Parte II: "Funciones meromorfas y Residuos"

En general, es un problema difícil entender el comportamiento de una función holomorfa cerca del borde de su dominio. Sin embargo, si nos restringimos a ciertos puntos del borde que sean aislados, es posible extender muchos resultados de la Parte I del curso.

§23. Series de Laurent

Def: Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sean $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$ tales que $R_1 < R_2$. Definimos el anillo abierto de centro z_0, de radio interior R_1, y de radio exterior R_2 mediante:

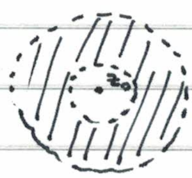
$$A(z_0; R_1, R_2) := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } R_1 < |z - z_0| < R_2 \}.$$

Del mismo modo, el anillo cerrado se define mediante

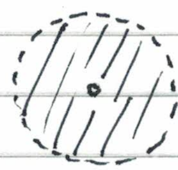
$$\overline{A}(z_0; R_1, R_2) := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2 \}.$$

⚠ **Notación**: $\mathbb{D}^* := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } 0 < |z| < 1 \} \overset{\text{def}}{=} A(0; 0, 1)$ es el "disco perforado"

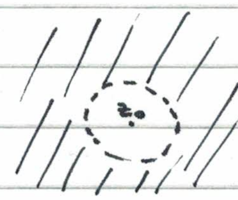
Ejemplos:



$0 < R_1 < R_2 < +\infty$



$R_1 = 0$, $R_2 < +\infty$



$R_1 < +\infty$, $R_2 = +\infty$

Def: Una serie de Laurent (centrada en $z_0 = 0$) es una serie de la forma

$$S(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ y donde $z \in \mathbb{C}^* \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Obs: Podemos escribir una serie de Laurent como suma de dos series de potencias al escribir $m = -n$ y $w = 1/z$ si $n < 0$:

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{m \geq 1} a_{-m} w^m$$

Por definición, diremos que la serie de Laurent $S(z)$ converge si las dos series de potencias anteriores convergen.

Explícitamente, si $R \in [0,+\infty]$ es el radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $R' \in [0,+\infty]$ es el radio de convergencia de $\sum_{m\geq 1} a_{-m} w^m$, entonces:

$S(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $1/R' < |z| < R$

ie, $S(z)$ converge en el anillo abierto $A(0; 1/R', R)$ (el cual es vacío si $1/R' \geq R$, ie, $R' \leq 1/R$).

Más aún, la teoría de series de potencias (ver §5) implica que $S(z)$ converge uniformemente en todo anillo <u>compacto</u> $\overline{A}(0; r_1, r_2) \subseteq A(0; 1/R', R)$.

Además, dado que

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{O}(D(0,R)) \quad y \quad G(w) = \sum_{m\geq 1} a_{-m} w^m \in \mathcal{O}(D(0,R'))$$

tenemos que $S(z)$ es holomorfa en $A(0; 1/R', R)$ y se calcula que

$$S'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n z^{n-1}$$

con convergencia uniforme en todo anillo compacto $\overline{A}(0; r_1, r_2) \subseteq A(0; 1/R', R)$.

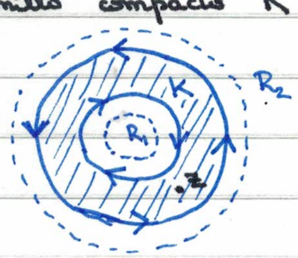
<u>Teorema</u>: Sea f una función holomorfa en el anillo abierto $A(z_0; R_1, R_2) \subseteq \mathbb{C}$ con $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$. Entonces, f admite un desarrollo en serie de Laurent (centrada en z_0) de la forma

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

con convergencia normal en todo compacto $K \subseteq A(z_0; R_1, R_2)$. Más aún, para todo $r \in \,]R_1, R_2[$ y todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,e^{-nit}\,dt$$

<u>Dem</u>: Reemplazando z por $z-z_0$, podemos asumir $z_0 = 0$. Consideremos un anillo compacto $K = \overline{A}(0; r_1, r_2) \subseteq A(0; R_1, R_2)$ con $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$



Aquí, $\partial K = \Gamma^-(0,r_1) \cup \Gamma(0,r_2)$ donde

$\Gamma^-(0,r_1)$: orientación horaria (ie, negativa)

$\Gamma(0,r_2)$: orientación anti-horaria (ie, positiva)

Luego, la fórmula de Cauchy implica que para todo $z \in A(0; r_1, r_2)$ se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Si $w \in \Gamma(0,r_2)$, entonces $|z| < r_2 = |w|$ (ie, $|z/w| < 1$) y luego

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\cdot\frac{1}{(1-z/w)} = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{w^{n+1}}$$

De manera similar, si $w \in \Gamma(0,r_1)$ entonces $|z| > r_1 = |w|$ (ie, $|w/z| < 1$) y así:

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-w/z)} = -\frac{1}{z}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^m = -\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{w^m}{z^{m+1}}$$

Así, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_2)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw\right)z^n + \sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_1)} f(w)\,w^m\,dw\right)z^{-m-1}.$$

Si escribimos $n := -m-1 \leq -1$ (ie, $m := -n-1$), entonces $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ con:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_2)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw \text{ si } n\geq 0, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_1)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw \text{ si } n\leq -1$$

Veamos que la integral $\int_{\Gamma(0,r)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw$ no depende de $r\in\,]R_1,R_2[$:
La fórmula de Cauchy aplicada a la función holomorfa $g(w) := f(w)/w^{n+1}$ y al compacto $K = \bar{A}(0;r_1,r_2) \subseteq A(0;R_1,R_2)$ implica que:

$$0 = \int_{\partial K} g(w)\,dw \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma(0,r_2)} g(w)\,dw - \int_{\Gamma(0,r_1)} g(w)\,dw$$

para todos $r_1 < r_2$ en el intervalo $]R_1,R_2[$ ✓ ∎

Ejemplo: La función $f(z) = \exp(1/z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*$. Además, su serie de Laurent (centrada en $z_0 = 0$) está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^n}$$

En particular, la "parte negativa" es infinita.

§24. Singularidades aisladas y Teorema de Casorati-Weierstrass

Def: Sea Ω una vecindad abierta de un punto $z_0\in\Omega$, y sea $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z_0\})$.
Decimos que z_0 es:

1. Una singularidad removible (o reparable) de f si f posee una extensión holomorfa $\tilde{f}\in\mathcal{O}(\Omega)$ (ie, $f(z) = \tilde{f}(z)\ \forall z\in\Omega\setminus\{z_0\}$).
2. Una singularidad no-removible de f (o simplemente una singularidad) si f no puede ser extendida a $\tilde{f}\in\mathcal{O}(\Omega)$.

Prop: Una función $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z_0\})$ posee una singularidad removible en z_0 si y sólo si los coeficientes a_n de su serie de Laurent centrada en z_0

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

verifican que $a_n = 0$ para todo $n < 0$.