

§ 13. Diferenciabilidad de funciones holomorfas y Teorema de Morera

(34)

Una de las aplicaciones más notables y espectaculares de la fórmula de Cauchy es el siguiente resultado:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $K \subseteq \Omega$ compacto no-vacío con borde ∂K de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Entonces, toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω . Más aún, para todo punto interior $z_0 \in \text{int}(K)$:

① Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z_0) = f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

② Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schwanz}}}{\frac{\partial^{n+m} f}{\partial \bar{z}^m \partial z^n}}(z_0) = 0.$$

En particular, una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ posee derivadas complejas $f^{(n)}$ de orden arbitrario y además $f^{(n)} \in \mathcal{O}(\Omega)$ para todo $n \geq 1$.

Dem: Dividiendo el borde ∂K en N caminos γ_j de clase $\mathcal{C}^1$, tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw \stackrel{\text{by}}{=} \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{a_j}^{b_j} \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t)-z} \gamma_j'(t) dt$$

Como $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, f es continua en Ω y la última integral puede considerarse una función en la variable z . Dado que la función $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\Omega \setminus \{z\}$, el resultado se obtiene por inducción usando las fórmulas

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{w-z} \right) (z_0) = \frac{n!}{(w-z_0)^{n+1}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^{n+m}}{\partial z^n \partial \bar{z}^m} \left(\frac{1}{w-z} \right) = 0 \quad \text{si} \quad m > 0 \quad \blacksquare$$

Ejemplos:

① $I = \int_{\partial \bar{D}(0,4)} \frac{\sin(z)}{(z-\pi)^4} dz$ se calcula considerando $f(z) = \sin(z)$ luego $f^{(3)}(z) = -\cos(z)$ y luego $I = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(\pi) = -\frac{2\pi i}{6} \cos(\pi) = \frac{i\pi}{3}$.

② $I = \int_{\partial \bar{D}(i,2)} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz = \int_{\partial \bar{D}(i,2)} \frac{f(z)}{(z-2i)^2} dz$

con $f(z) = 1/(z+2i)^2$ holomorfa en $\bar{D}(i,2)$

$\Rightarrow f'(z) = -2/(z+2i)^3$ y luego $I = \frac{2\pi i}{1!} f'(2i) = \frac{2\pi i \cdot (-2)}{4^3 i^3} = \frac{\pi}{16}$.



③ **Ejercicio** Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$, calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+1)^2} dx$

El siguiente resultado es el recíproco del Lema de Goursat, y será relevante más adelante para probar holomorfía en ciertos contextos. (35)

Teorema de Morera (1886): sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ función continua. Si suponemos que:

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0 \text{ para todo triángulo } T \subseteq \Omega$$

entonces f es holomorfa en Ω .

Dem.: sea $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tq $D(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Para $z \in D(z_0, r)$ definimos

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(w) dw$$

donde $[z_0, z]$ es el segmento que une z_0 a z .

Luego, para $z \in D(z_0, r)$ y $h \neq 0$ tal que $z+h \in D(z_0, r)$, tenemos que

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \stackrel{dy}{=} \frac{1}{h} \left(\int_{[z_0, z+h]} f(w) dw - \int_{[z_0, z]} f(w) dw \right)$$

$$= \frac{1}{h} \left(\int_{\partial T} f(w) dw - \int_{[z+h, z]} f(w) dw \right)$$

$\gamma(t) = z+th$
con $t \in [0, 1]$

$$\stackrel{dy}{=} \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w) dw \stackrel{dy}{=} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) \cdot h dt$$

La continuidad de f en z_0 implica entonces que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) \quad \text{y luego } F \in \mathcal{O}(\Omega).$$

En particular, $F'(z) = f(z)$ es holomorfa en Ω también. $\blacksquare$

§14. Desigualdad de Cauchy y Teorema de Liouville

La fórmula de Cauchy para las derivadas de funciones holomorfas permite obtener las siguientes "estimaciones a priori", probadas por Cauchy en 1844.

Teorema (Desigualdad de Cauchy): sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, $z \in \Omega$, y $r > 0$ tal que $\bar{D}(z, r) \subseteq \Omega$. Entonces, para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $n \geq 0$ se tiene que:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\partial D(z, r)} |f|$$

Dem.: La fórmula de Cauchy implica $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(z, r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$

$$\gamma(t) = z + re^{it}, t \in [0, 2\pi] \rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \cdot \frac{e^{-i(n+1)t}}{r^{n+1}} r i e^{it} dt$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{it})| dt \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\partial D(z, r)} |f| \quad \blacksquare$$