3])$ considerando las parametrizaciones

y "moviendo" $[1/4,1/2]$ a $[1/2,3/4]$.

ii) Probar que $[\gamma]\cdot[e] = [e]\cdot[\gamma] = [\gamma]$ en $\pi_1(X,x_0)$.

iii) Probar que $[\gamma]\cdot[\gamma]^{-1} = [\gamma]^{-1}[\gamma] = [e]$ en $\pi_1(X,x_0)$.

§33. Homología singular

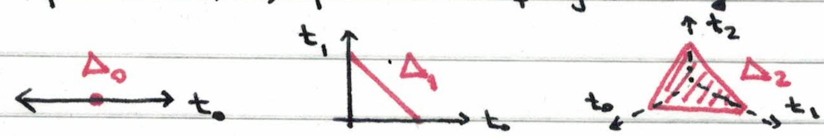
Sea X un espacio topológico, que fijaremos durante toda esta sección.

La **homología** es una herramienta topológica que permite extender el concepto de camino (de dimensión real 1) a objetos de dimensión superior!

Def: Sea $p \in \mathbb{N}$. Definimos el **p-símplex** (o símplice) **estándar** como

$$\Delta_p := \{(t_0,\dots,t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \text{ tq } t_j \geq 0 \text{ y } t_0+t_1+\dots+t_p = 1\}.$$

Ej.



etc.

Def: El grupo de **p-cadenas** (singulares) en X, denotado $C_p(X,\mathbb{Z})$, es el conjunto de sumas formales finitas de la forma

$$[\sigma] := \sum_{\text{finita}} m_j [\sigma_j] \quad , \text{ donde } m_j \in \mathbb{Z} \text{ y } \sigma_j : \Delta_p \to X \text{ continua}$$

(ie, el grupo abeliano libre generado por el conjunto $\mathcal{C}^0(\Delta_p,X)$ de funciones continuas $\Delta_p \to X$).