§26. Teorema de Residuos

Recordemos que si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es una vecindad abierta de z_0 y $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$, entonces f admite un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$

donde $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, y donde $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño tal que $\overline{D}(z_0,\varepsilon)\subseteq\Omega$. En particular:

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z_0,\varepsilon)} f(z)\,dz}$$

Def: Sea $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ vecindad abierta de $z_0\in\mathbb{C}$ y $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z_0\})$, y consideramos $\omega := f(z)\,dz$ la 1-forma diferencial asociada. Definimos el residuo de ω en z_0 mediante

$$\mathrm{Res}(\omega,z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z_0,\varepsilon)} \omega = \text{Coeficiente } a_{-1} \text{ de la serie de Laurent de } f \text{ centrada en } z_0$$

donde $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño tal que $\overline{D}(z_0,\varepsilon)\subseteq\Omega$.

Notación: En muchos textos se habla del "residuo de f en z_0":

$$\mathrm{Res}(f,z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z_0,\varepsilon)} f(z)\,dz$$

y también lo usaremos frecuentemente! Sin embargo, desde un punto de vista teórico es mejor hablar del residuo de una 1-forma diferencial, pues:

(1°) Se comporta mejor al hacer cambios de variable ("biholomorfismos").

(2°) Esta definición se extiende mejor a funciones de varias variables complejas! El Residuo de Poincaré asocia una $(n-1)$-forma diferencial $\mathrm{Res}(\omega)$ a una n-forma diferencial $\omega = f(z_1,\ldots,z_n)\,dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n$.

Ejemplos y Observaciones: Sea $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z_0\})$

(1) Si f posee una singularidad removible en z_0, entonces

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = 0 \quad (\text{cf. Teorema de Cauchy-Goursat})$$

(2) Si $f(z) = e^{1/z} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}$, entonces $\mathrm{Res}(e^{1/z},0) = 1$.

(3) Si $f\in\mathcal{M}(\Omega)$ es meromorfa y $f = u/v$ con $u,v\in\mathcal{O}(\Omega)$ entonces $\mathrm{Res}(f,z_0)$ se calcula mirando (finitos términos!) los desarrollos de series de potencias en z_0 de u y v, y con ello se pueden deducir los primeros términos de la serie de Laurent de f centrada en z_0. Por ejemplo:

Supongamos que $f = u/v$ con $u, v \in \mathcal{O}(\Omega)$ y f posee un <u>polo simple</u> en z_0, i.e., $u(z_0) \neq 0$ y v posee un cero simple en z_0 (i.e., $v(z_0) = 0$, $v'(z_0) \neq 0$):

$$\left.\begin{array}{l} v(z) = v'(z_0)(z - z_0)\,h(z) \text{ con } h \in \mathcal{O}(\Omega) \\ \text{tq } h(z_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(z) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}(z - z_0)^{-1} + O(1)$$

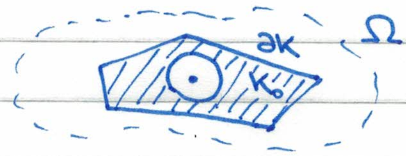
$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{u(z)}{v(z)}, z_0\right) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)} \quad \text{si } v(z_0) = 0 \text{ y } v'(z_0) \neq 0.$$

Ejercicio útil Probar que si f posee un polo de orden $m \geq 1$ en z_0 entonces $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z - z_0)^m f(z) \right\} \Big|_{z = z_0}$

(4) **Ejercicio** Sea $f(z) = \tan(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Calcular $\operatorname{Res}(\tan(z), a)$ $\forall a \in \mathbb{C}$.

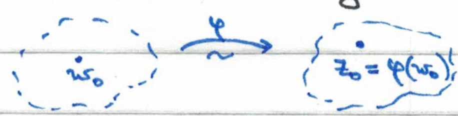
(5) No es necesario restringirse a círculos $\Gamma(z_0, \varepsilon)$ para calcular residuos: Sea $\mathcal{U}$ vecindad abierta de z_0 tal que $K := \overline{\mathcal{U}} \subseteq \Omega$ es compacto con borde ∂K de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Entonces:

$$\operatorname{Res}(\omega, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \omega$$



En efecto, el Teorema de Cauchy aplicado al compacto $K_0 := \overline{\mathcal{U}} \setminus D(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega \setminus \{z_0\}$ implica que $0 = \int_{\partial K_0} \omega = \int_{\partial K} \omega - \int_{\Gamma(z_0, \varepsilon)} \omega$ $\forall \varepsilon > 0$ suf. pequeño.

<u>Prop</u> (Cambio de variable): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ vecindad abierta de z_0, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ y $\omega = f(z)\,dz$ la 1-forma diferencial asociada. Supongamos que $z = \varphi(w)$ es un cambio de variable biholomorfo entre una vecindad de $w_0 := \varphi^{-1}(z_0)$ y una vecindad de z_0, entonces:



$$\operatorname{Res}(\varphi^* \omega, w_0) = \operatorname{Res}(\omega, z_0)$$

donde $\varphi^* \omega := f(\varphi(w))\,\varphi'(w)\,dw$ es el <u>pullback de ω por φ</u>.

<u>Dem</u>: Para una vecindad abierta acotada (suficientemente pequeña) W de w_0 tal que ∂W es de clase $\mathcal{C}^1$, el abierto imagen $\mathcal{U} := \varphi(W)$ es una vecindad de $z_0 = \varphi(w_0)$ tal que $\partial \mathcal{U}$ es de clase $\mathcal{C}^1$. Así,

$$\operatorname{Res}(\varphi^* \omega, w_0) \overset{\text{dy}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial W} f(\varphi(w))\,\varphi'(w)\,dw \underset{z = \varphi(w)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{U}} f(z)\,dz \overset{\text{dy}}{=} \operatorname{Res}(\omega, z_0)$$

donde la orientación de los bordes es preservada dado que $\det(d_w \varphi) > 0$, gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann reales. ∎

<u>Ejemplo</u>: Sabemos que $\operatorname{Res}(e^{1/z}, 0) = 1$. Luego, si consideramos el cambio de variable (loc. biyectivo) $z = \sin(w) \Rightarrow \operatorname{Res}(e^{1/\sin(w)} \cos(w), 0) = 1$.

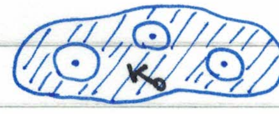
Del mismo modo, $\operatorname{Res}(e^{1/\sin(w)} \cos(w), n\pi) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y como $\cos(n\pi) = (-1)^n$ se tiene que $\operatorname{Res}(e^{1/\sin(w)}, n\pi) = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Teorema de Residuos : Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $\{a_m\}_{m\geq 0} \subseteq \Omega$ una sucesión de puntos aislados. Supongamos que f es una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a_m\}_{m\geq 0}$, entonces:

Para todo compacto $K \subseteq \Omega$ con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos tal que $\partial K \cap \{a_m\}_{m\geq 0} = \emptyset$ se tiene que $\int_{\partial K} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a_m \in K} \mathrm{Res}(f, a_m)$.

Dem: Las hipótesis del Teorema implican que $K \cap \{a_m\}_{m\geq 0}$ es un conjunto finito de puntos, que no pertenecen al borde ∂K.

Así, existen radios $r_m > 0$ tales que $\overline{D}(a_m, r_m) \subseteq \mathrm{int}(K)$



$\Rightarrow K_0 := K \setminus \bigcup_{a_m \in K} \overline{D}(a_m, r_m)$ es un compacto con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y f es holomorfa en una vecindad de ∂K_0

Luego, el Teorema de Cauchy implica que:

$$0 = \int_{\partial K_0} f(z)\,dz = \int_{\partial K} f(z)\,dz - \sum_{a_m \in K} \int_{\Gamma(a_m, r_m)} f(z)\,dz$$

de donde se obtiene la fórmula deseada ■

Ejemplos :

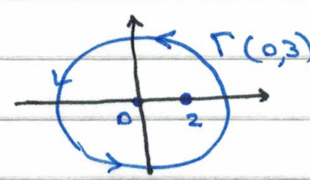
① Sea $f(z) = e^{1/z^2}$. Entonces, f admite el desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^6} + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(e^{1/z^2}, 0) = 0$.

Luego, el Teorema de Residuos implica (por ejemplo) que $\int_{\partial D(0,r)} e^{1/z^2}\,dz = 0$ para todo $r > 0$.

② Sea $f(z) = 1/(z(z-2)^4)$ y sea $\Gamma(0,3)$ el círculo de radio 3 con centro $z_0 = 0$ (orientado en sentido anti-horario):



Luego, el Teorema de Residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(0,3)} f(z)\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,2))$$

En $z_0 = 2$: Escribimos

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^4}\cdot\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-2)^4}\cdot\frac{1}{2+(z-2)} = \frac{1}{2(z-2)^4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{(z-2)}{2}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^{n-4}$$ y luego (en $n=3$) tenemos $\mathrm{Res}(f,2) = \frac{-1}{16}$

En $z_0 = 0$: Al ser un polo simple, $\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

i.e., $\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = 1/(-2)^4 = 1/16$

$\Rightarrow \int_{\Gamma(0,3)} f(z)\,dz = 2\pi i\,(1/16 - 1/16) = 0$. Similar : $\int_{\Gamma(2,1)} f(z)\,dz = \frac{-\pi i}{8}$

Ejercicio Calcular $\int_{\Gamma(0,2)} \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz$.