§25. Funciones meromorfas y Teorema de factorización de Weierstrass

Así como las funciones racionales son cocientes de polinomios, las funciones meromorfas serán (localmente) cocientes de funciones holomorfas. Además, para incluir singularidades aisladas en el análisis consideraremos el "plano complejo extendido" $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en varias ocasiones.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Decimos que f es meromorfa en Ω si:

"Para todo punto $z_0 \in \Omega$, existe una vecindad abierta conexa V de z_0 y funciones holomorfas $g, h \in \mathcal{O}(V)$, con $h \not\equiv 0$ no-idénticamente nula, de tal suerte que $f|_V = \frac{g}{h}$"

Denotamos por $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de funciones meromorfas en Ω.

Se tiene la siguiente caracterización de las funciones meromorfas:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es meromorfa si y sólo si f es holomorfa en el complemento de una sucesión de singularidades no-removibles $\{a_m\}$ que es localmente finita en Ω y donde cada singularidad $a_m \in \Omega$ es un polo. ↑ ie, puntos aislados

Dem: Si $f \overset{loc}{=} g/h$ con $g, h \in \mathcal{O}(V)$, entonces el hecho que $h \not\equiv 0$ en V implica que $\exists\, D(z_0, \varepsilon) \subseteq V$ tal que

$$h(z) = (z - z_0)^m u(z) \quad \text{en } D(z_0, \varepsilon) \quad \text{con } u \in \mathcal{O}^*(D(z_0, \varepsilon))$$

$\Rightarrow f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) u(z)^{-1}$ y donde $g/u \in \mathcal{O}(D(z_0, \varepsilon))$

y luego z_0 es un polo de orden $\leq m$ ✓

Recíprocamente, si f sólo posee singularidades aisladas dadas por polos entonces sabemos (por el desarrollo en serie de Laurent) que $f(z) \overset{loc}{=} g(z)/(z - z_0)^m$ con g holomorfa en una vecindad del polo z_0, ie, f es meromorfa ✓ ∎

Ejemplos:

① $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$, ie, toda función holomorfa es meromorfa.

② Ejercicio. Sean $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ polinomios con $Q \neq 0$, entonces $f(z) = P(z)/Q(z)$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, ie, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

③ La función $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$ es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus A$, donde $A = \{0\} \cup \{\pm \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^{\geq 1}\}$. Además, dado que $g(z) = \sin(\pi/z)$ tiene ceros simples en cada $z_0 = 1/n$ (pues $g'(z) = \frac{-\pi}{z^2}\cos(\pi/z)$) tenemos que f posee polos simples en cada $z_0 = 1/n$.

Así, f es meromorfa en $\mathbb{C}^*$ pero no es meromorfa en $\mathbb{C}$ dado que la sucesión de polos $\{\pm 1/n\}_{n\geq 1}$ no es localmente finita en torno a $0 \in \mathbb{C}$.

La noción de "divisor" (introducida por Dedekind y Weber) es muy útil para recopilar los órdenes de ceros y polos de una función meromorfa.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío. Un divisor en Ω es una función

$$D : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad p \longmapsto D(p) := m_p$$

tal que su soporte, definido por

$$\mathrm{Supp}(D) := \{z \in \Omega \text{ tal que } D(z) \neq 0\},$$

consiste en una sucesión $\{z_n\} \subseteq \Omega$ de puntos aislados en Ω, donde $D(z_n) := m_n \neq 0$ es la multiplicidad del punto z_n en el divisor D.
Lo anterior suele resumirse escribiendo simplemente

$$D = \sum_n m_n [z_n].$$

Si $m_n \geq 0$ $\forall n$ escribimos $D \geq 0$ y decimos que D es un divisor efectivo.

Obs: El conjunto $\mathrm{Div}(\Omega)$ de divisores en Ω posee una estructura de grupo abeliano: La función nula es el neutro $0 \in \mathrm{Div}(\Omega)$, si $D \in \mathrm{Div}(\Omega)$ entonces $-D \in \mathrm{Div}(\Omega)$, si $D, D' \in \mathrm{Div}(\Omega)$ entonces $D + D' \in \mathrm{Div}(\Omega)$.

Teorema y Definición: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ una función meromorfa que no es idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω (y en particular, los conjuntos de ceros $V(f) \subseteq \Omega$ y de polos $P(f) \subseteq \Omega$ forman sucesiones de puntos aislados en Ω). Definimos el divisor asociado a f mediante

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{z \in \Omega} m_z [z]$$

donde $z \in V(f) \cup P(f)$, y donde $m_z > 0$ (resp. $m_z < 0$) es el orden del cero (resp. $-$(orden del polo)) si $z \in V(f)$ (resp. si $z \in P(f)$).
En part, $\mathrm{div}(f) \geq 0 \iff f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dem: Los ceros y polos de una función meromorfa $\neq 0$ son aislados ✓ ■

Ejemplos:

① si $f(z) = e^z$, $\operatorname{div}(f) = 0$ (ni ceros ni polos)

② si $f(z) = (z-2)(z^2+1)^3$, $\operatorname{div}(f) = 1\cdot[2] + 3\cdot[i] + 3\cdot[-i]$

③ si $f(z) = z/(z-1)^2$, $\operatorname{div}(f) = 1\cdot[0] - 2\cdot[1] \overset{\text{def}}{=} [0] - 2[1]$

④ si $f(z) = 1/\sin(\pi/z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$, entonces $\operatorname{div}(f) = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} -\left[\frac{1}{m}\right]$.

El "Teorema de factorización de Weierstrass" permite hallar funciones holomorfas con (un divisor efectivo de) ceros pre-escritos.

Notación: Para $p\in\mathbb{N}$, definimos el factor principal de Weierstrass de orden p como la función $W_0(z) := 1-z$ si $p=0$, y como
$$W_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right) \quad \text{si } p\geq 1.$$
↳ (o bien $E_p(z)$ "factor elemental" de Weierstrass)

En particular, $z_0 = 1$ es un cero simple de W_p y en $z_0=0$ la función $\ln(W_p(z))$ admite el desarrollo en serie de potencias
$$\ln(W_p(z)) = \ln(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p} = -\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{con } |z|<1$$
$$\Rightarrow |\ln(W_p(z))| \leq \frac{1}{p+1}\sum_{n=p+1}^{+\infty} |z|^n = \frac{1}{p+1}\cdot\frac{|z|^{p+1}}{1-|z|} \quad \text{para } |z|<1$$
Así, $|\ln W_p(z)| \leq 2^{-p}$ si $|z|\leq 1/2$.

Teorema de Factorización de Weierstrass: Para todo divisor efectivo en un abierto no-vacío $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, de la forma
$$D = \sum_{z\in\Omega} m_z[z] = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_n[z_n] \geq 0,$$
existe una función holomorfa $f\in\mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\operatorname{div}(f) = D$, ie, una función f cuyos ceros son exactamente los puntos $\{z_n\}$ y cada uno con multiplicidad $m_n\geq 0$.

Dem: Podemos suponer que $z_n\neq 0$ $\forall n\geq 0$, pues si $z_0 = 0$ basta multiplicar por z^{m_0} la función construida a partir de los $\{z_n\}_{n\geq 1}$.

Supongamos primero que $\Omega = \mathbb{C}$: En tal caso, el hecho que los $\{z_n\}$ sean puntos aislados se traduce en que $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$. Definamos:
$$f(z) := \prod_{n\in\mathbb{N}} W_{n+m_n}(z/z_n)^{m_n}$$

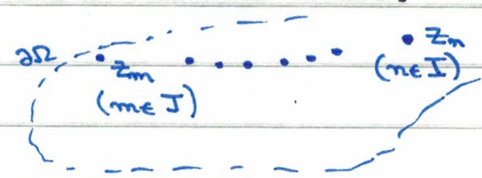
Así, la convergencia del producto infinito se reduce a estudiar la convergencia

uniforme de la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} m_n \left| \operatorname{Ln} W_{n+m_n}(z/z_n) \right|$ sobre compactos de $\mathbb{C}$.
Para ello, notamos que si $z \in \overline{D}(0,R)$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n| \geq 2R \quad \forall n \geq n_0$ y por ende $|z/z_n| \leq 1/2 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \left| \operatorname{Ln} W_{n+m_n}(z/z_n) \right| \leq 2^{-(n+m_n)} \quad \forall z \in \overline{D}(0,R)$ y $\forall n \geq n_0$

de donde deducimos la convergencia uniforme de $\sum m_n \left| \operatorname{Ln} W_{n+m_n}(z/z_n) \right|$ en $\overline{D}(0,R)$ y así la convergencia de $f(z) = \prod_n W_{n+m_n}(z/z_n)^{m_n}$ en todo compacto de $\Omega = \mathbb{C}$ ✓ Por construcción, $\operatorname{div}(f) = D$ ✓

Supongamos ahora que $\Omega \neq \mathbb{C}$: En tal caso, el hecho que los $\{z_n\}$ sean puntos aislados se traduce en que $\max\{|z_n|, \operatorname{dist}(z_n, \partial\Omega)^{-1}\} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$.
Por conveniencia, realizamos una partición $\mathbb{N} = I \cup J$ de los índices de tal suerte que:



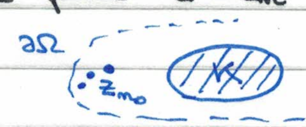
$n \in I \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} |z_n| \geq \operatorname{dist}(z_n, \partial\Omega)^{-1}$

$n \in J \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} |z_n| < \operatorname{dist}(z_n, \partial\Omega)^{-1}$

Así, $\lim_{\substack{n \in I \\ n \to +\infty}} |z_n| = +\infty$. Luego, el razonamiento en el caso anterior muestra que $g(z) := \prod_{n \in I} W_{n+m_n}(z/z_n)^{m_n}$ converge en $\mathbb{C}$ y sus ceros están dados por los $\{z_n\}_{n \in I}$ con multiplicidad m_n ✓
Por otra parte, tenemos que $\lim_{\substack{n \in J \\ n \to +\infty}} \operatorname{dist}(z_n, \partial\Omega) = 0$. Para cada $n \in J$, sea $w_n \in \partial\Omega$ tal que $|z_n - w_n| = \operatorname{dist}(z_n, w_n)$, y definimos

$$h(z) := \prod_{n \in J} W_{n+m_n}\big((z_n - w_n)/(z - w_n)\big)^{m_n},$$

donde $W_{n+m_n}\big((z_n - w_n)/(z - w_n)\big)$ se anula en el único punto $z = z_n$ que verifica $(z_n - w_n)/(z - w_n) = 1$ ✓



Sea $K \subseteq \Omega$ compacto y sea $\delta := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$
$\Rightarrow \exists n_0$ tal que $|z_n - w_n| \overset{\text{df}}{=} \operatorname{dist}(z_n, \partial\Omega) \leq \delta/2 \quad \forall n \geq n_0$, y luego

$$\left| \frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right| \leq \frac{\delta/2}{\delta} = \frac{1}{2} \quad \forall z \in K \Rightarrow \left| \operatorname{Ln} W_{n+m_n}\left(\frac{z_n - w_n}{z - w_n} \right) \right| \leq \frac{1}{2^{n+m_n}} \text{ en } K$$

$\Rightarrow h$ converge uniformemente en todo compacto $K \subseteq \Omega$ ✓ Así, la función $f := gh \in \mathcal{O}(\Omega)$ verifica $\operatorname{div}(f) = D$ ✓ ∎

Obs: La elección de índices "$n + m_n$" asegura la convergencia en general. Sin embargo, si $\{z_n\}_{n \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ son puntos aislados tales que para $p \in \mathbb{N}$ se cumple que:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{m_n}{|z_n|^{p+1}} < +\infty$$

$\Rightarrow f(z) = \prod_n W_p(z/z_n)^{m_n}$ converge uniformemente en todo $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto.
En part, si $\sum \frac{m_n}{|z_n|} < +\infty$ entonces $f(z) = \prod \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{m_n}$ funciona!

Corolario: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ función meromorfa. Entonces, existe una escritura global

$$f = g/h \quad \text{en } \Omega$$

donde $g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$, y donde h posee como ceros los polos de f y como multiplicidades los órdenes de cada polo correspondiente.

Dem: Escribamos el divisor $\operatorname{div}(f)$ como

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{z_m \in V(f)} m_m [z_m] - \sum_{w_m \in P(f)} d_m [w_m]$$
$$=: \operatorname{div}(f)_+ - \operatorname{div}(f)_-$$

donde $V(f) = \{z_m\}$ es el conjunto de ceros (con $m_m > 0$) y $P(f) = \{w_m\}$ es el conjunto de polos (con $-d_m < 0$, ie, $d_m > 0$). El Teorema de factorización de Weierstrass nos permite hallar $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\operatorname{div}(h) = \operatorname{div}(f)_-$. Luego, $g := fh \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(f)_+$ ■

Obs: Notar que si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto conexo no-vacío entonces $\mathcal{O}(\Omega)$ es un dominio entero (ie, si $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ son tales que $fg \equiv 0$ en Ω, entonces $f \equiv 0$ ó $g \equiv 0$ en Ω). Así, el Corolario anterior nos dice que

$$\mathcal{M}(\Omega) \cong k(\Omega),$$

donde $k(\Omega) := \operatorname{Fr}(\mathcal{O}(\Omega))$ es el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}(\Omega)$.

Cultura general: Sea $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$. Decimos que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tiene orden de crecimiento $\leq \rho$ si $|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho}$ para ciertas constantes $A, B \in \mathbb{R}^{>0}$ y $\forall z \in \mathbb{C}$. El orden de crecimiento de f es el ínfimo $\rho_0 \geq 0$ de dichos ρ.

Teorema de Factorización de Hadamard: Supongamos que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tiene orden de crecimiento ρ_0, y sea $k := \lfloor \rho_0 \rfloor$ su parte entera. Si $z_0 = 0$ y $\{z_m\}_{m \geq 1} = \{z_1, z_2, \dots\}$ son los ceros de f, entonces

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{m=1}^{+\infty} W_k(z/z_m)$$

donde $P \in \mathbb{C}[z]$ polinomio de grado $\leq k$ y donde $m = \operatorname{mult}_0(f) \geq 0$.

Ejercicio Usar el Teorema de Factorización de Hadamard que:

① $e^{az} - e^{bz} = (a-b) z e^{(a+b)z/2} \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2\pi^2}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

② $\cos(\pi z) = \displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

③ La ecuación $e^z = z$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{C}$.