Históricamente, la transformada de Fourier de una función real $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se obtiene al considerar la serie de Fourier de una función T-periódica como una suma de Riemann que, cuando $T\to+\infty$, tiende a la identidad

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x\omega}\, d\omega \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

donde $\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\omega x}\, dx$, $\omega\in\mathbb{R}$, es la transformada de Fourier de f. Nuestro objetivo será dar un marco teórico formal donde estas fórmulas tengan sentido (¡y seamos capaces de probarlas!).

§28. Transformada de Fourier y la clase $\mathcal{F}$

$\circ\,\mathbb{C}$!

Def: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función continua. Decimos que f tiene decrecimiento moderado si $\exists\, A\in\mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|f(x)| \le \frac{A}{1+|x|^{1+\varepsilon}}$$

para algún $\varepsilon\in\mathbb{R}^{>0}$, y donde frecuentemente se fija $\varepsilon=1$. Denotamos por $M(\mathbb{R})$ al $\mathbb{R}$-ev. de funciones de decrecimiento moderado

Lema: Sea $f\in M(\mathbb{R})$, entonces la transformada de Fourier

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$$

converge para todo $\omega\in\mathbb{R}$.

Dem: Sea $I_N := \int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-2\pi i x\omega}\, dx$ para todo $N\in\mathbb{N}^{\ge 1}$. Entonces, $|I_M - I_N| \le \int_{N\le|x|\le M} |f(x)|\, dx \le \frac{2A}{\varepsilon N^{\varepsilon}}$ si $M>N$ y luego $\{I_N\}_{N\ge 1}$ es una sucesión de Cauchy $\Longleftrightarrow$ convergente ✓ ■

Ejercicio Sea $f\in M(\mathbb{R})$ de decrecimiento moderado. Probar que:

① Para todo $h\in\mathbb{R}$ se tiene $\int_{\mathbb{R}} f(x-h)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$

② Para todo $\delta\in\mathbb{R}^{>0}$ se tiene $\delta \int_{\mathbb{R}} f(\delta x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$

③ $\int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)|\, dx \to 0$ cuando $h\to 0$.

Ejercicio Sea $f\in M(\mathbb{R})$ de decrecimiento moderado. Probar que si:

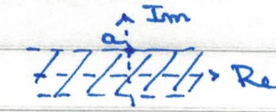
① $g(x) := f(x+h)$ con $h\in\mathbb{R}$, entonces $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i h\omega}$.

② $g(x) := f(x)\, e^{-2\pi i x h}$ con $h\in\mathbb{R}$, entonces $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega+h)$.

③ $g(x) := f(\delta x)$ con $\delta\in\mathbb{R}^{>0}$, entonces $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\delta}\hat{f}\left(\frac{\omega}{\delta}\right)$.

Def: Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$ y consideremos la franja horizontal

$$S_a := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\operatorname{Im}(z)| < a \}$$



Decimos que una función $f \in \mathcal{O}(S_a)$ pertenece a la **clase $\mathcal{F}_a$** si existe $A \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|f(x+iy)| \leq \frac{A}{1+x^2} \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y } |y| < a,$$

ie, f tiene decrecimiento moderado (uniformemente) en cada recta horizontal $\{\operatorname{Im}(z) = y\}$ con $-a < y < a$. Más aún, decimos que f pertenece a la **clase $\mathcal{F}$** si pertenece a la clase $\mathcal{F}_{a_0}$ para algún $a_0 \in \mathbb{R}^{>0}$.

Ejemplos:

① $f(z) = e^{-z^2} \in \mathcal{F}_a$ para todo $a > 0$.

② Sea $c \in \mathbb{R}^{>0}$ y consideremos $f(z) = 1/(z^2+c^2)$, con polos simples en $z = \pm ic$, entonces $f \in \mathcal{F}_a$ para todo $0 < a < c$.

En efecto $|f(z)| \leq \dfrac{1}{||z|^2 - c^2|} = \dfrac{1}{|x^2+y^2-c^2|} = \dfrac{1}{x^2+(c^2-y^2)}$ ✓

Ejercicio

① Probar que $f(z) = 1/\cosh(\pi z)$ pertenece a $\mathcal{F}_a$ para todo $0 < a < \frac{1}{2}$.

② Probar que si $f \in \mathcal{F}_a$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que $f^{(n)} \in \mathcal{F}_b$ para todo $0 < b < a$.

[Indicación: Considerar las fórmulas y desigualdades de Cauchy].

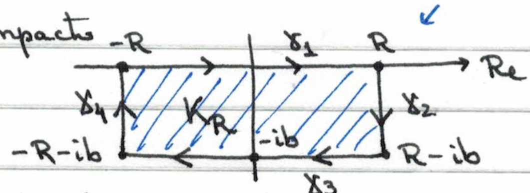
Teorema: Sea $f \in \mathcal{F}_a$ para cierto $a > 0$. Entonces, $\exists B > 0$ tal que

$$|\hat{f}(\omega)| \leq B e^{-2\pi b|\omega|} \quad \text{para todo } \omega \in \mathbb{R} \text{ y todo } 0 \leq b < a.$$

Dem: Dado que $\hat{f}(\omega) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega}\, dx$, el caso $b = 0$ (ie, $\hat{f}$ es acotada) se deduce del lema anterior (toda sucesión de Cauchy es acotada!). Luego, podemos asumir que $0 < b < a$. Supongamos que $\omega > 0$ y sea $g(z) := f(z)\, e^{-2\pi i z \omega}$:

orientación anti-canónica

Consideremos el compacto



$$I_j := \int_{\gamma_j} g(z)\, dz$$

y notar que $|I_4| \leq \int_0^b |f(-R-it)\, e^{-2\pi i(-R-it)\omega}|\, dt \leq \int_0^b \frac{A}{R^2} e^{-2\pi t \omega} dt$

$$\leq \int_0^b \frac{A}{R^2} e^0\, dt = \frac{bA}{R^2} \xrightarrow{R \to +\infty} 0.$$

y de manera similar $|I_2| \xrightarrow{R\to+\infty} 0$. Luego, cuando $R \to +\infty$, el Teorema de Cauchy se traduce en

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x-ib)\, e^{-2\pi i(x-ib)\omega}\, dx$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{A}{1+x^2} \cdot e^{-2\pi b\omega}\, dx \leq B e^{-2\pi b\omega} \quad \text{para cierta } B \in \mathbb{R}^{>0} \checkmark$$

El caso $\omega < 0$ se prueba de manera similar cambiando K_R por el rectángulo de vértices $-R, R, -R+ib, R+ib$ ✓ ■

Obs: El Teorema anterior nos dice que si $f \in \mathcal{F}$, entonces "$\hat{f}$ decrece rápidamente cuando $|\omega| \to +\infty$". Además, mientras más podamos extender f (i.e., mientras mayor sea $a>0$) entonces tenemos un mejor decaimiento de $\hat{f}$ (i.e., mayor será b).

§28. Transformada inversa de Fourier y fórmula de Poisson

En esta sección veremos cómo recuperar una función de clase $\mathcal{F}$ a partir de su transformada de Fourier.

Lema: Sea $A \in \mathbb{R}^{>0}$ y $B \in \mathbb{R}$, entonces $\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega = \frac{1}{A+iB}$.

Dem: Como $A>0$ y $B \in \mathbb{R}$, $|e^{-(A+iB)\omega}| = e^{-A\omega}$ y luego $\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega$ converge. Por definición

$$\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega = \lim_{R\to+\infty} \left[-\frac{e^{-(A+iB)\omega}}{A+iB} \right]_0^R = \frac{1}{A+iB} \quad ■$$

Teorema de inversión de Fourier: Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x\omega}\, d\omega \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Dem: Escribamos $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega = \int_{-\infty}^0 \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega + \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega$.

Supongamos que $\omega > 0$ (2da integral):

Si $f \in \mathcal{F}_a$, fijamos b tal que $0<b<a$ y recordemos que (cf. §27):

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(u-ib)\, e^{-2\pi i(u-ib)\omega}\, du$$

Luego:

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega \overset{\text{dy}}{=} \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib)\, e^{-2\pi i(u-ib)\omega}\, e^{2\pi i x\omega}\, du\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i(u-ib-x)\omega}\, d\omega\, du$$

$$\overset{\text{Lema}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) \frac{1}{2\pi b + 2\pi i(u-x)}\, du = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u-ib)}{u-ib-x}\, du$$