§31. Espacio de Schwartz y Aplicaciones a EDP

En esta sección estudiaremos el espacio de Schwartz de "funciones de decrecimiento rápido" que, a pesar de ser un poco más restrictivo que el espacio de funciones de decrecimiento moderado $M(\mathbb{R})$, tiene la ventaja de ser un espacio conveniente para realizar cálculos.

Def: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$!) función de clase $\mathcal{C}^\infty$. Decimos que f tiene decrecimiento rápido si:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < +\infty \quad \text{para todo } k, l \geq 0.$$

Denotamos por $S(\mathbb{R})$ al $\mathbb{R}$-ev de funciones de decrecimiento rápido, llamado el espacio de Schwartz de $\mathbb{R}$.

Ejemplos:

① Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $f' \in S(\mathbb{R})$. En part, $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo diferenciación (ie, $\frac{d}{dx}: S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ es un endomorfismo).

② Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $x \cdot f(x) \in S(\mathbb{R})$. En part, $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo multiplicación por polinomios (ie, $S(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}[x]$-módulo).

③ Para todo $a > 0$, la gaussiana $f(x) = e^{-ax^2}$ pertenece a $S(\mathbb{R})$.

④ Si $f(x) = e^{-|x|}$, entonces $f \in M(\mathbb{R})$ pero $f \notin S(\mathbb{R})$ (pues $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$).

Ejercicio útil Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Probar que la función bump (o función test) definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \text{ ó } x \geq b \\ e^{-1/(x-a)} e^{-1/(x-b)} & \text{si } a < x < b \end{cases}$$

pertenece a $S(\mathbb{R})$.

Obs: Si $f \in S(\mathbb{R}) \subseteq M(\mathbb{R})$, entonces

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$$

está bien definida.

⚠ En ocasiones, escribimos $\mathcal{F}[f] := \hat{f}$ para denotar la transformada de Fourier de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De manera similar, escribimos $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$ siempre que el Teorema de Inversión de Fourier sea válido (eg, si $f, \hat{f} \in M(\mathbb{R})$).

Prop: Sea $f \in S(\mathbb{R})$, entonces:

① $\mathcal{F}[f'(x)](\omega) = 2\pi i \omega \hat{f}(\omega)$.

② $\mathcal{F}[-2\pi i x f(x)](\omega) = \hat{f}'(\omega)$.

Dem: Para ①, integramos por partes

$$\int_{-N}^{N} f'(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx = \left[f(x)\, e^{-2\pi i x \omega}\right]_{-N}^{N} + 2\pi i \omega \int_{-N}^{N} f(x) e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

Dado que $f \in S(\mathbb{R}) \subseteq M(\mathbb{R})$, obtenemos la fórmula deseada cuando $N \to +\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i x \omega}\, dx = 2\pi i \omega \hat{f}(\omega) \checkmark$$

Para ②, probaremos simultáneamente que $\hat{f}$ es diferenciable y calcularemos $\hat{f}'$:

Sea $\varepsilon > 0$ y $h \in \mathbb{R}$, y definamos $g(x) := -2\pi i x f(x)$. Entonces:

$$\frac{\hat{f}(\omega+h) - \hat{f}(\omega)}{h} - \hat{g}(\omega) \underset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\omega} \left(\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right) dx$$

Como $f(x)$ y $x f(x)$ pertenecen a $S(\mathbb{R})$, $\exists N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que

$$\int_{|x|\geq N} |f(x)|\, dx \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \int_{|x|\geq N} |x||f(x)|\, dx \leq \varepsilon \checkmark$$

Además, dado que $(e^{-2\pi i x h})'(0) = -2\pi i x$, para $|x| \leq N$ (compacto) $\exists\, \delta > 0$ tq si $|h| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| \leq \frac{\varepsilon}{N}$$

Luego, para $|h| < \delta$ tenemos que

$$\left| \frac{\hat{f}(\omega+h) - \hat{f}(\omega)}{h} - \hat{g}(\omega) \right| \leq \int_{-N}^{N} |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| dx + C\varepsilon$$

$$\leq C'\varepsilon$$

$\Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f}'(\omega) = \hat{g}(\omega)$, con $g(x) = -2\pi i x f(x)$ ✓ ■

Como consecuencia de lo anterior obtenemos que la transformada de Fourier define un automorfismo del espacio de Schwartz:

Teorema: Sea $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

Dem: Notar que si $g \in S(\mathbb{R})$ entonces $\hat{g}$ es acotada (cf. Lema en §28, pág 81)

ie, $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)| < +\infty$.

Luego, si consideramos $g(x) := \frac{1}{(2\pi i)^k} \frac{d^k}{dx^k}\left((-2\pi i x)^\ell f(x) \right) \in S(\mathbb{R})$

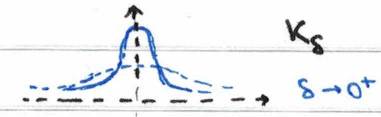
$\overset{\text{Prop}}{\Rightarrow} \hat{g}(\omega) = \omega^k \hat{f}^{(\ell)}(\omega)$ es acotada. Así, $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ ✓ ■

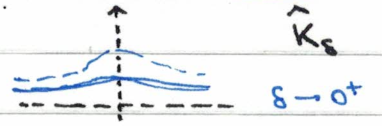
Terminología (Kernel Gaussiano):

Recordemos que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$, y que $f(x) = e^{-\pi x^2}$ es su propia transformada de Fourier, i.e., $\hat{f}(\omega) = e^{-\pi \omega^2}$.

Más generalmente, para todo $\delta > 0$ definimos el **kernel Gaussiano**

$$\boxed{K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\pi x^2/\delta}, \quad \text{con } \hat{K}_\delta(\omega) = e^{-\pi \delta \omega^2}}$$





Notar que si $\delta \to 0^+$ entonces K_δ se concentra en el origen y $\hat{K}_\delta$ tiende a aplanarse, i.e., K_δ y $\hat{K}_\delta$ no pueden concentrarse simultáneamente en el origen: la demostración matemática del "Principio de Incertidumbre de Heisenberg" se basa en esta idea!

Tal como veremos al analizar ciertas Ecuaciones en Derivadas Parciales, los "kernel" son útiles para modificar funciones mediante convolución:

Def: Sean $f, g \in S(\mathbb{R})$. Definimos su **convolución** mediante

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt.$$

En particular, $f * g = g * f$ y está bien definida (pues para $x \in \mathbb{R}$ fijo, la función $f(x-t)\,g(t)$ tiene decrecimiento rápido en t).

Prop: Sean $f, g \in S(\mathbb{R})$. Entonces:

① Se cumple la **fórmula multiplicativa**

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, g(y)\, dy$$

② $f * g \in S(\mathbb{R})$.

③ $\mathcal{F}[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega)\, \hat{g}(\omega)$

Idea de Demostración (admitiendo algunos resultados de Teoría de la Medida):

① La función $F(x,y) := f(x)\, g(y)\, e^{-2\pi i x y}$ es de decrecimiento moderado al fijar la variable x o y, $F_1(x) := \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dy$ es de decrecimiento moderado y $F_2(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dx$ también. Así, el Teorema de Fubini implica que $\int_{\mathbb{R}} F_1(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} F_2(y)\, dy$, i.e., ① ✓

② Dado que $g \in S(\mathbb{R})$, se tiene que $\forall \ell \geq 0$ se cumple (para $y \in \mathbb{R}$ fijo):

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell\, |g(x-y)| \leq A_\ell\, (1 + |y|)^\ell \quad \boxed{\text{Ejercicio}}$$

luego, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^l (f*g)(x)| \leq A_l \int_{\mathbb{R}} |f(y)| (1+|y|)^l \, dy < +\infty \quad \forall l \geq 0$.

De manera similar, el hecho que $g \in S(\mathbb{R})$ permite derivar bajo el signo integral y probar que $(f*g)^{(k)}(x) = (f*g^{(k)})(x) \ \forall k \geq 1$ y luego, como $g^{(k)} \in S(\mathbb{R})$, el cálculo anterior implica que $f*g \in S(\mathbb{R})$ ✓

Finalmente, ③ se deduce como en ① al considerar

$$F(x,y) := f(y)\, g(x-y)\, e^{-2\pi i x \omega} \quad ✓$$

■

Teorema: Sea $\delta > 0$. El kernel Gaussiano

$$K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta}$$

verifica que:

① $K_\delta(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x)\, dx = 1$.

② Para todo $\eta > 0$, $\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|\, dx \xrightarrow{\delta\to 0} 0$.

③ Para toda $f \in S(\mathbb{R})$, $(f*K_\delta)(x) \xrightarrow{\delta \to 0} f(x)$ uniformemente en x.

Dem: El hecho que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$ implica ① ✓ Para ②, notamos que

$\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|\, dx \overset{x = y\sqrt{\delta}}{=} \int_{|y|>\eta/\sqrt{\delta}} e^{-\pi y^2} dy \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ ✓

Para ③, notamos que si $f \in S(\mathbb{R})$ entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$: Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ tq $|f(x)| < \varepsilon$ si $|x| \geq R$.

Además, f es unif. continua en el compacto $[-2R, 2R]$ y luego $\exists \eta > 0$ tq si $|x|, |y| \leq 2R$ y $|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

podemos asumir $\eta \leq R$

Por otro lado, si $|x| \leq 2R$ y $|y| > 2R$ entonces si $|x-y| < \eta$:

$$|x| \geq |y| - |x-y| \geq 2R - \eta \geq R \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2\varepsilon \quad ✓$$

Similar: $|x| > 2R$ y $|y| > 2R$: $|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$ ✓

Finalmente, se tiene que:

$$(f*K_\delta)(x) - f(x) \overset{①}{=} \int_{\mathbb{R}} K_\delta(t) \left(f(x-t) - f(x)\right) dt$$

y así, dado que $K_\delta \geq 0$, tenemos

$$|(f*K_\delta)(x) - f(x)| \leq \underbrace{\int_{|t|>\eta} K_\delta(t)\, |f(x-t) - f(x)|\, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{|t|\leq\eta} K_\delta(t)\, |f(x-t) - f(x)|\, dt}_{I_2}$$

Aquí, $I_1 \xrightarrow{\delta\to 0} 0$ por ② y dado que f es acotada, y $I_2 \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ pues f uniformemente continua y $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(t)\, dt = 1$ ✓ ■

Las ideas utilizadas en el resultado anterior permiten resolver EDP al escoger "buenos kernel":

Supongamos que queremos resolver la Ecuación de Calor 1-dimensional, i.e., encontrar $u(x,t)$ tal que

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para todo } x\in\mathbb{R} \text{ y } t>0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{para todo } x\in\mathbb{R} \leftarrow \text{"Temperatura inicial"} \end{cases}$$

Al tomar transformada de Fourier, resp. a la variable x, a la Ecuación (E):

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) = (2\pi i\omega)^2\,\hat{u}(\omega,t) = -4\pi^2\omega^2\,\hat{u}(\omega,t)$$

Para ω fijo, obtenemos una EDO en la variable t de solución

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\,e^{-4\pi^2\omega^2 t}$$

donde:

i) $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$ y luego $A(\omega) = \hat{f}(\omega)$.

ii) La función $e^{-4\pi^2\omega^2 t}$ es la transformada de Fourier del kernel de Calor $H_t(x) := K_\delta(x)$ con $\delta = 4\pi t$, i.e.,

$$\boxed{H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,e^{-x^2/4t} \quad \text{y} \quad \hat{H}_t(\omega) = e^{-4\pi^2\omega^2 t}}$$

Teorema: Dada $f\in S(\mathbb{R})$, definimos $u(x,t) := (f * H_t)(x)$ $\forall t>0$. Entonces:

① La función u es de clase $\mathcal{C}^\infty$ para $x\in\mathbb{R}$ y $t>0$, y además u verifica la Ecuación de Calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

② $u(x,t) \xrightarrow{t\to 0} f(x)$ uniformemente en $x\in\mathbb{R}$.

Dem: Como $u \overset{\text{def}}{=} f * H_t$, tenemos que $\hat{u} = \hat{f}\cdot\hat{H}_t = \hat{f}(\omega)\,e^{-4\pi^2\omega^2 t}$ y luego $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\,e^{-4\pi^2 t\omega^2}\,e^{2\pi i\omega x}\,d\omega$. Así, ① se obtiene derivando dicha integral, mientras que ② es consecuencia directa del Teorema anterior dado que $\delta = 4\pi t \to 0$ cuando $t\to 0$ ✓ ■

Ejercicio* Considere la región $\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\in\mathbb{R},\ y>0\}$ y considere la Ecuación de Laplace

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x,0) = f(x) & \text{para todo } x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

① Deducir que $\hat{u}(\omega,y) = \hat{f}(\omega)\,e^{-2\pi|\omega|y}$ si $f\in S(\mathbb{R})$.

② Probar que $u(x,y) = (f * P_y)(x)$ soluciona la EDP anterior, donde $P_y(x) := \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$ es el kernel de Poisson.