§16. Ceros de funciones holomorfas

Una consecuencia importante del hecho que toda función holomorfa es analítica es el siguiente resultado sobre los ceros de dichas funciones

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto convexo no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función holomorfa no-idénticamente nula (ie, $\exists z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) \neq 0$). Entonces, el conjunto de ceros

$$V(f) := f^{-1}(0) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \Omega \text{ tal que } f(z) = 0\} \subseteq \Omega$$

consiste en puntos aislados (ie, para todo $z \in V(f)$ existe una vecindad abierta $\mathcal{U}_z \subseteq \Omega$ tal que $V(f) \cap \mathcal{U}_z = \{z\}$).

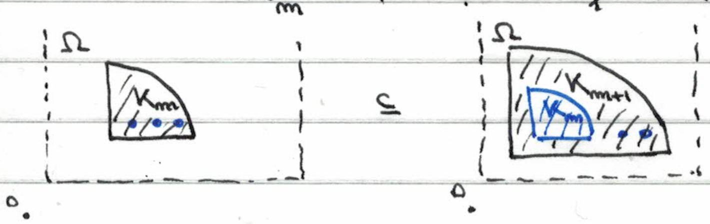
Antes de probar el resultado anterior, recordemos la siguiente caracterización de conjuntos aislados.

Lema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no-vacío, y sea $A \subseteq \Omega$ un subconjunto. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. $A \subseteq \Omega$ es un cerrado formado por puntos aislados.
2. A es localmente finito en Ω, ie, todo punto $x \in \Omega$ posee una vecindad abierta $\mathcal{U}_x$ tal que $A \cap \mathcal{U}_x$ es un conjunto finito.
3. Para todo compacto $K \subseteq \Omega$, la intersección $A \cap K$ es un conjunto finito.
4. El conjunto A es finito o numerable, y si $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es infinito entonces $\|a_n\| + 1/d(a_n, \partial\Omega) \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$, ie, los puntos a_n se alejan al infinito o bien tienden al borde de Ω.

Dem: ① $\Rightarrow$ ②, con $A \cap \mathcal{U}_x$ vacío o $\{x\}$ si $\mathcal{U}_x$ suficientemente pequeña ✓
② $\Rightarrow$ ③ gracias a la caracterización de compacidad mediante subcubrimientos finitos ✓ Veamos que ③ $\Rightarrow$ ④: Consideremos para todo $m > 0$

$$K_m := \{x \in \Omega \text{ tal que } \|x\| \leq m \text{ y } d(x, \partial\Omega) \geq 1/m\}$$



$\Rightarrow K_m$ son compactos en Ω tq $\Omega = \bigcup_{m>0} K_m$ y $K_m \subseteq \operatorname{int}(K_{m+1})$

$\Rightarrow A \cap K_m$ es finito por hipótesis, con $A \cap K_m = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n_m}\}$
Luego, $A \cap (K_m \setminus K_{m-1}) = \{a_{n_{m-1}+1}, \ldots, a_{n_m}\}$ y por ende si $n > n_m$ entonces $a_n \notin K_m \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \|a_n\| + d(a_n, \partial\Omega)^{-1} \geq m$ ✓ ④ $\Rightarrow$ ①: $\boxed{\text{Ejercicio}}$ ■

Obs importante: sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío. Entonces, si Ω es conexo (ie, $\nexists\ \Omega_1, \Omega_2 \neq \emptyset$ abiertos tq $\Omega_i \subseteq \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$) y $X \subseteq \Omega$ es abierto y cerrado $\Rightarrow X = \emptyset$ o bien $X = \Omega$.

Dem. del Teorema:

Sea $X := \{ z_0 \in \Omega \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(z_0) = 0 \} \overset{def}{=} \bigcap_{n \geq 0} V(f^{(n)})$. Dado que cada $V(f^{(n)})$ es cerrado en Ω, tenemos que X también lo es. Además, $X \neq \Omega$ pues f no es idénticamente nula.

Por otra parte, X es abierto en Ω: si $z_0 \in \Omega$, entonces la expresión

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

es válida en $D(z_0, r)$, con $r = d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ y luego $f|_{D(z_0,r)} \equiv 0$.

Como $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo y $X \neq \Omega$ abierto y cerrado $\Rightarrow X = \emptyset$.

Para concluir, sea $z_0 \in V(f) \subseteq \Omega$, ie, $f(z_0) = 0$. Como $X = \emptyset$, existe $m \geq 1$ tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, que podemos asumir minimal.

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n := (z - z_0)^m g(z)$ en $D(z_0, r)$.

Por construcción, $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+m}(z - z_0)^n$ es holomorfa en $D(z_0, r)$ y $g(z) = f(z)/(z - z_0)^m$ en $\Omega \setminus \{z_0\}$ $\Rightarrow g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ✓

Finalmente, como $g(z_0) = a_m \overset{def}{=} f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$, la continuidad de g implica que g no se anula en una vecindad abierta $V \subseteq \Omega$ de z_0 $\Rightarrow f^{-1}(0) \cap V = \{z_0\}$, ie, $z_0 \in V(f)$ es un punto aislado ✓ ■

La demostración del resultado anterior nos da información más precisa:

Prop: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función holomorfa no-idénticamente nula. Entonces, para todo $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$:

① $\exists!$ entero $m \geq 1$ minimal tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, ie,

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

② f se factoriza como

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ que no se anula en una vecindad abierta de z_0.

Decimos que f posee un cero de orden m en z_0. ■

Ejercicio Determinar el orden de todos los ceros de las funciones:

a) $\sin(z)$ y $\cos(z)$.

b) $\mathrm{Ln}(z)$