§12. Fórmula de Cauchy y Fórmula de Pompeiu

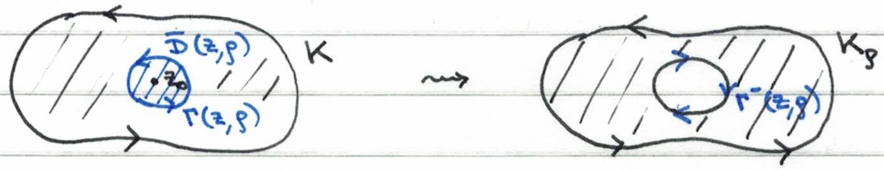
Durante esta sección $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ será un abierto no-vacío.

Teorema (Fórmula de Cauchy): Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y sea $K \subseteq \Omega$ un compacto no-vacío de borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y orientado canónicamente. Entonces, para todo punto z en $\mathrm{int}(K)$ se tiene que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

En particular, f está determinada por sus valores en ∂K.

Dem: Sea $\rho > 0$ tal que $\overline{D}(z,\rho) \subseteq \mathrm{int}(K)$, y sea $K_\rho := K \setminus D(z,\rho)$



$\Gamma^-(z,\rho) := -\Gamma(z,\rho)$ orientación opuesta

Luego, $\partial K_\rho = \partial K \cup \Gamma^-(z,\rho)$. Sea $g(w) = f(w)/(w-z)$ función holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$. Como $K_\rho \subseteq \Omega \setminus \{z\}$, el Teorema de Cauchy nos da

$$0 = \int_{\partial K_\rho} g(w)\, dw = \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \int_{\Gamma(z,\rho)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw .$$

Para calcular la última integral de línea, parametrizamos $\Gamma(z,\rho)$ usando $\gamma(t) = z + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\int_{\Gamma(z,\rho)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\rho e^{it})}{\rho e^{it}} \cdot i\rho e^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{it})\, dt =: I_\rho$$

Finalmente, el resultado se obtiene del hecho que $\lim_{\rho \to 0} I_\rho = 2\pi i f(z)$, gracias a la continuidad de f en z. ■

(Cultura general) La Fórmula de Pompeiu (1905) es una generalización de la fórmula de Cauchy para funciones no necesariamente holomorfas:

Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto con borde orientado de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos, y denotemos por $d\lambda(z) := dx\,dy$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, entonces:

1. Para toda función $f : K \to \mathbb{C}$ de clase $\mathcal{C}^1$ se tiene

$$\int_{\partial K} f(z)\, dz = 2i \iint_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\lambda(z) .$$

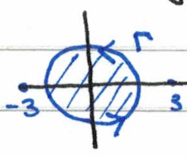
2. Si $z \in \mathrm{int}(K)$, entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{\pi} \iint_K \frac{1}{w-z} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\, d\lambda(w) .$$

(la demostración es muy similar, usando Teo. de Green y Teo. de Convergencia Dominada)

Ejemplos :

① Sea $K = \overline{\mathbb{D}}(0,2)$ y $\Gamma = \partial K$ círculo de radio 2 centrado en el origen, y sea $f(z) = z/(9-z^2)$ función holomorfa en una vecindad abierta de K. Luego, la fórmula de Cauchy aplicada a $z_0 = -i \in \mathrm{int}(K)$ nos da:

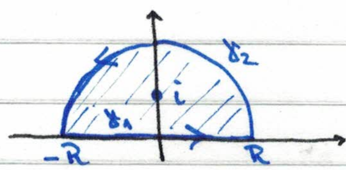


$$\int_\Gamma \frac{z/(9-z^2)}{z-(-i)}\,dz = \int_\Gamma \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\,dz = 2\pi i\, f(-i) = 2\pi i\left(\frac{-i}{10}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

② (cf. "distribución de Cauchy") : Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$ y consideremos la integral

$$I(a) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx \quad (\text{por paridad}).$$

Sea $f(z) := e^{iaz}/(z^2+1)$ función holomorfa en $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$, y sea $\Gamma = \partial K$ donde K es el semi-círculo :



con $R > 1$.

Notamos que f no es holomorfa en K !

⇝ Astucia : Escribir $f(z) = g(z)/(z-i)$ con $g(z) := e^{iaz}/(z+i)$ holomorfa en K.
La fórmula de Cauchy aplicada a $z_0 = i \in \mathrm{int}(K)$ nos da:

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = \int_{\partial K} \frac{g(z)}{z-i}\,dz = 2\pi i\, g(i) = 2\pi i\,\frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a}$$

Por otro lado, $\int_{\partial K} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = I_1 + I_2$.

i) I_1 : $\gamma_1(t) = t$ con $t \in [-R,R]$ y luego $I_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{-R}^{R} \frac{e^{iat}}{t^2+1}\,dt \xrightarrow{R\to+\infty} I(a)$.

ii) I_2 : $\gamma_2(t) = Re^{it}$ con $t \in [0,\pi]$, y luego :

$$I_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^\pi \frac{e^{iaRe^{it}}}{R^2e^{i2t}+1}\cdot iRe^{it}\,dt = \int_0^\pi h(t)\,dt$$

con $$|h(t)| = \frac{R}{|R^2e^{i2t}+1|}\cdot\left|e^{iaRe^{it}}\right| \underset{\uparrow}{\leq} \frac{R}{R^2-1}\cdot e^{-aR\sin(t)}$$

$||z|-|w|| \leq |z-w|$

$$\underset{t\geq 0}{\leq} \frac{R}{R^2-1}$$

$$\Rightarrow |I_2| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Así, $I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a}$ ✓

Por paridad, obtenemos $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$ para todo $a \in \mathbb{R}^{>0}$.