En la sección anterior, probamos que si $f \in \mathcal{F}$ entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x\omega}\, d\omega \quad , \text{ donde } \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx .$$

Sin embargo, es posible probar que el Teorema de inversión de Fourier sigue valiendo si f y $\hat{f}$ son funciones de decrecimiento moderado:

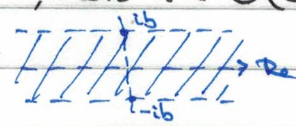
$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad |\hat{f}(\omega)| \leq \frac{A'}{1+\omega^2} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Es natural entonces preguntarse por condiciones que nos aseguren que podemos usar técnicas de análisis complejo (y no sólo análisis real):

<u>Teorema</u>: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función de decrecimiento moderado, y supongamos que existen constantes $a, A \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que

$$|\hat{f}(\omega)| \leq A\, e^{-2\pi a |\omega|} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Entonces, f es la restricción a $\mathbb{R}$ de una función $f(z)$, con $f \in \mathcal{O}(S_b)$ para todo b tal que $0 < b < a$. Aquí:



$$S_b \overset{def}{=} \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\operatorname{Im}(z)| < b \}$$

<u>Dem</u>: Para $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, se define $f_m(z) = \int_{-m}^{m} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}\, d\omega$.

Dado que $F(z,\omega) = \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}$ es continua y $F(z,\omega_0) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ para todo $\omega_0 \in [-m,m]$ fijo, tenemos que $f_m \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es <u>entera</u> $\forall m \geq 1$ ✓

Por otro lado, notamos que nuestra hipótesis sobre $\hat{f}$ implica que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}\, d\omega \right| \leq A \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi (a-b)|\omega|}\, d\omega < +\infty \quad \text{para todo } b < a$$

De manera similar, tenemos que para todo $z \in S_b$ se cumple que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}\, d\omega - f_m(z) \right| \leq A \int_{|\omega| \geq m} e^{-2\pi (a-b)|\omega|}\, d\omega \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

y por ende $f(z) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}\, d\omega$ es límite uniforme de funciones holomorfas en S_b, de donde se deduce que $f \in \mathcal{O}(S_b)$ ✓ ■

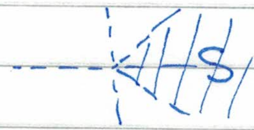
<u>Corolario</u>: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función de decrecimiento moderado, y supongamos que existen $a, A \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que $|\hat{f}(\omega)| \leq A\, e^{-2\pi a|\omega|}$ $\forall \omega \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = 0$ para todo $x \in \,]c,d[$ intervalo abierto, entonces $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}$.

<u>Dem</u>: $f \in \mathcal{O}(S_b)$ tendría ceros no-aislados $\Rightarrow f \equiv 0$ en S_b ■

Ejercicio Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función continua de soporte compacto (i.e, $\exists R\in\mathbb{R}^{>0}$ tal que $f(x)=0$ si $|x|>R$). Probar que si $\hat{f}$ también es una función de soporte compacto, entonces $f\equiv 0$ en $\mathbb{R}$.

El Teorema de Paley-Wiener da una descripción precisa del comportamiento de funciones cuya transformada de Fourier es de soporte compacto. Para ello, será necesario el siguiente refinamiento del principio del máximo a abiertos no-acotados.

Teorema de Phragmén-Lindelöf: Sea



$$S:=\{z=re^{i\theta}\in\mathbb{C}^* \text{ tq } -\tfrac{\pi}{4}<\theta<\tfrac{\pi}{4}\},$$

y sea $f\in\mathcal{O}(S)$ continua en $\overline{S}$ tal que:
① $|f(z)|\leq 1$ para todo $z\in\partial S$.
② $\exists A,B\in\mathbb{R}^{>0}$ tales que $|f(z)|\leq Ae^{B|z|}$ para todo $z\in S$.
Entonces, $|f(z)|\leq 1$ para todo $z\in S$.

Idea de demostración: La función $h_\varepsilon(z):=e^{-\varepsilon z^{3/2}}$, con $z^{3/2}:=\exp(\frac{3}{2}\ln(z))$, es holomorfa en S y continua en $\overline{S}$. Además, $|h_\varepsilon(z)|\leq 1$ $\forall z\in\overline{S}$.
La hipótesis ② implica que $f_\varepsilon(z):=f(z)\,h_\varepsilon(z)$ verifica $|f_\varepsilon(z)|\xrightarrow{|z|\to+\infty}0$ y en particular es acotada, i.e, $M:=\sup\limits_{z\in\overline{S}}|f_\varepsilon(z)|<+\infty$.
Podemos asumir que $f\not\equiv 0$ en S, i.e, $M\neq 0$. Luego, si $\{z_n\}_{n\geq 0}\subseteq\overline{S}$ es una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_\varepsilon(z_n)|=M$, entonces el hecho que $M\neq 0$ implica que $\{z_n\}_{n\geq 0}$ es acotada y luego posee un punto de acumulación z_∞ (Bolzano-Weierstrass), con $z_\infty\in\overline{S}$.
Como S es un abierto conexo, el principio del máximo implica que $z_\infty\in\partial S$ y por ende $M\overset{\text{def}}{=}|f_\varepsilon(z_\infty)|=|f(z_\infty)|\,|h_\varepsilon(z_\infty)|\leq 1$ gracias ①.
Finalmente, notando que $h_\varepsilon(z)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}1$ $\forall z\in\overline{S}$, tenemos que $|f(z)|\leq 1$ para todo $z\in S$ ✓ ■

Obs: ① La función $f(z):=e^{z^2}$ verifica $|f(z)|=1$ $\forall z\in\partial S$, pero $e^{x^2}\longrightarrow+\infty$ si $z=x\to+\infty$ es real, i.e, la hipótesis ② es necesaria.
② Rotando S, podemos extender el Teorema de Phragmén-Lindelöf a

$$S_{\theta_0}:=\{z=re^{i\theta}\in\mathbb{C}^* \text{ tq } \theta_0<\theta<\theta_0+\tfrac{\pi}{2}\}$$

donde $\theta_0\in\mathbb{R}$ es arbitrario. En efecto, si $a:=\theta_0-\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\varphi_a:S\xrightarrow{\sim}S_{\theta_0},\quad z\longmapsto e^{ia}z$$

es un biholomorfismo ✓

Teorema de Paley – Wiener: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua con decrecimiento moderado. Entonces:

f se extiende a $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ función entera tal que $\exists\, A \in \mathbb{R}^{>0}$ de tal suerte que $|f(z)| \leq A e^{2\pi M |z|}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $\iff$ La transformada de Fourier $\hat{f}$ está soportada en el compacto $[-M, M]$.

Dem: $(\Leftarrow)$ Sup. que $\hat{f}$ está soportada en $[-M,M]$ (ie, $\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > M$) y luego tanto $\hat{f}$ como f son funciones de decrecimiento moderado

$$\Rightarrow \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega x}\, d\omega = \int_{-M}^{M} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega x}\, d\omega$$

Luego, $f(z) := \int_{-M}^{M} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}\, d\omega$ es una función entera que coincide con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuando $z = x \in \mathbb{R}$. Si $z = x + iy$, entonces $|e^{2\pi i \omega z}| = e^{-2\pi \omega y}$ y luego

$$|f(z)| \leq \int_{-M}^{M} |\hat{f}(\omega)|\, e^{-2\pi \omega y}\, d\omega \leq A e^{2\pi M |z|} \quad \text{para cierta } A \in \mathbb{R}^{>0} \quad \checkmark$$

$(\Rightarrow)$ La demostración será separada en varios pasos, donde cada uno irá debilitando las hipótesis del paso anterior:

$\boxed{\text{Paso 1}}$ Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ y supongamos que $\exists\, A' \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|f(x+iy)| \leq A' \frac{e^{2\pi M |y|}}{1+x^2} \qquad (*)$$

y veamos que $\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > M$. (Notar que $(*) \Rightarrow |f(z)| \leq A e^{2\pi M |z|}$):

Si $\omega > M$, entonces para $y > 0$ tenemos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x - iy)\, e^{-2\pi i \omega (x - iy)}\, dx$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(\omega)| \overset{(*)}{\leq} A' \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi y M} \cdot e^{-2\pi y \omega}}{1+x^2}\, dx = C e^{-2\pi y (\omega - M)} \xrightarrow{y \to +\infty} 0$$

ie, $\hat{f}(\omega) = 0$ si $\omega > M$. De manera análoga, $\hat{f}(\omega) = 0$ si $\omega < -M$ $\checkmark$

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ y supongamos que $\exists\, A \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|f(x+iy)| \leq A e^{2\pi M |y|} \qquad (**)$$

y veamos que $\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > M$ (Notar que $(*) \Rightarrow (**) \Rightarrow |f(z)| \leq A e^{2\pi M |z|}$):

Si $\omega > M$, definamos para $\varepsilon > 0$ la función

$$f_\varepsilon(z) := \frac{f(z)}{(1 + i\varepsilon z)^2}$$

donde $\dfrac{1}{|1 + i\varepsilon z|^2} = \dfrac{1}{(1 - \varepsilon y)^2 + \varepsilon^2 x^2} \leq 1$ si $y \leq 0$ y $f_\varepsilon(z) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Luego, $\hat{f}_\varepsilon(\omega) \longrightarrow \hat{f}(\omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$ puesto que:

$$|\hat{f}_\varepsilon(\omega) - \hat{f}(\omega)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon^2 x^2} \right) dx$$

$$\le \varepsilon^2 \tilde{A} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+\varepsilon^2 x^2)}\, dx \overset{\text{Ejercicio}}{=} \varepsilon^2 \tilde{A} \cdot \frac{\pi}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Sin embargo, dado que $y \le 0$, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple:

$$|f_\varepsilon(x+iy)| \le A'' \frac{e^{2\pi M |y|}}{1+x^2}$$

Paso 1 $\Rightarrow \hat{f}_\varepsilon(\omega) = 0$ si $\omega > M$ y luego, haciendo $\varepsilon \to 0$, $\hat{f}(\omega) = 0$ si $\omega > M$.
De manera análoga, considerando $y \ge 0$ y usando $1/(1-i\varepsilon z)^2$, se prueba que $\hat{f}(\omega) = 0$ si $\omega < -M$ ✓

$\boxed{\text{Paso 3}}$ Las hipótesis del Teorema implican $(\star\star)$:

Reescalando f si fuera necesario, podemos suponer que $|f(x)| \le 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (pues f posee decrecimiento moderado en $\mathbb{R}$) y que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple $|f(z)| \le e^{2\pi M |z|}$. Veamos que esto implica que

$$|f(x+iy)| \le e^{2\pi M |y|} \qquad (\star\star)$$

Para ello, consideremos la región

$$S := \{ z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^* \text{ tq } 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2} \}$$

y definamos $F(z) := f(z)\, e^{2\pi i M z}$ función entera.
Notar que $F(x) = f(x)\, e^{2\pi i M x}$ y luego $|F(x)| = |f(x)| \le 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, y del mismo modo $F(iy) = f(iy)\, e^{-2\pi M y}$ y luego $|F(iy)| \le \underbrace{e^{2\pi M y} \cdot e^{-2\pi M y}}_{=1}$
$\Rightarrow |F(z)| \le 1$ para todo $z \in \partial S$ ✓
Más aún, $|F(z)| = |f(z)|\,|e^{2\pi i M z}| \le c_1 e^{c_2 |z|}$ $\forall z \in S$ ✓
Luego, el Teorema de Phragmén-Lindelöf implica que $|F(z)| \le 1$ $\forall z \in \overline{S}$, i.e., $|f(z)|\, e^{-2\pi M y} \le 1 \iff |f(z)| \le e^{2\pi M y}$ $\forall z \in \overline{S}$.
El mismo argumento, aplicado a los otros 3 cuadrantes, implica que $|f(z)| \le e^{2\pi M |y|}$ $\forall\, z = x+iy \in \mathbb{C}$, i.e., $(\star\star)$ ✓ ■

Obs: Intercambiando los roles de f y $\hat{f}$ (eg. mediante el Teorema de Inversión de Fourier), el Teorema de Paley-Wiener señala que una función $f \in M(\mathbb{R})$ tiene soporte compacto si y sólo si $|\hat{f}(z)| \le A e^{B|z|}$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Así:

"El Teorema de Paley-Wiener caracteriza la imagen de $C_0^\infty(\mathbb{R})$, las funciones suaves de soporte compacto, al aplicar la Transformada de Fourier"