La principal aplicación del Teorema de la aplicación abierta es:

Teorema de Inversión Global: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función holomorfa inyectiva. Entonces:

1. $f(\Omega)$ es un abierto de $\mathbb{C}$.
2. $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.
3. $f : \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ es un biholomorfismo.

Dem: Como f es una función abierta, $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto. Así, $f : \Omega \to f(\Omega)$ es una biyección continua abierta (ie, un homeomorfismo). Si se tuviera que $f'(z_0) = 0$ para cierto $z_0 \in \Omega$, entonces

$$m = \min\{n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \geq 2$$

y luego f no sería localmente inyectiva en una vecindad de z_0 $\lightning$
$\Rightarrow f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$ y luego el Teorema de inversión local implica que f^{-1} es holomorfa ✓ ■

Ejercicio Dar un contraejemplo de lo anterior en el caso de funciones reales.

§19. Principio del máximo y Lema de Schwarz

El principio del máximo es otra manifestación espectacular de la "rigidez" de las funciones holomorfas.

Teorema (Principio del máximo): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces:

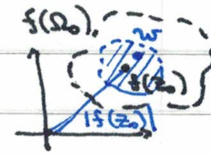
1. Si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)| = \sup_{\Omega} |f|$, entonces f es constante en la componente conexa de Ω que contiene a z_0.
2. Para todo compacto $K \subseteq \Omega$ se tiene que:

$$\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|.$$

y además: $\max_K \mathrm{Re}(f) = \max_{\partial K} \mathrm{Re}(f)$ y $\max_K \mathrm{Im}(f) = \max_{\partial K} \mathrm{Im}(f)$.

Dem: Para ①, supongamos f no-constante en la comp. conexa Ω_0 de Ω que contiene a z_0 y que $|f(z_0)| = \sup_{\Omega} |f| \overset{dy}{=} \sup_{\Omega_0} |f|$.

Como f es abierta en Ω_0, la imagen $f(\Omega_0)$ es una vecindad abierta de z_0 y luego $\exists\, r_0 \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $D(f(z_0, r_0)) \subseteq f(\Omega_0)$



$\Rightarrow \exists\, w = f(z) \in D(f(z_0), r_0)$ tal que $z \in \Omega_0$ y además:

$w \neq f(z_0)$ y además $|f(z_0)| < |w| \overset{dy}{=} |f(z)|$

una contradicción. ↳ sino: $f(\Omega_0) \subseteq \overline{D}(0, |f(z_0)|)$ ↯

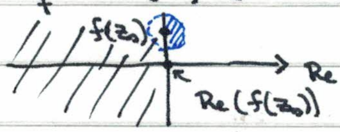
Veamos ② para $u := \mathrm{Re}(f)$ (la parte imaginaria es análoga):

Si tuviéramos que

$$\max_{\partial K} u < \max_{K} u \Rightarrow \exists\, z_0 \in \mathrm{int}(K) \overset{dy}{=} K \setminus \partial K \text{ tq } u(z_0) = \max_K u$$

Consideremos la componente conexa Ω_0 de z_0 en el abierto $\mathrm{int}(K)$ y veamos que f es constante en Ω_0 ($\Rightarrow u$ también):

En caso contrario, $f(\Omega_0)$ sería una vecindad abierta de $f(z_0)$ contenida en $\{ w \in \mathbb{C} \text{ tq } \mathrm{Re}(w) \leq \mathrm{Re}(f(z_0)) \overset{dy}{=} u(z_0) \}$



lo cual es imposible ↯

Así, f es constante en Ω_0 y luego $u|_{\partial \Omega_0} = u(z_0)$ por continuidad de $f = u + iv$. Finalmente, dado que

$$\emptyset \neq \partial \Omega_0 \subseteq \partial(\mathrm{int} K) \overset{dy}{=} \overline{\mathrm{int} K} \setminus \mathrm{int} K \subseteq \overline{K} \setminus \mathrm{int} K \overset{dy}{=} \partial K$$

tendríamos que $\max_K u = u(z_0)$ se alcanza también en ∂K ↯ ■

Ejercicio: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y sea $f \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ (i.e., $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$). Probar que si $|f|$ alcanza su mínimo en $\Omega \Rightarrow f$ constante.

Una aplicación del Principio del máximo es el "Lema de Schwarz", que nos da información cuantitativa sobre el módulo de una función holomorfa de la cual conocemos cotas globales y existencia de ciertos ceros:

Lema de Schwarz: Sea $f \in \mathcal{O}(D(z_0, R))$ para $R \in]0, +\infty[$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $\sup_{D(z_0,R)} |f| = M < +\infty$ y $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, entonces:

① $|f(z)| \leq M \left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^m$ para todo $z \in D(z_0, R)$.

② Si existe $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ tal que ① es una igualdad, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = M$ y tal que $f(z) = \lambda \left(\frac{z - z_0}{R} \right)^m$ para todo $z \in D(z_0, R)$.

Dem: Definamos $g(z) = f(z)/(z-z_0)^m$. Dado que f posee un cero de orden $n \geq m$ en z_0, existe $h \in \mathcal{O}(D(z_0,R))$, $h(z_0) \neq 0$, y tal que $f(z) = (z-z_0)^n h(z)$ con $n \geq m$ $\Rightarrow$ g es holomorfa en $D(z_0,r)$ $\forall r < R$.
Al aplicar el principio del máximo a g en $\overline{D}(z_0,r)$ tenemos que:

$$\max_{\overline{D}(z_0,r)} |g| = \max_{\Gamma(z_0,r)} |g| \leq \frac{M}{r^m}$$

Haciendo $r \to R$, tenemos que $\sup_{D(z_0,R)} |g| \leq \frac{M}{R^m}$ y luego obtenemos ① ✓
Si hay igualdad en ①, entonces g alcanza su supremo en un punto de $D(z_0,r)$ y luego $g(z) \equiv \mu := \frac{\lambda}{R^m}$ es constante $\rightsquigarrow$ ② ✓ ■

Ejercicio Sea $\mathbb{D} = \{|z|<1\}$ y $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa tal que $f(0) = 0$. Probar que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y que $|f'(0)| \leq 1$.

Ejemplo importante (Automorfismos del disco unitario $\mathbb{D}$):
Para todo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, definimos

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\Omega) &:= \{ f : \Omega \to \Omega \text{ biholomorfismo} \} \\ &= \{ f : \Omega \to \Omega \text{ holomorfa y biyectiva} \} \end{aligned}$$ (Teo. de Inversión Global)

Veamos que si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ entonces:

$$f(z) = \lambda \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \quad \text{con } |\lambda| = 1 \text{ y } a \in \mathbb{D}.$$

(**Ejercicio** Verificar que $a = f^{-1}(0)$ y $\lambda = (1-|a|^2)^{-1} f'(0)$.)

Comencemos por convencernos que dichas f son automorfismos de $\mathbb{D}$:
Si $\lambda = 1$ y definimos $\varphi_a(z) := (z-a)/(1-\bar{a}z)$ para $z \in \mathbb{D}$, entonces $|1-\bar{a}z| \geq 1 - |a||z| > 0$ pues $a, z \in \mathbb{D}$ y además:

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} \leftarrow \boxed{\text{Ejercicio}}$$

$\Rightarrow \varphi_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Además, para $w \in \mathbb{D}$ tenemos que

$$w = \varphi_a(z) \iff w(1-\bar{a}z) = z - a \iff w + a = z(1+\bar{a}w) \overset{\text{dy}}{\iff} z = \varphi_{-a}(w)$$

Así, $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$ y luego $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Ejercicio Probar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ actúa transitivamente en $\mathbb{D}$, i.e., para todos $a, b \in \mathbb{D}$, existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ tal que $f(a) = b$.
[Indicación: Considerar $f = \varphi_{-b} \circ \varphi_a$]

En el caso general en que $|\lambda| = 1$, ie, $\lambda = e^{i\theta}$ para $\theta \in \mathbb{R}$.
Por ejemplo, $h_\lambda(z) := \lambda z = e^{i\theta} z$ es la rotación en ángulo θ
y luego $h_\lambda \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Así,

$$f(z) = h_\lambda \circ \varphi_a(z) = \lambda \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$$

Recíprocamente: si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ y escribimos $a := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$, entonces

$$g := f \circ \varphi_a^{-1} = f \circ \varphi_{-a} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \quad \text{y} \quad g(0) = f(a) = 0$$

Lema de Schwarz $\Rightarrow |g(z)| \le |z| \ \forall z \in \mathbb{D}$.
Reemplazando g por $g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, obtenemos $|g^{-1}(z)| \le |z| \ \forall z \in \mathbb{D}$
y luego $|z| = |g^{-1}(g(z))| \le |g(z)| \Rightarrow |g(z)| = |z| \ \forall z \in \mathbb{D}$
y luego el caso de igualdad en el Lema de Schwarz implica:
$g(z) = h_\lambda(z) = \lambda z$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$
$\Rightarrow f = g \circ \varphi_a = h_\lambda \circ \varphi_a$ y luego f es de la forma deseada!

<u>Corolario</u>: Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa arbitraria. Entonces, se verifica la desigualdad

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D},$$

y la igualdad se alcanza si y sólo si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

<u>Dem</u>: Si, tal como en el Ejemplo anterior, consideramos

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \Rightarrow \varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$$

y luego $\varphi_a'(0) = 1-|a|^2$ y $\varphi_a'(a) = 1/(1-|a|^2)$.
Si fijamos $z_0 \in \mathbb{D}$ y consideramos $g := \varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{-z_0}$, que cumple $g(0) = 0$ por construcción y además $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$
Lema de Schwarz $\Rightarrow |g(z)| \le |z| \ \forall z \in \mathbb{D}$ y $|g'(0)| \le 1$. Dado que:

$$g'(0) = \varphi'_{f(z_0)}(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \cdot \varphi'_{-z_0}(0) = \frac{1}{1-|f(z_0)|^2} \cdot f'(z_0) \cdot (1-|z_0|^2)$$

y luego $|g'(0)| \le 1$ equivale a la desigualdad deseada ✓
Si la igualdad $|g'(0)| = 1 \Leftrightarrow \lim_{z \to 0} |g(z)/z| = 1$ se verifica, entonces $g(z)/z \equiv \lambda$ es constante, con $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$
$\Rightarrow g(z) = \lambda z$ es un automorfismo de $\mathbb{D} \Rightarrow f$ también ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (semi-plano de Poincaré).
Probar que $f : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto i\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ está bien definida y es un biholomorfismo.