§21. Derivación bajo el signo integral y Función Γ de Euler

En esta sección estudiaremos funciones holomorfas definidas a partir de integrales, siendo el caso más emblemático la función Γ de Euler.

Teorema: Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío. Sea
$$F : \Omega \times [a,b] \to \mathbb{C}, \quad (z,t) \mapsto F(z,t)$$
tal que:

① $F(z, t_0)$ es holomorfa para todo $t_0 \in [a,b]$ fijo.

② F es continua en $\Omega \times [a,b]$.

Entonces, la función
$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) := \int_a^b F(z,t)\, dt$$
es holomorfa en Ω, y para todo $m \geq 0$ se tiene que
$$f^{(m)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^m}{\partial z^m} F(z,t)\, dt \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Dem: Un cambio de variable lineal nos permite asumir $a = 0$ y $b = 1$.
Veamos que f es límite uniforme de sumas de Riemann:
Para cada $n \geq 1$, consideremos la suma de Riemann
$$f_n(z) := \sum_{i=1}^{n} F(z, t_i)\, \Delta t_i := \sum_{j=1}^{n} F\left(z, \frac{j}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F\left(z, \frac{j}{n}\right)$$

$\overset{①}{\Rightarrow} f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ ✓ Veamos que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformemente a f en todo compacto $K \subseteq \Omega$: Para esto, recordemos que una función continua en un compacto es uniformemente continua (Teorema de Heine - Cantor):

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sup_K |F(z,t_1) - F(z,t_2)| < \varepsilon$ siempre que $|t_1 - t_2| < \delta$.

Así, si $n > 1/\delta$ y $z \in K$, tenemos que:
$$\begin{aligned}
|f_n(z) - f(z)| &\overset{\text{def}}{=} \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)/n}^{j/n} F(z, j/n) - F(z,t)\, dt \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{(j-1)/n}^{j/n} |F(z, j/n) - F(z,t)|\, dt \\
&< \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon \quad ✓
\end{aligned}$$

Así, $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ en todo compacto $K \subseteq \Omega$, de donde deducimos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y la fórmula para $f^{(m)}$ (cf. Ejercicio útil en §20, p. 52) ■

Obs: Usando herramientas de "Teoría de la medida e Integración" se pueden dar pruebas alternativas y versiones mejoradas del resultado anterior.

Veamos una aplicación importante de lo anterior a la función Γ de Euler:

Def: La función Γ de Euler está definida mediante la fórmula

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$$

donde $t^{z-1} \overset{\text{def}}{=} \exp((z-1)\ln(t))$.

Prop: La función Γ es holomorfa en el abierto $\{z\in\mathbb{C} \text{ tq } Re(z)>0\}$.

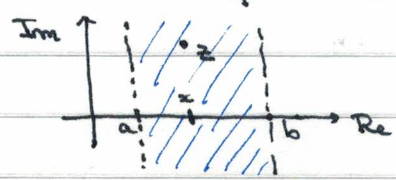
Dem: Notar que si $z = x \in \mathbb{R}$ es real, entonces $\Gamma(x)$ converge $\forall x>0$.

En efecto, $\left|\int_0^{\varepsilon} t^{x-1} e^{-t}\,dt\right| \le C \int_0^{\varepsilon} t^{x-1}\,dt = C\frac{\varepsilon^x}{x} < +\infty$ cerca de $t=0$

Además, $\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt\right| \le C' \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{t/2}\cdot e^{-t}\,dt = 2C' e^{-\varepsilon/2} < +\infty$ ✓

Sea $z\in\mathbb{C}$ con $Re(z) := x > 0$, y consideremos $a := x/2$ y $b := 2x$.

Consideremos $\Omega_{a,b} := \{z\in\mathbb{C} \text{ tq } a < Re(z) < b\}$



y veamos que Γ es holomorfa en $\Omega_{a,b}$. Para ello, consideremos $\varepsilon_n := 1/n \in\,]0,1[$ $(n\ge 2)$ y definamos

$$f_n(z) := \int_{\varepsilon_n}^{1/\varepsilon_n} e^{-t}\, t^{z-1}\,dt \overset{\text{def}}{=} \int_{1/n}^{n} t^{z-1} e^{-t}\,dt .$$

Dado que $F(z,t) := t^{z-1}e^{-t}$ es continua en $\Omega_{a,b}\times[1/n, n]$ y $F(z,t_0)\in\mathcal{O}(\Omega_{a,b})$ para todo $t_0\in[1/n,n]$ fijo, el Teorema anterior asegura que $f_n\in\mathcal{O}(\Omega_{a,b})$ para todo n ✓

Veamos que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} \Gamma$ en $\overline{\Omega_{a,b}}$ cuando $n\to+\infty$. Para esto:

$$|\Gamma(z) - f_n(z)| \le \left|\int_0^{\varepsilon_n} t^{z-1}e^{-t}\,dt\right| + \left|\int_{\varepsilon_n^{-1}}^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt\right|$$

$$\le \int_0^{\varepsilon_n} |t^{z-1}|\, e^{-t}\,dt + \int_{\varepsilon_n^{-1}}^{+\infty} |t^{z-1}|\, e^{-t}\,dt$$

$|a^b| = a^{Re(b)}$ para $a\in\mathbb{R}^{>0}$, $b\in\mathbb{C}$

$$= \int_0^{\varepsilon_n} t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_{\varepsilon_n^{-1}}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

$$\le C\frac{\varepsilon_n^x}{x} + \underbrace{2C' e^{-1/2\varepsilon_n}}_{\longrightarrow 0 \text{ si } n\to+\infty}$$

$$C\frac{\varepsilon_n^x}{x} \underset{a\le x}{\le} C\frac{\varepsilon_n^x}{a} \underset{\varepsilon<1}{\le} C\frac{\varepsilon_n^a}{a} \longrightarrow 0 \text{ si } n\to+\infty$$

Luego Γ es holomorfa en $\Omega_{a,b}$, al ser límite uniforme de funciones holomorfas $\Rightarrow$ Γ holomorfa en $\{z\in\mathbb{C} \text{ tq } Re(z)>0\}$ ∎

Lema: Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 0$ se tiene que

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

En particular, $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dem: Integrando por partes, tenemos que

$$\Gamma(z+1) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+,\, R \to +\infty} \int_\varepsilon^R t^z e^{-t}\,dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+,\, R \to +\infty} \left(\left[t^z (-e^{-t}) \right]_{t=\varepsilon}^{t=R} + \int_\varepsilon^R z t^{z-1} e^{-t}\,dt \right)$$

$$= z\,\Gamma(z) \checkmark$$

Además, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = 1 = 0!$ y luego se deduce que $\Gamma(n+1) = n!$ por inducción ✓ ■

Prop: La función Γ de Euler admite una extensión analítica a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^{\leq 0}$, que seguiremos denotando Γ.

Dem: Si $z \in \mathbb{C}$ verifica $Re(z) > -(n+1)$ para $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\tilde{\Gamma}(z) := \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} \quad \text{para } z \notin \mathbb{Z}^{\leq 0}$$

Dicha función es holomorfa, y verifica $\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$ si $Re(z) > 0$ gracias al lema anterior ✓ ■

Obs: La formula anterior, y el hecho que $\Gamma(1) = 1$, implica que $\lim_{z \to -n} |\Gamma(z)| = +\infty$. En part, no podemos extender Γ a $\mathbb{Z}^{\leq 0}$.

Ejercicio: Calcular para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z)$.

Para concluir, estudiamos una variante importante de la función Γ: la función Beta (nombrada y estudiada por Euler y Legendre, en honor a Jacques Binet).

Def: Sean $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$. La función Beta es la función en 2 variables

$$B(x,y) := \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

En particular, $B(x,y) = B(y,x)$.

Ejercicio Probar, usando que $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$, que para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$

① $B(x,y) = B(x+1,y) + B(x,y+1)$.

② $B(x,y+1) = \frac{y}{x} B(x+1,y) = \frac{y}{x+y} B(x,y)$.

Prop: Para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$, tenemos que

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt$$

Dem: Tenemos que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty} s^{y-1} e^{-s}\, ds\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)}\, dt\, ds$$

Para calcular $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(t+s)}\, dt$ consideramos $t = su$ ($\Rightarrow dt = s\, du$)

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(t+s)}\, dt = s^x \int_0^{+\infty} e^{-(u+1)s} u^{x-1}\, du \qquad (*)$$

Notando que $\forall \lambda > 0$ tenemos que

$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-\lambda t}\, dt \underset{u=\lambda t}{=} \frac{\Gamma(z)}{\lambda^z} \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(t+s)}\, dt\right) s^{y-1}\, ds \overset{(*)}{=} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(u+1)s} s^{x+y-1}\, ds\right) u^{x-1}\, du$$

$$\underset{\substack{z=x+y\\ \lambda=u+1}}{\overset{(**)}{=}} \int_0^{+\infty} \frac{\Gamma(x+y)}{(u+1)^{x+y}} u^{x-1}\, du$$

Finalmente, $B(x,y) \overset{\text{dy}}{=} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du$ ✓ ∎

Ejercicio útil Probar que para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene:

① $B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta)\, d\theta$ [Indicación: $t = \tan^2\theta$]

② $B(x,y) = \int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}\, dw$ [Indicación: $w = \sin^2\theta$].

Ejemplo: Sea $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \overset{t=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2}\, dt \overset{\text{dy}}{=} \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Por otro lado, $B(1/2, 1/2) = \Gamma(1/2)^2/\Gamma(1) = \Gamma(1/2)^2$.

Finalmente, $B(1/2,1/2) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2\cdot 1/2 - 1}(\theta) \sin^{2\cdot 1/2 - 1}(\theta)\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$

$\Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y así $I = \sqrt{\pi}/2$.

Ejercicio Calcular las siguientes integrales:

① $\int_0^{2\pi} \sin^4(\theta)\, d\theta$

② $\int_1^3 (x-1)^{10}(x-3)^3\, dx$

Obs: Las funciones Γ y B son muy usadas en Probabilidad y Estadística!