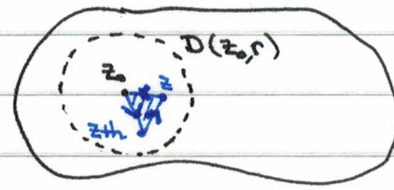
El siguiente resultado es el recíproco del Lema de Goursat, y será relevante más adelante para probar holomorfía en ciertos contextos.

Teorema de Morera (1886): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función continua. Si suponemos que:
$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0 \quad \text{para todo triángulo } T \subseteq \Omega$$
entonces f es holomorfa en Ω.

Dem: Sea $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tq $D(z_0, r) \subseteq \Omega$.



Para $z \in D(z_0, r)$ definimos
$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(w)\,dw,$$
donde $[z_0, z]$ es el segmento que une z_0 a z.

Luego, para $z \in D(z_0, r)$ y $h \neq 0$ tal que $z + h \in D(z_0, r)$, tenemos que
$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{h}\left(\int_{[z_0, z+h]} f(w)\,dw - \int_{[z_0, z]} f(w)\,dw \right)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\cancel{\int_{\partial T} f(w)\,dw}^{\,0} - \int_{[z+h, z]} f(w)\,dw \right)$$

$\gamma(t) = z + th$ con $t \in [0,1]$ $\to$
$$= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w)\,dw \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\cancel{h}} \int_0^1 f(z+th)\cdot \cancel{h}\,dt$$

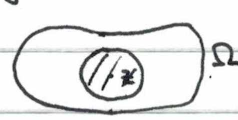
La continuidad de f en z_0 implica entonces que
$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) \quad \text{y luego } F \in \mathcal{O}(\Omega).$$

En particular, $F'(z) = f(z)$ es holomorfa en Ω también ✓ ∎

§14. Desigualdad de Cauchy y Teorema de Liouville

La fórmula de Cauchy para las derivadas de funciones holomorfas permite obtener las siguientes "estimaciones a priori", probadas por Cauchy en 1844.

Teorema (Desigualdad de Cauchy): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, $z \in \Omega$, y $r > 0$ tal que $\overline{D}(z, r) \subseteq \Omega$. Entonces, para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $n \geq 0$ se tiene que:
$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\partial D(z,r)} |f|$$



Dem: La fórmula de Cauchy implica $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$

$\gamma(t) = z + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ $\to$ $\overset{\text{df}}{=} \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \cdot \frac{e^{-i(n+1)t}}{r^{n+1}}\, r i e^{it}\,dt$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{it})|\,dt \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\partial D(z,r)} |f| \quad ✓ \quad ∎$$

Corolario: Sea f una función entera (ie, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) tal que
$\exists A, B \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}$ se tiene $|f(z)| \leq A(1+|z|)^B$
ie, "f crece de manera polinomial cuando $|z| \to +\infty$".
Entonces, f es un polinomio de grado $\leq B$.

Dem: Sea $\lfloor B \rfloor \in \mathbb{N}$ la parte entera de B y sea $n := \lfloor B \rfloor + 1 > B$
Luego, para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $r > 0$ se tiene que

$$\sup_{\partial D(z,r)} |f| = \sup_{t \in [0,2\pi]} |f(z + re^{it})| \leq A(1 + |z + re^{it}|)^B \leq A(1 + |z| + r)^B,$$

y por la desigualdad de Cauchy $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} A(1+|z|+r)^B \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$
$\Rightarrow f^{(n)}(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ y luego f es un polinomio de grado $\leq n-1 = \lfloor B \rfloor$ ■

El caso $B = 0$ del corolario anterior fue enunciado por Cauchy en 1844 y probado en 1847 por Liouville.

Teorema de Liouville: Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ función entera y acotada (ie, $\exists A \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que $|f(z)| \leq A$ para todo $z \in \mathbb{C}$). Entonces, f es constante. ■

Una consecuencia importante es el famoso:

Teorema Fundamental del Álgebra: $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, ie, todo polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$ de grado $d \geq 1$ posee una raíz en $\mathbb{C}$.

Dem: Supongamos por contradicción que existe

$$P(z) = a_d z^d + \ldots + a_1 z + a_0 \text{ tal que } P(w) \neq 0 \ \forall w \in \mathbb{C}.$$

Entonces, $f(z) := 1/P(z)$ es entera y $|f(z)| \simeq 1/|a_d||z|^d$ tiende a 0 cuando $|z| \to +\infty$. En particular, f es acotada y luego constante gracias al Teorema de Liouville $\Rightarrow P = 1/f$ constante ↯ ■

Ejercicio Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ función entera y sea $u : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función armónica $u := \mathrm{Re}(f)$. Probar que si u está acotada superiormente (ie, $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $u(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) entonces u es una función constante.
[Indicación: Considerar $g(z) := \exp(f(z))$.]