Una función real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es analítica si converge a su serie de Taylor. Esto implica en particular que es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Sin embargo,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y no es analítica (pues $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \geq 0$)!

En el caso de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ hay dos nociones naturales de analiticidad:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función. Decimos que:

① f es $\mathbb{R}$-analítica si para todo $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, existe una vecindad abierta V de z_0 tal que

$$f(x,y) = \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2} a_{\alpha,\beta} (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta$$

para todo $z = (x,y) \in V$, con convergencia normal en V.

② f es $\mathbb{C}$-analítica si para todo $z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, existe una vecindad abierta V de z_0 tal que

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z-z_0)^n \quad \text{para todo } z \in V,$$

con convergencia normal en V.

Obs (cf. §5): Tanto en el caso $\mathbb{R}$-analítico como en el $\mathbb{C}$-analítico tenemos que las series anteriores son derivables término a término. En particular, sus coeficientes generales están unicamente determinados por las fórmulas:

$$a_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0)$$

Ejercicio

① Probar que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-analítica, entonces es $\mathbb{R}$-analítica.
[Indicación: $(z-z_0)^n = ((x-x_0) + i(y-y_0))^n$ y usar Newton]

② Probar que la función $f(z) = \bar{z}$ es $\mathbb{R}$-analítica pero no es $\mathbb{C}$-analítica.

El resultado principal de esta sección relaciona las nociones de holomorfía y analiticidad:

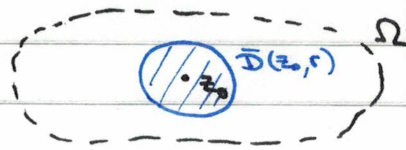
Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

① f es holomorfa en Ω.

② f es $\mathbb{C}$-analítica en Ω.

Dem: ② ⇒ ① ya fue probado en §5. Para ver que ① ⇒ ②, sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y sean $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Para $z \in \operatorname{int}(\overline{D}(z_0,r)) \overset{\text{def}}{=} D(z_0,r)$, la fórmula de Cauchy implica que



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

Escribamos
$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \left(\frac{1}{1 - (z-z_0)/(w-z_0)} \right)$$
$$= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-w_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(z_0,r)} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw .$$

Luego, si $w = z_0 + r e^{it}$ entonces
$$\left| \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z-z_0|}{r} \right)^n \quad \text{con } M = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$$

⇒ La serie converge normalmente para todo $t \in [0, 2\pi]$ y luego
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{con } a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \underset{\text{Cauchy}}{=} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

y luego f es $\mathbb{C}$-analítica en $\overline{D}(z_0,r)$ ✓ ■

La demostración anterior muestra que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es analítica en todo disco cerrado contenido en Ω. En particular:

Corolario: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces, para todo $z_0 \in \Omega$ tenemos que
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n ,$$
donde el radio de convergencia R de esta serie verifica que
$$R \geq \operatorname{dist}(z_0, \Omega^c).$$