

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y $\{f_n\}_{n \geq 0} \in \mathcal{O}(\Omega)$ sucesión de funciones holomorfas en Ω . Denotamos por $u_m := \prod_{n=0}^m f_n = f_0 \cdots f_m$ a la sucesión de productos parciales.

Decimos que el producto infinito $\prod f_n$ converge (resp. converge uniformemente) si la sucesión $\{u_m\}_{m \geq 0}$ converge (resp. converge uniformemente), y denotamos el límite por

$$P(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} f_n(z).$$

Obs: Si existe $C \in \mathbb{R}^{>0}$ con $C < 1$ tal que $|f_n(z)| < C \ \forall z \in \Omega$ y $\forall n \geq n_0$, entonces $\prod f_n \xrightarrow{\text{unif.}} 0$ (pues $C^n \rightarrow 0$). De manera similar, si $C > 1$ entonces $\prod f_n$ no converge si $|f_n(z)| > C \ \forall z \in \Omega$.

Consejón: Consideraremos productos infinitos donde $f_n \xrightarrow{z \rightarrow 1} 1$ uniformemente en todo compacto $K \subseteq \Omega$.

⚠ En particular, la rama principal del logaritmo $\ln(f_n)$ está bien definida en K para $n \geq n_0(K)$. Así, omitiendo finitos términos si fue necesario, tenemos que:

$$\prod f_n \text{ converge en } \Omega \Leftrightarrow \sum \ln(f_n) \text{ converge en } \Omega.$$

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo no-vacío, y $\prod f_n$ producto de funciones holomorfas en Ω con $f_n \neq 0$ en Ω . Sea $f_n := 1 + g_n$. Si:

- ① $\sum |g_n|$ converge uniformemente en todo $K \subseteq \Omega$ compacto; o bien
- ② $\sum g_n$ y $\sum |g_n|^2$ convergen unif. en todo $K \subseteq \Omega$ compacto.

Entonces,

$\prod f_n \longrightarrow P := \prod_{n=0}^{+\infty} f_n$ uniformemente en todo $K \subseteq \Omega$ compacto, donde $P \in \mathcal{O}(\Omega)$, $P \neq 0$, y además

"derivada logarítmica" $\rightarrow \frac{P'}{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n'}{f_n}$ en $\Omega \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1}(0) \right)$,

donde esta última serie converge uniformemente en todo $K \subseteq \Omega$ compacto (omitendo los finitos términos que se anulaban en K si fue necesario).

Dem: Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Tanto en ① como en ②, $\exists n_0$ tq para todo $n \geq n_0$ se tiene $\sup_K |g_n| \leq 1/2 \Rightarrow f_n = 1 + g_n$ no se anula en $K \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow \ln(f_n) = \ln(1 + g_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} g_n^k$$

Caso ①: Sea $C \in \mathbb{R}^{>0}$ tq para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \leq 1/2$ se tenga que $|\ln(1+w)| \leq C|w|$. Luego, para $p, q \geq n_0$ se tiene:

$$\left| \sum_{n=p}^q \ln(f_n) \right| = \left| \sum_{n=p}^q \ln(1+g_n) \right| \leq C \sum_{n=p}^q |g_n| < \varepsilon \quad \forall p, q \geq \exists N$$

$\Rightarrow v_n := \sum_{k=n_0}^n \ln(f_k)$ converge uniformemente en K a $v = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \ln(f_k) \in \mathcal{O}(K)$

Luego, $u_n = \prod_{k=n_0}^n f_k \stackrel{d}{=} \exp(v_n)$ converge uniformemente a la función holomorfa $\exp(v)$, i.e., $\prod f_n$ converge uniformemente a la función holomorfa $P := \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k \right) \cdot \exp(v)$ en todo compacto de Ω ✓

Caso ②: Sea $C' \in \mathbb{R}^{>0}$ tq para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \leq 1/2$ se tenga que $|\ln(1+w) - w| \leq C'|w|^2$. Luego, para $p, q \geq n_0$ se tiene:

$$\left| \sum_{n=p}^q \ln(f_n) - \sum_{n=p}^q g_n \right| = \left| \sum_{n=p}^q (\ln(1+g_n) - g_n) \right| \leq C' \sum_{n=p}^q |g_n|^2 < \varepsilon \quad \forall p, q \geq \exists N$$

$\Rightarrow v_n = \sum_{k=n_0}^n \ln(f_k)$ converge uniformemente en K a $v = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \ln(f_k) \in \mathcal{O}(K)$, y tal como antes deducimos que $\prod f_n \xrightarrow{\text{unif}} P = \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k \right) \cdot \exp(v)$ en todo compacto $K \subseteq \Omega$ ✓

En ambos casos, si $P = \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k \right) \cdot \exp(v)$, la derivada logarítmica de P se define mediante P'/P , donde:

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{f_k'}{f_k} + v' \quad \text{con} \quad v' \stackrel{d}{=} \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\ln(f_k))' = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{f_k'}{f_k}$$

$$\Rightarrow \frac{P'}{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_k'}{f_k} \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de la demostración anterior tenemos que:

Corolario: Con las hipótesis anteriores, el conjunto de ceros del producto infinito $P(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ está dado por $\bigcup_{n \geq 0} f_n^{-1}(0)$. En particular, $P \equiv 0$ en Ω si y sólo si alguno de sus factores f_n es nulo en Ω .

Ejercicio Considere el producto infinito $P(z) := \prod_{n=0}^{+\infty} (1+z^{2^n})$.

① Determinar su radio de convergencia $R \in [0, +\infty]$.

② Probar que $P(z) = \frac{1}{1-z}$ para todo $z \in \mathbb{D}(0, R)$.

Ejemplo importante (Euler, 1735): Veamos que para todo $z \in \mathbb{C}$:

(53)

$$\sin(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right).$$

Sea $P(z) := z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right) = z \prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$, con $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}$

y con $g_n(z) := -\frac{z^2}{n^2 \pi^2}$. Dado que $\sum |g_n|$ converge uniformemente en todo $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, tenemos que $P \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es una función entera.

Además, los ceros de P están dados por

$$V(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P(z) = 0\} = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

y son todos de multiplicidad 1.

$\Rightarrow g(z) := P(z) / \sin(z) \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$ función entera sin ceros.

Más aún, el Teorema anterior implica que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{n^2 \pi^2 - z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right)$$

i.e., $P'/P = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ con $S_N(z) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{z - n\pi}$ (función impar!)

En particular, P'/P es una función π -periódica y luego:

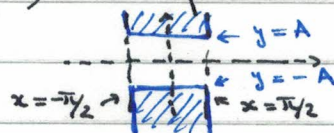
$$(*) \quad \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{P'(z)}{P(z)} - \cotg(z) \text{ es entera y } \pi\text{-periódica.}$$

← (función impar!)

Veamos que g es constante:

Consideremos el corado $\Omega_A \subseteq \mathbb{C}$, con $A \in \mathbb{R}^{>0}$ fija, dado por:

$$\Omega_A := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ tq } |x| \leq \pi/2, |y| \geq A\}$$



Ejercicio Probar que para todo $z = x + iy \in \Omega_A$ se tiene:

- ① $|\cotg(z)|^2 \leq \coth^2(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\cosh^2(y)}{\sinh^2(y)}$ y luego $|\cotg(z)| \leq C_1 := \coth(A)$.
- ② $|1/z| \leq 1/A$ y $|2z/(n^2 \pi^2 - z^2)| \leq \frac{2|z|}{n^2 \pi^2}$

Así, $\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ tq $|\frac{g'(z)}{g(z)}| \leq C_1 + C_2 |z| \quad \forall z \in \Omega_A$ ✓ Dado que $g'(z)/g(z)$ es entera, y $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ tq } |x| \leq \pi/2, |y| \leq A\}$ compacto, podemos asumir (modificando C_1, C_2 si fuere necesario) que:

$$(**) \quad |g'(z)/g(z)| \leq C_1 + C_2 |z| \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } |\operatorname{Re}(z)| \leq \pi/2.$$

Dado que $g'(z)/g(z)$ es π -periódica (por (*)): $|g'(z)/g(z)| \leq C_1 + C_2 |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$
 luego, la desigualdad de Cauchy (ver §14, p. 36) implica que $g'(z)/g(z)$ es un polinomio de grado ≤ 1 , π -periódico ($\Rightarrow$ constante), impar!

i.e., $g'(z) \equiv 0$ en $\mathbb{C} \Rightarrow g(z)$ es una función constante.

Dado que $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z) \right) / (\sin(z)/z) = 1$, $g(z) \equiv 1$ en $\mathbb{C}$.

Así, deducimos que

$$\sin(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Más aún, la derivada logarítmica de la anterior implica:

$$\operatorname{ctg}(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{n^2 \pi^2 - z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Derivando esto último, obtenemos que:

$$\frac{1}{\sin^2(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

Consecuencia (Solución al Problema de Basilea): Sea

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

La última identidad de Euler, evaluada en $z = \pi/2$, implica que

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{\pi^2}{4} (2n-1)^2} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \text{ Luego:}$$

$$S \stackrel{\text{dy}}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \stackrel{\text{dy}}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} S + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow S = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} \quad \blacksquare$$

Cultura general En general, se puede probar que para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} B_{2n}$$

donde $\zeta(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ es la función zeta de Riemann y donde los $B_{2n} \in \mathbb{Q}$ son los números de Bernoulli. Los valores $\zeta(2n+1)$ son mucho más misteriosos!

Ejercicios

① Probar que $\sinh(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2} \right)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

② Deducir que $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$

Ejercicio Probar la fórmula de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \dots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)} \dots$$

Obs: Esto permite calcular $\operatorname{vol}_{\mathbb{R}^m}(B^m) = \begin{cases} \pi^m / m! & \text{si } m = 2m \\ \frac{2^{m+1} \pi^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)} & \text{si } m = 2m+1 \end{cases}$, donde $B^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|_{\text{euc}} \leq 1\}$.