

§18. Teorema de la aplicación abierta

(42)

El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento local de las funciones holomorfas (tanto en puntos "regulares" como en puntos "críticos"), y deducir el Teorema de la aplicación abierta y el Teorema de Inversión global.

Def: Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ dos abiertos no-vacíos, y sea $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$.

Decimos que f es un biholomorfismo si $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, f es biyectiva, y $f^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ (i.e., f es una biyección holomorfa con inversa holomorfa).

Teorema de Inversión local: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Sea $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, $\exists$ vecindad abierta V de z_0 tal que $W := f(V)$ es un abierto de $\mathbb{C}$ y tal que $f: V \rightarrow W$ es un biholomorfismo.

Dem: Dado que $f'(z_0) \neq 0$, la $\mathbb{R}$ -diferenciabilidad de f en z_0 y la fórmula $df_{z_0}(h) = f'(z_0)h$ implican que df_{z_0} es un $\mathbb{R}$ -isomorfismo.

Luego, el Teorema de la función inversa (en $\mathbb{R}^n$) implica que $\exists$ vecindad abierta V de z_0 tal que $W := f(V)$ es una vecindad abierta de $f(z_0)$ y $f: V \rightarrow W$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^\infty$. Más aún, para todo $z \in V$, $d(f^{-1})_{f(z)} = (df_z)^{-1}$ ✓

Finalmente, dado que f es holomorfa tenemos que df_z es $\mathbb{C}$ -lineal $\Rightarrow d(f^{-1})_{f(z)}$ es $\mathbb{C}$ -lineal $\Rightarrow f^{-1}$ es holomorfa. ■

Obs importante: La demostración anterior prueba más aún que:

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in V, \text{ i.e., } (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \forall w \in W.$$

Cultura general Existen versiones más precisas del resultado anterior:

Teorema de Bloch-Landau: Sea f holomorfa en $D(z_0, r)$ con $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, $\exists U \subseteq D(z_0, r)$ abierto tal que $f(U) = D(w_0, R)$ con $R \geq \frac{1}{12}r |f'(z_0)|$ y con $f|_U: U \xrightarrow{\sim} D(z_0, R)$ biholomorfismo.

Este resultado fue enunciado por André Bloch en 1924 (desde un hospital psiquiátrico al sur de París, donde estaba internado luego de haber matado a su hermano y sus tíos en una comida familiar en 1917...) y probado en 1929 por Edmund Landau.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Decimos que $z_0 \in \Omega$ es un punto crítico (resp. punto regular) si $f'(z_0) = 0$ (resp. $f'(z_0) \neq 0$). (43)

Ejercicios Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ función no-constante. Probar que el conjunto de puntos críticos de f (resp. regulares) es un conjunto cerrado formado por puntos aislados en Ω (resp. es un abierto denso de Ω).

El Teorema de Inversión local nos permitió comprender el comportamiento de f en una vecindad de un punto regular. Para puntos críticos tenemos:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ no-constante en una vecindad de z_0 . Entonces:

$\exists m := \min \{m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^{(m)}(z_0) \neq 0\}$ y un biholomorfismo $\varphi: V \rightarrow W$ de una vecindad abierta $z_0 \in V$ a una vecindad abierta $0 \in W$ tal que $\varphi(z_0) = 0$ y tal que

$$f(z) - f(z_0) = \varphi(z)^m \quad \forall z \in V.$$

Dem: Dado que f no es constante en una vecindad de z_0 , el conjunto $\{m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^{(m)}(z_0) \neq 0\}$ es no-vacío y luego posee un mínimo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ ✓

El caso $m=1$ se obtiene del Teorema de Inversión local, definiendo en tal caso $\varphi(z) := f(z) - f(z_0)$ ✓

Supongamos que $m \geq 2$: En este caso, podemos escribir

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z) \iff f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z)$$

con $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $g(z_0) \neq 0$.

Como $g(z_0) \neq 0$, podemos escoger una rama de log_g para definir $z \mapsto \sqrt[m]{z}$ en una vecindad de $g(z_0)$, y obtener así $h \in \mathcal{O}(W_0)$ para una vecindad abierta $z_0 \in W_0$ y tal que $g = h^m$ en W .

Definamos $\varphi(z) := (z - z_0) h(z)$, que verifica $\varphi(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ y

$$\varphi(z)^m = (z - z_0)^m h(z)^m \stackrel{\text{def}}{=} (z - z_0)^m g(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z) - f(z_0) \text{ en } W_0.$$

Como $\varphi'(z_0) = h(z_0) \neq 0$ (pues $h(z_0)^m \stackrel{\text{def}}{=} g(z_0) \neq 0$), el Teorema de Inversión local implica que φ es un biholomorfismo de una vecindad abierta $V \subseteq W_0$ de z_0 en una vecindad abierta de $\varphi(z_0) = 0 \in W$ ■

Ejercicios Analizar $f(z) = \sin^3(z^2)$ en $z_0 = 0$.

Obs: En el Teorema anterior, siempre podemos suponer que W es un disco: en caso contrario, elegimos un disco $D(0, r_0) \subseteq W$ y reemplazamos W por $W_r := D(0, r)$ con $r \in]0, r_0[$, y V por $V_r := \varphi^{-1}(D(0, r))$.

Corolario: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ no-constante en una vecindad de z_0 . Si $m := \min \{m \in \mathbb{N}^+ \text{ tal que } f^{(m)}(z_0) \neq 0\}$, entonces:

- ① Para todo $w \in D(f(z_0), r^m) \setminus \{f(z_0)\}$ con $r \in]0, r_0[$, la ecuación $f(z) = w$ posee m soluciones diferentes en V_r .
- ② Si $w = f(z_0)$, la ecuación $f(z) = w$ admite $z = z_0$ como única solución (de multiplicidad m).

Dem: Para $w \in D(f(z_0), r^m)$, la ecuación $f(z) = w$ equivale a $\varphi(z)^m = w - f(z_0)$ en $D(0, r^m)$, y luego posee m soluciones:

$$z_k := \varphi^{-1}(e^{2\pi i k/m} (w - f(z_0))^{1/m}) \in V_r \text{ con } k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

donde $(w - f(z_0))^{1/m} \in D(0, r)$ es cualquiera de las raíces m -ésimas de $w - f(z_0)$. En el caso:

- ① $\Rightarrow$ Todas las soluciones $z_0, \dots, z_{m-1}$ son diferentes pues $w \neq f(z_0)$.
- ② $\Rightarrow$ Todas las soluciones son iguales a $\varphi^{-1}(0) = z_0$ pues $w = f(z_0)$ y φ es un biholomorfismo. ■

Una consecuencia importante del análisis local de funciones holomorfas y de la Observación anterior es:

Teorema de la aplicación abierta: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ función holomorfa no-constante. Entonces, f es una función abierto, i.e., para todo abierto $U \subseteq \Omega$ la imagen $f(U)$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

Dem: Todo punto $z_0 \in U$ (regular o crítico) posee una vecindad abierta $V_{z_0} \subseteq U$ tal que $f(V_{z_0}) = D(f(z_0), r(z_0))$ es un disco abierto de centro $f(z_0)$ y radio $r_0 = r(z_0) > 0$.

$$\Rightarrow f(U) = \bigcup_{z_0 \in U} D(f(z_0), r(z_0)) \text{ es un abierto } \checkmark \quad \blacksquare$$

Obs: Lo anterior es falso para funciones reales (considerar eg. $\sin(x)$).

La principal aplicación del Teorema de la aplicación abierta es:

(45)

Teorema de Inversión Global: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función holomorfa inyectiva. Entonces:

- ① $f(\Omega)$ es un abierto de $\mathbb{C}$.
- ② $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.
- ③ $f: \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ es un biholomorfismo.

Dem: Como f es una función abierta, $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto, Así, $f: \Omega \rightarrow f(\Omega)$ es una biyección continua abierta (i.e., un homeomorfismo).

Si se tuviera que $f'(z_0) = 0$ para cierto $z_0 \in \Omega$, entonces

$$m = \min \{n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^{(n)}(z_0) \neq 0\} \geq 2$$

y luego f no sería localmente inyectiva en una vecindad de z_0 $\hookrightarrow$
 $\Rightarrow f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$ y luego el Teorema de inversión local implica que f^{-1} es holomorfa $\checkmark$ ■

Ejercicio Dar un contraejemplo de lo anterior en el caso de funciones reales.

§19. Principios del máximo y Lema de Schwarz

El principio del máximo es otra manifestación espectacular de la "rigidez" de las funciones holomorfas.

Teorema (Principio del máximo): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Entonces:

- ① Si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)| = \sup_{\Omega} |f|$, entonces f es constante en la componente conexa de Ω que contiene a z_0 .
- ② Para todo compacto $K \subseteq \Omega$ se tiene que:

$$\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|.$$

$$\text{y además: } \max_K \operatorname{Re}(f) = \max_{\partial K} \operatorname{Re}(f) \quad \text{y} \quad \max_K \operatorname{Im}(f) = \max_{\partial K} \operatorname{Im}(f).$$