§20. Espacios de Fréchet y convergencia de funciones holomorfas

Sea $\Bbbk = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\Omega \subseteq \Bbbk$ no-vacío. Recordemos que una sucesión $\{f_n : \Omega \to \Bbbk\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones a valores en $\Bbbk$ converge uniformemente a $f : \Omega \to \Bbbk$ si:

Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y todo $x \in \Omega$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

No es difícil probar (usando la desigualdad triangular) que límite uniforme de funciones continuas es continua.

Sin embargo, la sucesión de funciones analíticas reales

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$$

converge uniformemente a $f \equiv 0$, pero $f_n'(x) = \cos(nx)$ no converge.

En esta sección, veremos que las funciones holomorfas se comportan mucho mejor al considerar convergencia uniforme sobre compactos de $\mathbb{C}$, lo cual nos servirá también como excusa para introducir algunas nociones que son utilizadas en Análisis Funcional.

Def: Sea $\Bbbk = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y V un $\Bbbk$-espacio vectorial. Decimos que una función $p : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ es una semi-norma si:

① $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ para todo $\lambda \in \Bbbk$ y todo $x \in V$.

② $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in V$.

Ejemplo principal: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $V := \mathcal{C}^0(\Omega)$ espacio vectorial de funciones continuas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ a valores complejos.

Para todo compacto no-vacío $K \subseteq \Omega$, definimos la seminorma

$$p_K : \mathcal{C}^0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad f \longmapsto p_K(f) := \sup_K |f|$$

Así, obtenemos una familia de semi-normas $\{p_K\}_{K\subseteq\Omega}$ indexada por todos los compactos $K \subseteq \Omega$. En particular, $f \equiv 0 \iff p_K(f) = 0 \;\; \forall K \subseteq \Omega$.

Recuerdo: Si X es un conjunto (no-vacío), una topología en X es una colección $\tau = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X tales que:

① $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

② Si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau$

③ Si $\{\mathcal{U}_j\}_{j\in J} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j \in \tau$.

Los elementos de τ son llamados **abiertos** de X, y sus complementos **cerrados**.

Una función $f: X \to Y$ entre dos espacios topológicos es **continua** si $\forall\, V \subseteq Y$ abierto, la preimagen $f^{-1}(V) \subseteq X$ es abierto.

Esto generaliza en gran medida la discusión en §2 y §3.

Ejemplos:

① En $X = \mathbb{R}$, los abiertos son la unión (arbitraria) de intervalos abiertos.

② En $X = \mathbb{C}$, los abiertos son la unión (arbitraria) de discos abiertos.

③ En $X \times Y$ la **topología producto** se obtiene al declarar como abiertos los conjuntos de la forma $\mathcal{U} \times V$, con $\mathcal{U} \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos, y sus uniones arbitrarias.

Def: Sea $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y V un k-e.v. Decimos que V es un **espacio vectorial topológico** si:

① V es un espacio topológico.

② La suma $+ : V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$ es continua.

③ La mult. por escalares $\times : k \times V \to V$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ es continua.

Obs: Dado que la suma es continua, si $x \in V$ y $\mathcal{U} \subseteq V$ es un abierto tal que $x \in \mathcal{U}$, entonces existe $\mathcal{U}_0$ abierto tal que $0 \in \mathcal{U}_0$ y $\mathcal{U} = x + \mathcal{U}_0 \overset{\text{def}}{=} \{x + y,\ y \in \mathcal{U}_0\} \rightsquigarrow$ ¡Basta entender las vecindades del $0 \in V$!

Ejemplo principal: Sea $V := \mathcal{C}^0(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ continua}\}$, junto con la familia de semi-normas $\{p_K\}_{K \subseteq \Omega}$ (con $p_K(f) = \sup_K |f|$). Dotamos V de una estructura de espacio vectorial topológico declarando que las vecindades de $0 \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ son los conjuntos:

$$\mathcal{U}_{K,\varepsilon} := \{f \in \mathcal{C}^0(\Omega) \text{ tal que } p_K(f) < \varepsilon\} \quad \text{con } \varepsilon > 0 \text{ y } \overset{\text{compacto} \neq \phi}{K} \subseteq \Omega$$

(y sus uniones arbitrarias). Así, decimos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}^0(\Omega)$ es abierto si $\forall f \in \mathcal{U}$, existe un $\mathcal{U}_{K,\varepsilon}$ tal que $f + \mathcal{U}_{K,\varepsilon} \subseteq \mathcal{U}$.

Terminología: La topología anterior definida en $\mathcal{C}^0(\Omega)$ se conoce como la **topología de la convergencia uniforme sobre compactos** de Ω. Así, una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^0(\Omega)$ converge a $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ si y sólo si $f_n \to f$ uniformemente sobre todo compacto $K \subseteq \Omega$ ($\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} p_K(f_n - f) = 0$ para todo $K \subseteq \Omega$ compacto).

Obs importantes:

① La discusión anterior para $\mathcal{C}^0(\Omega)$ se generaliza literalmente al caso de funciones holomorfas $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^0(\Omega)$. Así, $(\mathcal{O}(\Omega), \{p_K\}_{K\subseteq\Omega})$ es un sub-espacio vectorial topológico de $\mathcal{C}^0(\Omega)$.

② Los espacios vectoriales topológicos $\mathcal{C}^0(\Omega)$ y $\mathcal{O}(\Omega)$ son localmente convexos (ie, su topología puede definirse a partir de una familia, a priori arbitraria, de semi-normas).

③ Mejor aún, $\mathcal{C}^0(\Omega)$ y $\mathcal{O}(\Omega)$ son espacios vectoriales topológicos cuya topología está definida a partir de una familia numerable de semi-normas: Basta escribir $\Omega = \bigcup_{n\geq 0} K_n$ con $K_n \subseteq \mathrm{int}(K_{n+1})$ compactos, y considerar $\{p_{K_n}\}_{n\geq 0}$ familia numerable de semi-normas.

④ Como consecuencia de ③, $\mathcal{C}^0(\Omega)$ y $\mathcal{O}(\Omega)$ son metrizables, ie, su topología se define a partir de una métrica $d(x,y)$. Explícitamente:

$$d(x,y) := \sum_{n\geq 0} \frac{\min\{1, p_{K_n}(x-y)\}}{2^n} \qquad \forall x,y \in V = \mathcal{C}^0(\Omega) \text{ ó } \mathcal{O}(\Omega)$$

Def: Sea V un espacio vectorial topológico. Entonces:

① Una sucesión de Cauchy en V es una sucesión $\{x_n\}_{n\geq n_0} \subseteq V$ tal que para toda vecindad $\mathcal{U}$ de $0\in V$, existe $N\in\mathbb{N}^{\geq n_0}$ tal que $x_n - x_m \in \mathcal{U}$ para todos $n,m \geq N$.

② Decimos que V es completo si es metrizable y toda sucesión de Cauchy en V converge.

③ Un espacio de Fréchet es un espacio vectorial topológico localmente convexo, metrizable y completo.

Ejemplo:

① Todo sub-espacio vectorial topológico cerrado de un espacio de Fréchet es un espacio de Fréchet.

② Dado que $\mathbb{C}$ es completo, toda sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\geq n_0}$ en $(\mathcal{C}^0(\Omega), \{p_{K_n}\}_{n\geq 0})$ converge a una función $f\in\mathcal{C}^0(\Omega)$, ie, $(\mathcal{C}^0(\Omega), \{p_{K_n}\}_{n\geq 0})$ es un espacio de Fréchet.

Veamos ahora el caso de funciones holomorfas. En particular, el resultado siguiente justifica que la topología de la convergencia uniforme sobre compactos es la "buena" topología en nuestro contexto:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y sea $\{f_n\}_{n \geq n_0}$ una sucesión en $\mathcal{O}(\Omega)$. Supongamos que f_n converge a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uniformemente en todo compacto $K \subseteq \Omega$. Entonces:

① $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

② Para todo $m \geq 0$, la sucesión de derivadas $\{f_n^{(m)}\}_{n \geq n_0}$ converge a $f^{(m)}$ uniformemente en todo compacto $K \subseteq \Omega$.

Dem: Como f es límite uniforme de funciones continuas, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$.
Sea $K \subseteq \Omega$ compacto con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos, entonces:

$$\forall z \in \operatorname{int}(K), \quad f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f_n(w)}{w - z}\, dw \qquad (\text{Cauchy})$$

Dado que f_n converge uniformemente a f en el compacto ∂K, y dado que $|w - z| \geq \delta := d(z, \mathbb{C} \setminus K) > 0$, tomando límite obtenemos:

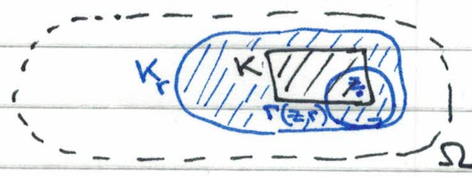
$$\forall z \in \operatorname{int}(K), \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

$\Rightarrow f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ✓ (cf. §13). Para ver ②, fijemos $r > 0$ tal que $r < \delta_K$ suficientemente pequeño.
Entonces, para todo $z \in \operatorname{int}(K)$ tenemos:

$$f_n^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma(z,r)} \frac{f_n(w)}{(w - z)^{m+1}}\, dw \quad \text{y} \quad f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\Gamma(z,r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{m+1}}\, dw$$

$$\Rightarrow |f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{r^m} \sup_{\Gamma(z,r)} |f_n - f| \qquad (*)$$

Sea $K_r := \{z \in \Omega \text{ tq } d(z, K) \leq r\}$ compacto contenido en Ω (pues $r < \delta_K \overset{\text{def}}{=} d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ ✓)



$$\Rightarrow \sup_K |f_n^{(m)} - f^{(m)}| \overset{(*)}{\leq} \frac{m!}{r^m} \sup_{K_r} |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0, \quad \text{i.e.,} ② ✓ \blacksquare$$

Corolario: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío. Entonces, el espacio vectorial $\mathcal{O}(\Omega)$ es un sub-espacio cerrado del espacio de Fréchet $(\mathcal{C}^0(\Omega), \{p_K\}_{K \subseteq \Omega})$.
En particular, $(\mathcal{O}(\Omega), \{p_K\}_{K \subseteq \Omega})$ es un espacio de Fréchet.

Dem: Simplemente una reformulación del resultado anterior ✓ ■

Ejercicio útil Sea $\sum f_n$ una serie de funciones holomorfas, con $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$.
Si $\sum f_n$ converge uniformemente en todo compacto de Ω a $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, probar que:

① $F \in \mathcal{O}(\Omega)$.

② Para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $F^{(m)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(m)}$.