§27. Cálculo de integrales reales mediante residuos

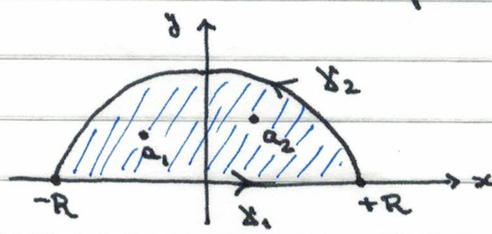
En esta sección explicaremos cómo el Teorema de Residuos puede ser usado para calcular integrales <u>reales</u> que involucran funciones holomorfas, que muchas veces no poseen primitivas elementales. Incluso en el caso de que las funciones posean primitivas conocidas, suele pasar que el cálculo de residuos permita obtener resultados mucho más rápidamente!

<u>Ejemplo 1</u>: Fracciones racionales en $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Supongamos que queremos calcular
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$
donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es el cociente de dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ tales que i) $f(z) = P(z)/Q(z)$ <u>no</u> posee polos en el eje real.

ii) $d := gr(Q) - gr(P) \geq 2$ ($\Rightarrow$ convergencia absoluta)

Para calcular $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$ consideramos el compacto $K := \overline{D}(0,R) \cap \{Im(z) \geq 0\}$



Sea $c \in \mathbb{R}$ el cociente entre el coef. principal de P y Q, de tal suerte que $|f(z)| \sim |c|\,|z|^{-d}$ cuando $|z| \to +\infty$. En particular,
$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \right| \leq \ell(\gamma_2)\, C'\, R^{-d} = \pi R\, C' R^{-d} = C'' / R^{d-1} \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

Por otro lado, el Teorema de Residuos implica que
$$\int_{\partial K} f(z)\, dz \overset{\text{def}}{=} \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{a_m \in K} Res(f, a_m)$$

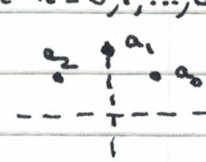
donde $\int_{\gamma_1} f(z)\, dz \overset{\text{def}}{=} \int_{-R}^{R} f(t)\, dt$. Luego, si $R \to +\infty$ obtenemos

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{Im(a_m) > 0} Res\left(\frac{P}{Q}, a_m\right)}$$

Por ejemplo, para calcular $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\, dx$ debemos determinar los polos de $f(z) = P(z)/Q(z)$, con $P(z) = z^2$, $Q(z) = z^6 + 1$:

$$z^6 + 1 = 0 \iff z^6 = -1 = e^{i\pi} \iff z = a_m := e^{i\pi/6} \cdot e^{2\pi i\, n/6}$$
$$= \exp\left(\frac{i\pi}{6}(2n+1)\right) \quad \text{con } n = 0, 1, \ldots, 5$$

Solamente $a_0 = e^{i\pi/6}$, $a_1 = i$, $a_2 = e^{i5\pi/6}$ tienen $Im(a_n) > 0$



Más aún, dado que $f = P/Q$ posee polos simples (!) se tiene que
$\operatorname{Res}(f, a_m) = P(a_m)/Q'(a_m)$ (ver §26, Ejemplo 3 en p.73)
$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, a_m) = a_m^2/6a_m^5 = \frac{1}{6a_m^3}$ y así (dado que $a_0^3 = a_2^3 = i$, $a_1^3 = -i$)
$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 2\pi i\left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i}\right) = \frac{\pi}{3}$, ie, $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{\pi}{6}$ ✓

Cabe destacar que en caso general, podríamos haber considerado el compacto $K := \overline{D}(0,R) \cap \{\operatorname{Im}(z) \leq 0\}$. En tal caso, dado que la orientación del eje real es la opuesta, se deduce que

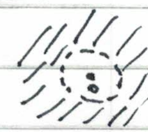
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a_m)<0} \operatorname{Res}(f, a_m)$$

Así, dado que $f = P/Q$ no posee polos en el eje real tenemos que

$$\sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(f,a) = 0$$

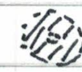
Esto último se extiende a funciones meromorfas más generales mediante:

Def: Una vecindad del infinito es un anillo abierto de la forma



$$A(0,R,+\infty) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R) \quad \text{para } R>0$$

Sea $f \in \mathcal{O}(A(0,R,+\infty))$ holomorfa en una vecindad del infinito, y sea $w = \varphi(z) := 1/z$ biholomorfismo entre $A(0;R,+\infty)$ y $A(0;0,1/R)$



Para $\omega = f(z)\,dz$, se tiene que $\varphi^*\omega \overset{\text{def}}{=} -f(1/w)\,w^{-2}\,dw$ y definimos

$$\operatorname{Res}(\omega,\infty) := \operatorname{Res}(f,\infty) := \operatorname{Res}(-f(1/w)\,w^{-2}, 0)$$

ie, $\operatorname{Res}(f,\infty) = -$(coef. de a_{-1} en la serie de Laurent de f centrada en 0).

Además, decimos que $z=\infty$ es un polo de orden m de f si $w = 0$ es un polo de orden m de $f(1/w)$ (ie, la serie de Laurent de f centrada en 0 posee finitos coeficientes $a_n \neq 0$ con $n \geq 0$); y en caso contrario decimos que f posee una singularidad esencial en $z = \infty$.

Prop: Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ función meromorfa, entonces $\sum_{a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}} \operatorname{Res}(f,a) = 0$ si f posee finitos polos (de tal suerte que la suma es finita)

Dem: Consideremos $R \gg 0$ tal que $D(0,R)$ contiene a todos los polos de f, salvo $z=\infty$. Entonces,

$$\int_{\Gamma(0,R)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}(f,a)$$

Por otra parte, notando que $w = 1/z$ cambia la orientación de círculos centrados en $z_0 = 0$, tenemos que: $\gamma(t) = Re^{it} \rightsquigarrow \tilde{\gamma}(t) = 1/R \cdot e^{-it}$

$$\int_{\Gamma(0,R)} f(z)\,dz = \int_{\Gamma(0,R)} \omega \underset{\varphi(z)=1/z}{=} -\int_{\Gamma(0,1/R)} \varphi^*\omega \overset{\text{def}}{=} -2\pi i \operatorname{Res}(\varphi^*\omega, 0) \overset{\text{def}}{=} -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty)$$

ie, $\sum_{a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}} \operatorname{Res}(f,a) = 0$ ∎

Ejemplo 2 : Fracciones racionales trigonométricas en $[0, 2\pi]$

Supongamos que queremos calcular

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\, dt$$

donde $F(x,y) \in \mathbb{R}(x,y)$ es una función racional en 2 variables que no se indetermina en el círculo $x^2+y^2=1$ de $\mathbb{R}^2$.

Si escribimos $z(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que $z'(t) = i e^{it}$ y luego si definimos

$$f(z) := F\left(\tfrac{1}{2}\left(z+\tfrac{1}{z}\right), \tfrac{1}{2i}\left(z-\tfrac{1}{z}\right)\right) \cdot \frac{1}{iz} \in \mathbb{C}(z)$$

obtenemos una función racional tal que si $z = e^{it} \in \partial\mathbb{D}$ entonces

$f(e^{it}) = F(\cos t, \sin t) \cdot \frac{1}{ie^{it}}$, i.e., $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\, dt \overset{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\, dz$

En particular, el Teorema de Residuos nos dice que

$$\boxed{\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{a \in \mathbb{D}} \operatorname{Res}(g(z), a)}$$

donde $g(z) := \frac{1}{z} F\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) \in \mathbb{C}(z)$ función racional.

Por ejemplo, para calcular $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(t)}\, dt$ consideramos

$F(x,y) = \frac{1}{2+x}$ y $g(z) = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \right) = \frac{2}{z^2+4z+1}$

Como $z^2+4z+1 = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)$ con $\lambda_1 = -2-\sqrt{3} \notin \mathbb{D}$, $\lambda_2 = -2+\sqrt{3} \in \mathbb{D}$

tenemos que $I = 2\pi \operatorname{Res}(g, \lambda_2) = 2\pi \cdot \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Ejemplo 3 : Integrales de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Veremos pronto que el Análisis de Fourier requiere calcular transformadas de Fourier de la forma siguiente (salvo cambios de signos):

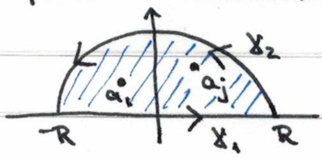
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{2\pi i \omega x}\, dx \quad , \quad \omega \in \mathbb{R} \text{ fijo}$$

y donde podemos que $\omega > 0$, haciendo $u = -x$ si fuera necesario. Dicho signo es importante, pues si $z = x+iy$ entonces $|e^{2\pi i \omega z}| = e^{-2\pi\omega y}$ y por ende usaremos el Teorema de Residuos en el semi-plano $\{\operatorname{Im}(z) = y \geq 0\}$.

Prop : Sup. que $\omega > 0$ y f se extiende en una función holomorfa $f(z)$ definida en una vecindad abierta de $\overline{\mathbb{H}} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, salvo quizás finitos puntos singulares $a_j \notin \mathbb{R}$. Si $\lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in \overline{\mathbb{H}}}} f(z) = 0$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{2\pi i \omega x}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a_j) > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{2\pi i \omega z}, a_j\right).$$

Dem: Consideremos el compacto $K := \overline{D}(0,R) \cap \{Im(z) \geq 0\}$



$$\omega := f(z)\, e^{2\pi i \omega z} dz$$

El Teorema de Residuos implica que $\int_{\partial K} \omega \overset{def}{=} \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi i \sum_{a \in K} Res(f,a)$ y donde $\int_{\gamma_1} \omega \overset{def}{=} \int_{-R}^{+R} f(x)\, e^{2\pi i \omega x} dx \xrightarrow{R \to +\infty} I$, la integral deseada.

Finalmente, notamos por un lado que $I_2 := \int_{\gamma_2} \omega$ cumple:

$$|I_2| \leq M_R \int_0^{\pi} R e^{-2\pi\omega R \sin t} dt = 2M_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-2\pi\omega R \sin t} dt,$$

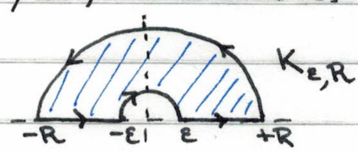
donde $M_R := \sup_{\Gamma(0,R) \cap \{Im\, z \geq 0\}} |f(z)|$ y donde $|e^{2\pi i \omega z}| = e^{-2\pi\omega y} = e^{-2\pi\omega R \sin t}$ si $z = z(t) = R\cos(t) + iR\sin(t)$.

Por otro lado, $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y luego

$$|I_2| \leq 2M_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-4\omega R t} dt = \left(\frac{1 - e^{-2\pi R \omega}}{2\omega}\right) M_R \xrightarrow{R \to +\infty} 0 \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Por ejemplo, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i \omega x}}{1+x^2} dx = 2\pi i \, Res\left(\frac{e^{2\pi i \omega z}}{1+z^2}, i\right) = 2\pi i \frac{e^{-2\pi\omega}}{2i} = \pi e^{-2\pi\omega}$

Obs importante: El método anterior puede usarse (con pequeñas modificaciones) si f posee finitos polos simples reales. Por ejemplo, si $f(z) = 1/z$ y $e^{2\pi i \omega z} = e^{iz}$ (ie, $\omega = 1/2\pi$) consideramos el compacto



dado que f no posee polos en $int(K_{\varepsilon,R})$ y que $f(z) \xrightarrow{|z| \to +\infty} 0$, la integral sobre el semi-círculo exterior tiende a 0 cuando $R \to +\infty$. Así, el Teorema de Cauchy-Goursat implica que:

$$\lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\{|z| = \varepsilon,\, Im\, z \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) = 0 \quad (\star)$$

Para la última integral, notamos que $e^{iz}/z = 1/z + i + O(z)$ y luego si $z = z(t) = \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, \pi]$ entonces:

$$\int_{\{|z| = \varepsilon,\, Im\, z \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\pi}^{0} (\varepsilon^{-1} e^{-it} + i + O(\varepsilon))\, \varepsilon i e^{it} dt = -i\pi + 2i\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

de donde deducimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \overset{def}{=} 2 \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} dx \overset{(\star)}{=} -\frac{1}{i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\{|z| = \varepsilon,\, Im\, z \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

$$= -1/i\,(-i\pi) = \pi \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

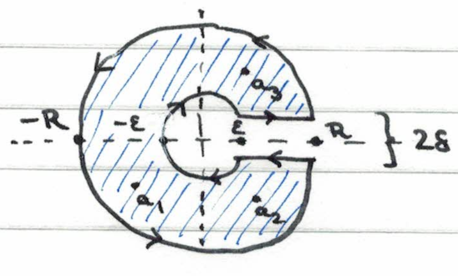
Ejemplo 4 : Integrales con factor x^a $(a \notin \mathbb{Z})$ en $[0,+\infty[$

Supongamos que queremos calcular
$$\int_0^{+\infty} f(x)\, x^a \, dx$$
donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es el cociente de dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ y $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ son tales que:

i) $P(0) \neq 0$ y Q no posee ceros ~~reales~~ positivos (ie, en $[0,+\infty[$)

ii) $a > -1$ y $\deg(Q) > \deg(P) + a + 1$.

Para calcular $\int_0^{+\infty} f(x)\, x^a\, dx$ consideramos $0 < \delta \ll \varepsilon < 1 < R$ y el compacto



Consideramos $f(z)\, z^a$ donde $z^a := \exp(a \log_\pi(z))$ esté definida usando la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$, y se calcula que cuando $\delta \to 0^+$ la suma de las integrales sobre los segmentos horizontales converge a
$$(1 - e^{2\pi i a}) \int_\varepsilon^R f(x)\, x^a \, dx$$
y que (ii) implica que las integrales sobre los círculos interior y exterior tienden a 0 cuando $\varepsilon \to 0^+$ y $R \to +\infty$. En resumen:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\, x^a\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{a_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}} \mathrm{Res}\left(f(z)\, z^a ; a_j\right)}$$

Por ejemplo, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \mathrm{Res}\left(\frac{z^a}{z(z+1)}, -1\right) = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \cdot \frac{e^{i\pi a}}{(-1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$

Ejemplo 5 : Integrales con factor $\ln(x)$ en $[0,+\infty[$

Supongamos que queremos calcular
$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln(x)\, dx$$
donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es el cociente de dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

i) Q no posee ceros en $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

ii) $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$

Aquí, la astucia es considerar $g(z) := (\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z)$ donde $\log_\pi(z)$ es la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$ y considerar el compacto $K_{R,\varepsilon,\delta}$ del Ejemplo 4. Con nuestras hipótesis:

1°) Las integrales sobre los círculos interior y exterior tienden a 0 cuando $\varepsilon \to 0^+$ y $R \to +\infty$.

2°) En el eje real, obtenemos curvas $\gamma(t) = t \pm i\delta$ y luego:

$$\underbrace{\int_\varepsilon^R (\ln(x) - i\pi)^2 f(x)\,dx}_{\text{cuando } \delta \to 0^+} + \underbrace{\int_R^\varepsilon (\ln(x) - i\pi + 2\pi i)^2 f(x)\,dx}_{\text{cuando } \delta \to 0^-}$$

$$= -4i\pi \int_\varepsilon^R f(x)\ln(x)\,dx$$

Así, obtenemos: $\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\ln(x)\,dx = -\frac{1}{2}\sum_{a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^{\geq 0}} \operatorname{Res}\left((\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z), a\right)}$

Obs: ① La integral $\int_0^{+\infty} f(x)\ln(x)\,dx$ converge incluso si $z=1$ es un polo simple de $f(z) = P(z)/Q(z)$. Considerando, en el cálculo anterior, pequeños círculos de la forma $\Gamma(1,\varepsilon)$ y usando $\operatorname{Ln}(z)$ (la rama principal del logaritmo) se puede probar que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ln(x)\,dx = \frac{-1}{2}\sum_{a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^{\geq 0}} \operatorname{Res}\left((\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z), a\right) + \frac{\pi^2}{2}\operatorname{Res}(f(z), 1)$$

Por ejemplo, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \frac{-1}{2}\underbrace{\operatorname{Res}\left(\frac{(\log_\pi(z) - i\pi)^2}{z^2-1}, -1\right)}_{=0 \text{ pues } \log_\pi(-1) = i\pi} + \frac{\pi^2}{2}\underbrace{\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, 1\right)}_{=1/2}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

② La misma astucia permite evaluar (en principio) integrales de la forma

$$\int_0^{+\infty} f(x) R(\ln(x))\,dx$$

donde $R \in \mathbb{R}[x]$ es cualquier polinomio. Para ello, se debe encontrar un polinomio $\tilde{R} \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\tilde{R}(z + 2\pi i) - \tilde{R}(z) = R(z)$ y considerar la función $g(z) := \tilde{R}(\log_\pi(z)) f(z)$ en $K_{R,\varepsilon,\delta}$.

Ejercicio Usar el Teorema de Residuos para calcular:

① $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\,dx$ para $a > 0$.

Ejercicio Probar las siguientes fórmulas:

① $\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+\cos(x))^2}\,dx = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}} \quad \forall a > 1$

② $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\ln(a) \quad \forall a > 0$