y de manera similar $|I_2| \xrightarrow{R\to+\infty} 0$. Luego, cuando $R \to +\infty$, el Teorema de Cauchy se traduce en

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x-ib)\, e^{-2\pi i (x-ib)\omega}\, dx$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{A}{1+x^2} \cdot e^{-2\pi b\omega}\, dx \leq B e^{-2\pi b \omega} \quad \text{para cierta } B \in \mathbb{R}^{>0} \checkmark$$

El caso $\omega < 0$ se prueba de manera similar cambiando K_R por el rectángulo de vértices $-R, R, -R+ib, R+ib$ ✓ ■

Obs: El Teorema anterior nos dice que si $f \in \mathcal{F}$, entonces "$\hat{f}$ decrece rápidamente cuando $|\omega| \to +\infty$". Además, mientras más podamos extender f (i.e., mientras mayor sea $a>0$) entonces tenemos un mejor decaimiento de $\hat{f}$ (i.e., mayor será b).

§29. Transformada inversa de Fourier y fórmula de Poisson

En esta sección veremos cómo recuperar una función de clase $\mathcal{F}$ a partir de su transformada de Fourier.

Lema: Sea $A \in \mathbb{R}^{>0}$ y $B \in \mathbb{R}$, entonces $\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega = \frac{1}{A+iB}$.

Dem: Como $A>0$ y $B \in \mathbb{R}$, $|e^{-(A+iB)\omega}| = e^{-A\omega}$ y luego $\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)\omega} d\omega$ converge. Por definición

$$\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega = \lim_{R\to+\infty} \left[-\frac{e^{-(A+iB)\omega}}{A+iB} \right]_0^R = \frac{1}{A+iB} \; ■$$

Teorema de inversión de Fourier: Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x \omega}\, d\omega \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Dem: Escribamos $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega} d\omega = \int_{-\infty}^0 \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega} d\omega + \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x \omega} d\omega$.

Supongamos que $\omega > 0$ (2^{da} integral):

Si $f \in \mathcal{F}_a$, fijamos b tal que $0<b<a$ y recordemos que (cf. §27):

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(u-ib)\, e^{-2\pi i (u-ib)\omega}\, du$$

Luego:

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega \overset{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib)\, e^{-2\pi i (u-ib)\omega}\, e^{2\pi i x\omega}\, du\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i (u-ib-x)\omega}\, d\omega\, du$$

$$\overset{\text{Lema}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) \frac{1}{2\pi b + 2\pi i (u-x)}\, du = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u-ib)}{u-ib-x}\, du$$

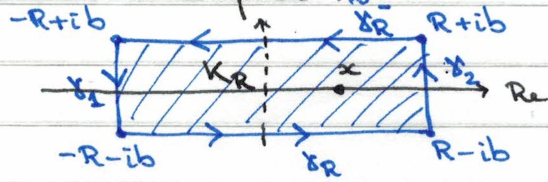
i.e., $\int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega \overset{dy}{=} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z-x}\, dz$ donde γ_R es

la curva $\gamma_R(t) = t - ib$ con $t \in [-R,R]$.

De manera completamente análoga: $\int_{-\infty}^{0} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_R^-} \frac{f(z)}{z-x}\, dz$

donde $\tilde{\gamma}_R$ es la curva $\tilde{\gamma}_R(t) = t + ib$ con $t \in [-R,R]$.

Así, si consideramos el compacto:



y la función $f \in \mathcal{O}(K_R)$, tenemos que la fórmula de Cauchy implica que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_R} \frac{f(z)}{z-x}\, dz.$$

Por otra parte, el hecho que $f \in \mathcal{F}_a$ implica que $\int_{\gamma_i} \frac{f(z)}{z-x}\, dz \longrightarrow 0$

cuando $R \to +\infty$ para $i = 1,2$. Finalmente, deducimos que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_R} \frac{f(z)}{z-x}\, dz \xrightarrow{R\to+\infty} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega + \int_{-\infty}^{0} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x}\, d\omega \qquad \blacksquare$$

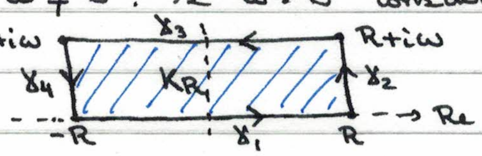
Ejemplos (Funciones Características):

① Distribución normal: Sea $f(x) = e^{-\pi x^2}$ y veamos que

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\pi\omega^2}$$

Notar que $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\omega}\, dx$ verifica $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$ ✓

Así, podemos asumir $\omega \neq 0$. Si $\omega > 0$ consideramos el compacto



$$I_j := \int_{\gamma_j} f(z)\, dz$$

y sea $f(z) = e^{-\pi z^2}$. El Teorema de Cauchy implica que $\int_{\partial K_R} f(z)\, dz = 0$.

Por otro lado:

- $I_1 = \int_{-R}^{R} f(t)\, dt \xrightarrow{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2}\, dt = 1$ ✓
- $I_3 = \int_{R}^{-R} f(t+i\omega)\, dt = -\int_{-R}^{R} e^{-\pi(t+i\omega)^2}\, dt = -e^{\pi\omega^2}\int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t\omega}\, d\omega$

  y luego $I_3 \xrightarrow{R\to+\infty} -e^{\pi\omega^2}\hat{f}(\omega)$ ✓
- $I_2 = \int_0^{\omega} f(R+it)\, i\, dt = \int_0^{\omega} e^{-\pi(R^2+2iRt-t^2)} \cdot i\, dt$

  $\Rightarrow |I_2| \leq C_\omega e^{-\pi R^2} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$ y similarmente $|I_4| \xrightarrow{R\to+\infty} 0$.

Finalmente, $0 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \xrightarrow{R\to+\infty} 1 - e^{\pi\omega^2}\hat{f}(\omega)$, i.e., $\hat{f}(\omega) = e^{-\pi\omega^2}$.

El caso $\omega < 0$ es completamente análogo ✓

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular $\hat{f}(\omega)$.

② Distribución de Cauchy: Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Vimos en §27 (pág 78) que $\hat{f}(-\omega) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \dfrac{e^{2\pi i \omega x}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-2\pi\omega}$ para $\omega > 0$.
De manera similar (eg. usando el Teorema de residuos) se calcula que $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-2\pi\omega}$ para $\omega > 0$, ie,

$$\hat{f}(\omega) = \pi e^{-2\pi|\omega|} \quad \text{para todo } \omega \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio Sea $f(x) = \dfrac{1}{\pi\gamma\left(1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)}$ donde $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}^{>0}$.

Calcular $\hat{f}(\omega)$.

③ Distribución de Laplace (o doble exponencial): Sea $f(x) = e^{-2\pi|x|}$.
El Ejemplo ②, junto con el Teorema de inversión de Fourier, implica que:

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_{\mathbb{R}} \pi e^{-2\pi|\omega|} e^{2\pi i x\omega}\, d\omega \underset{\omega \mapsto -t}{\overset{x \mapsto \omega}{\Longleftrightarrow}} \frac{1}{1+\omega^2} = \int_{\mathbb{R}} \pi e^{-2\pi|t|} e^{-2\pi i t\omega}\, dt$$

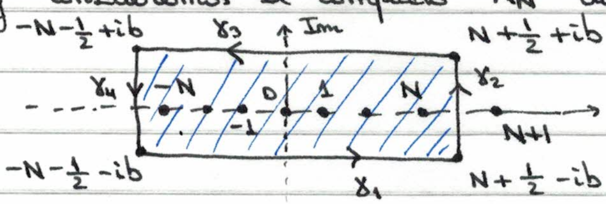
y luego $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1+\omega^2}$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Ejercicio Sea $f(x) = \dfrac{1}{2b} e^{-|x-\mu|/b}$ donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular $\hat{f}(\omega)$.

Teorema (fórmula de Poisson): Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Dem: Sup. que $f \in \mathcal{F}_a$ y sea b tal que $0 < b < a$.
Notemos que la función $g(z) := 1/(e^{2\pi i z} - 1)$ posee polos simples en cada $z = n \in \mathbb{Z}$ y además $\operatorname{Res}(g, n) = 1/(2\pi i)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
$\Rightarrow f(z)/(e^{2\pi i z} - 1)$ posee polos simples en cada $z = n \in \mathbb{Z}$ y además $\operatorname{Res}\left(f(z)/(e^{2\pi i z}-1), n\right) = f(n)/2\pi i$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Sea $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y consideremos el compacto K_N dado por:



$$I_{\gamma_j} := \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz$$

Luego, el Teorema de Residuos implica que

$$\int_{\partial K_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}\, dz = 2\pi i \sum_{a\in K_N} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}, a\right) = \sum_{n=-N}^{N} f(n)$$

Dado que $f \in \mathcal{F}$, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ converge ✓ y además
$|I_{\gamma_2}|, |I_{\gamma_4}| \longrightarrow 0$ cuando $N \longrightarrow +\infty$ ✓

Luego, basta analizar $\lim_{N\to+\infty} I_{\gamma_1}$ y $\lim_{N\to+\infty} I_{\gamma_3}$:

Notar por un lado que si $z(t) = t - ib$ pertenece a γ_1, entonces se tiene $|e^{2\pi i z(t)}| = e^{2\pi b} > 1$ pues $b > 0$. Así, dado que $\frac{1}{w-1} = \sum_{n\geq 0} w^{-(n+1)}$ si $|w| > 1$, tenemos que

$$\frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} = e^{-2\pi i z} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi i n z} \quad \text{para todo } z \in \gamma_1.$$

De manera similar, dado que $|e^{2\pi i z}| < 1$ si $z \in \gamma_3$, tenemos que

$$\frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} e^{2\pi i n z} \quad \text{para todo } z \in \gamma_3$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \lim_{N\to+\infty} \left(\int_{\gamma_1} f(z) \left(e^{-2\pi i z} \sum_{n\geq 0} e^{-2\pi i n z} \right) dz + \int_{\gamma_3^-} f(z) \left(\sum_{n\geq 0} e^{2\pi i n z} \right) dz \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} \int_{\gamma_1} f(z) e^{-2\pi i (n+1) z} dz + \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} \int_{\gamma_3^-} f(z) e^{2\pi i n z} dz$$

Usando que $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x - ib) e^{-2\pi i (x - ib)\omega} dx$ (ver pág 83), y similar para la traslación $x \mapsto x + ib$, obtenemos:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i (n+1) x} dx + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i n x} dx$$

$$\overset{\text{dy}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n+1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(-n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \quad \blacksquare$$

Ejercicio Para todo $t \in \mathbb{R}^{>0}$, se define la función theta

$$\Theta(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$$

Probar, usando adecuadamente la fórmula de Poisson, que

$$\Theta(t) = t^{-1/2}\, \Theta(1/t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}^{>0}.$$

Ejercicio Probar que para todo $a \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a}{a^2 + n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi a |n|} = \coth(\pi a).$$

{Cultura general} La función zeta de Riemann $\zeta(z) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}$ es holomorfa para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 1$ (gracias al M-test de Weierstrass). Más aún, se puede probar que para $\mathrm{Re}(z) > 1$ se tiene que

$$\pi^{-z/2}\, \Gamma(z/2)\, \zeta(z) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{(z/2)-1} (\Theta(u) - 1)\, du.$$

⚠ La ecuación funcional de la función theta $\Theta(t) = t^{-1/2}\, \Theta(1/t)$ permite extender analíticamente la función zeta de Riemann a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.