$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-w/z)} = -\frac{1}{z}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^m = -\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{w^m}{z^{m+1}}$$

Así, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_2)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw\right)z^n + \sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_1)} f(w)\,w^m\,dw\right)z^{-m-1}.$$

Si escribimos $n := -m-1 \leq -1$ (ie, $m := -n-1$), entonces $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ con:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_2)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw \text{ si } n\geq 0, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_1)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw \text{ si } n\leq -1$$

Veamos que la integral $\int_{\Gamma(0,r)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw$ no depende de $r\in\,]R_1,R_2[$:

La fórmula de Cauchy aplicada a la función holomorfa $g(w) := f(w)/w^{n+1}$ y al compacto $K = \bar{A}(0;r_1,r_2) \subseteq A(0;R_1,R_2)$ implica que:

$$0 = \int_{\partial K} g(w)\,dw \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma(0,r_2)} g(w)\,dw - \int_{\Gamma(0,r_1)} g(w)\,dw$$

para todos $r_1 < r_2$ en el intervalo $]R_1,R_2[$ ✓ ■

Ejemplo: La función $f(z) = \exp(1/z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*$. Además, su serie de Laurent (centrada en $z_0 = 0$) está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

En particular, la "parte negativa" es infinita.

§24. Singularidades aisladas y Teorema de Casorati-Weierstrass

Def: Sea Ω una vecindad abierta de un punto $z_0\in\Omega$, y sea $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z_0\})$. Decimos que z_0 es:

1. Una singularidad removible (o reparable) de f si f posee una extensión holomorfa $\tilde{f}\in\mathcal{O}(\Omega)$ (ie, $f(z) = \tilde{f}(z)$ $\forall z\in\Omega\setminus\{z_0\}$).
2. Una singularidad no-removible de f (o simplemente una singularidad) si f no puede ser extendida a $\tilde{f}\in\mathcal{O}(\Omega)$.

Prop: Una función $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z_0\})$ posee una singularidad removible en z_0 si y sólo si los coeficientes a_n de su serie de Laurent centrada en z_0

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

verifican que $a_n = 0$ para todo $n<0$.

Dem: Podemos suponer que $\Omega = D(z_0, \varepsilon)$ es un disco pequeño
$\Rightarrow \Omega \setminus \{z_0\} = \{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } 0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$ disco perforado.
Luego, f posee un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

con radio de convergencia $R \geq \varepsilon$ para la parte positiva $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ y con radio de convergencia $R' = +\infty$ para la parte negativa $\sum_{m \geq 1} a_{-m} w^m$.
Si f puede extenderse en una función holomorfa $\tilde{f}$ en el disco $D(z_0, \varepsilon)$, obtenemos un desarrollo en serie de potencias

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n \quad \text{en } D(z_0, \varepsilon).$$

La unicidad de los coeficientes de la serie de Laurent implica entonces que $a_n = b_n \ \forall n \geq 0$ y que $a_n = 0 \ \forall n < 0$. ■

Ejercicio Determinar si las funciones $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$ y $g(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^2}$ poseen singularidades removibles en $z_0 = 0$.

Corolario: Una función $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ posee una singularidad removible en z_0 si y sólo si f es acotada en una vecindad de z_0.

Dem: Si f se extiende holomorficamente en z_0, entonces dicha extensión es continua y por ende acotada en una vecindad de z_0 ✓
Recíprocamente, si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$ entonces escogiendo $r < \delta$ y usando el hecho que el coeficiente a_n de la serie de Laurent de f está dado por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-nit} \, dt,$$

deducimos que $|a_n| \leq M r^{-n}$, y luego $a_n = 0 \ \forall n < 0$ al considerar el límite $r \to 0$ ■

Observación/Definición importante: Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ con serie de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$. Si z_0 es una singularidad no-removible entonces la parte negativa $\sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n$ no es idénticamente nula.
Hay dos posibilidades a considerar:

① Polos: Si la parte negativa es una suma finita, y denotamos por $m := \max \{ |n| \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } a_n \neq 0 \text{ con } n < 0 \}$ entonces:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \text{ con } a_{-m} \neq 0 .$$

Decimos entonces que f posee un polo de orden m en z_0, y que

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

es la "parte polar" de f. En particular, tenemos que:

i) $a_{-m} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z)$

ii) $\exists\, C \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $|f(z)| \leq \dfrac{C}{|z-z_0|^m}$ en una vecindad de z_0.

iii) $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ donde $g(z) := a_{-m} + a_{1-m}(z-z_0) + \dots + a_n (z-z_0)^{n+m} + \dots = \sum_{n\geq 0} a_{n-m} (z-z_0)^n$

función holomorfa en Ω verificando $g(z_0) \overset{\text{def}}{=} a_{-m} \neq 0$.

② Singularidad esencial: Si la parte negativa $\sum_{n<0} a_n (z-z_0)^n$ es una serie infinita, decimos entonces que f posee una singularidad esencial en z_0. En tal caso, la función

$$g_m(z) := (z-z_0)^m f(z)$$

no es acotada en una vecindad de z_0 para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

En resumen: Si Ω es una vecindad abierta de $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ entonces:

① z_0 es una singularidad removible de f; o bien
② z_0 es un polo de orden $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ de f; o bien
③ z_0 es una singularidad esencial de f.

Ejemplos:

① La función $f(z) = \exp(1/z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ posee una singularidad esencial en $z_0 = 0$.

② La función $f(z) = (z^2-2z+3)/(z-2)$ verifica que

$$\frac{z^2-2z+3}{z-2} = \frac{z(z-2)+3}{z-2} = z + \frac{3}{z-2} = 2 + (z-2) + \frac{3}{(z-2)}$$

y luego f posee un polo de orden 1 en $z_0 = 2$.

③ La función $f(z) = (1-\cos(z))/z^2 = \frac{1}{z^2}\left(1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)\right)$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots$$

posee una singularidad removible en $z_0 = 0$.

Terminología: Típicamente, se dice que un polo de orden $m=1$ (resp. $m=2$, resp. $m=3$, etc) es un polo simple (resp. polo doble, resp. polo triple, etc).

Ejercicio Sean $p, q \in \mathbb{C}[z]$ polinomios, donde $q \neq 0$, y sea $f(z) = p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z)$ función racional. Probar (eg. usando fracciones parciales) que f posee "a lo más polos" como singularidades, ie, posee singularidades removibles o polos.

El resultado siguiente nos da una dicotomía que nos permite distinguir entre polos y singularidades esenciales.

Teorema (Casorati 1868, Weierstrass 1876): Sea $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que z_0 es una singularidad no-removible.
1. Si z_0 es un polo, entonces $|f(z)| \to +\infty$ cuando $z \to z_0$.
2. Si z_0 es una singularidad esencial, entonces todo punto de $\mathbb{C}$ es un punto de adherencia de $f(z)$ cuando $z \to z_0$, ie, $\overline{f(W \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}$ para toda vecindad abierta W de z_0.

Dem: El punto 1 se obtiene del hecho que $f(z) = g(z)/(z-z_0)^m$ con $m \geq 1$ y $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $g(z_0) \neq 0$ ✓

Para 2, suponemos por contradicción que existe un abierto convexo $W \subseteq \Omega$ tal que $z_0 \in W$ y $\overline{f(W \setminus \{z_0\})} \neq \mathbb{C}$. Luego, si $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(W \setminus \{z_0\})}$ entonces tendríamos que $|f(z) - a| \geq \varepsilon$ para todo $z \in W \setminus \{z_0\}$.

$\Rightarrow g(z) := 1/(f(z) - a)$ cumple que $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$ para todo $z \in W \setminus \{z_0\}$ y, al ser acotada, tendríamos que g se extiende en una función holomorfa no-nula $\tilde{g} \in \mathcal{O}(W)$.

Como $f(z) = a + 1/g(z)$, se tiene que si g posee un cero de orden m en z_0 entonces f posee un polo de orden m en z_0, ie, la singularidad de f en z_0 no sería esencial $\lightning$ ∎

Cultura general El Gran Teorema de Picard señala que $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ posee una singularidad esencial en z_0, entonces para toda vecindad perforada $W \setminus \{z_0\}$, la función f alcanza infinitas veces (!) todo valor en $\mathbb{C}$, salvo quizás un punto (cf. $e^{1/z} \neq z_0 = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$)