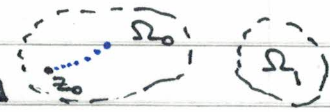
§17. Extensión analítica

En esta sección analizaremos la extensión de funciones holomorfas.

Teorema (Principio de extensión analítica): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío, y sean $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sea $A \subseteq \Omega$ un subconjunto tal que $\exists\, z_0 \in A$ punto de acumulación de A. Entonces:

Si $f = g$ en A $\Rightarrow$ $f = g$ en la componente conexa de Ω que contiene z_0.

Dem: Sea Ω_0 la componente conexa de Ω conteniendo a z_0.
Si consideramos $h := f - g$, entonces $h \in \mathcal{O}(\Omega_0)$ y z_0 es un cero no-aislado de h $\Rightarrow$ $h \equiv 0$ en Ω_0 ■



Reformulación útil: Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo no-vacío y $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si existe $\{z_n\}_{n\geq 0} \subseteq \Omega$ sucesión de elementos diferentes tal que $z_n \xrightarrow{n\to+\infty} w \in \Omega$ y tal que $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f = g$ en Ω.

Aplicación: Sean $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ funciones enteras tales que $f = g$ en $\mathbb{R}$, entonces $f = g$ en $\mathbb{C}$.

Ejemplo: Las identidades trigonométricas que se verifican en todo $\mathbb{R}$ se "extienden analíticamente" a todo $\mathbb{C}$. Por ejemplo,

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \text{y} \quad \cos^2(z) = \frac{1 + \cos(2z)}{2} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

⚠ **No** es cierto que $|\cos(z)|^2 + |\sin(z)|^2 = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$ (a pesar de ser cierto en $\mathbb{R}$), pues $f(z) = |\cos(z)|^2 + |\sin(z)|^2$ no es holomorfa!

Corolario (Unicidad de la extensión analítica): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío, y sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorfa. Supongamos que f admite una extensión $F \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ a un abierto conexo $\tilde{\Omega}$ tal que $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$.
$\Rightarrow$ F es única.

Dem: Sean F_1 y F_2 dos extensiones analíticas de f a $\tilde{\Omega}$.
$\Rightarrow$ $F_1 - F_2$ se anula en Ω, que no es un subconjunto localmente finito de $\tilde{\Omega}$. Luego, $F_1 - F_2 \equiv 0$ en el abierto conexo $\tilde{\Omega}$ ✓ ■

Ejercicio Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo no-vacío, y sean $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supongamos que existen sucesiones $\{z_n\}_{n\geq 0}, \{w_n\}_{n\geq 0} \subseteq \Omega$ de elementos diferentes y convergentes en Ω tal que $(f-g)(z_n) = 0$ y $(f+2g)(w_n) = 0$. Probar que $f \equiv g \equiv 0$ en Ω.