Con todo lo anterior en mente, podemos enunciar el "Teorema de Green" (que fue enunciado por Green en 1828, que ya era conocido por Euler en el siglo XVIII, y que fue probado por Riemann en su tesis doctoral en 1851). Se trata de un caso particular del Teorema de Stokes sobre integración en variedades compactas orientables (con borde).

Teorema de Green: Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compacto no-vacío, con borde ∂K de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos y orientado canónicamente. Entonces, para toda 1-forma diferencial $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ de clase $\mathscr{C}^1$ en una vecindad de K se tiene que:

$$\boxed{\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega}$$

ie, $\displaystyle\int_{\partial K} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$

§11. Teoremas de Cauchy y Goursat

El "Teorema de Cauchy" es un resultado central en Análisis Complejo, y fue enunciado por Cauchy en 1825 y probado por Riemann en 1851 para funciones holomorfas de clase $\mathscr{C}^1$. Finalmente, Goursat prueba en 1884 la versión general, donde no se asume la condición de ser de clase $\mathscr{C}^1$.

Teorema de Cauchy: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto no-vacío con borde de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos y orientado canónicamente tal que $K \subseteq \Omega$. Entonces para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que f es de clase $\mathscr{C}^1$ en Ω se tiene que

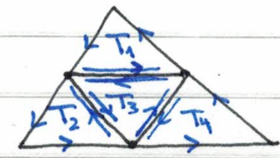
$$\boxed{\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0}$$

Dem (Riemann): Consideremos la 1-forma diferencial $\omega = f(z)\,dz$ de clase $\mathscr{C}^1$. Luego, $d\omega \overset{\text{def}}{=} df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}d\bar z\right)\wedge dz = 0$ pues $dz \wedge dz = 0$ y pues $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ (Cauchy-Riemann). Así, el Teorema de Green implica que $\int_{\partial K}\omega = \int_K d\omega = 0$ ✓ ■

Para eliminar la hipótesis $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ comenzaremos por analizar el caso en que K es un triángulo, y por ende un compacto de clase $\mathscr{C}^\infty$ por pedazos.

Lema de Goursat: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $T \subseteq \Omega$ un triángulo. Entonces, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dem: Sea $I := \int_{\partial T} f(z)\,dz \in \mathbb{C}$. Dividamos T en 4 triángulos $T_1, .., T_4$ con vértices en los puntos medios de los lados de T:



$\leftarrow$ la orientación de las aristas interiores son opuestas!

$\Rightarrow I = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial T_k} f(z)\,dz$ y luego $\exists\, k \in \{1,..,4\}$ tq $\left|\int_{\partial T_k} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|I|}{4}$.

Inductivamente, construimos triángulos $T_0' \supseteq T_1' \supseteq T_2' \supseteq \ldots$ con $T_0' = T$, $T_1' = T_k$, etc, con $\operatorname{diam}(T_n') = \operatorname{diam}(T)/2^n$ y con $\left|\int_{\partial T_n'} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|I|}{4^n}$.

$\Rightarrow \exists!\, z_0 \in \mathbb{C}$ tq $z_0 \in T_n'$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (cf. §2, pág 4), ie, $\bigcap_{n\geq 0} T_n' = \{z_0\}$.

Dado que f es holomorfa (ie, $\mathbb{C}$-diferenciable) en z_0, tenemos que

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0) + (z-z_0)\varepsilon(z) \quad \text{y} \quad \lim_{z\to z_0} \varepsilon(z) = 0.$$

Por otro lado, si $g(z) := f(z_0) z + \frac{1}{2}(z-z_0)^2 f'(z_0)$ entonces g es holomorfa y $dg \overset{\text{dy}}{=} (f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0))\,dz$ $\Rightarrow \int_{\partial T_n'} dg = 0$ ✓

Así,

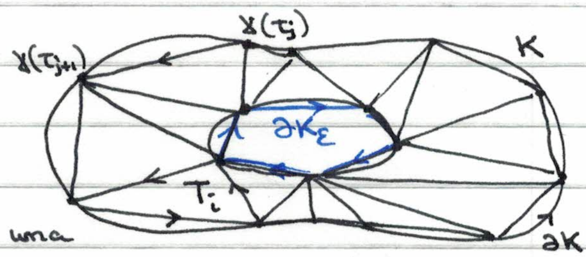
$$\left|\int_{\partial T_n'} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial T_n'} (z-z_0)\varepsilon(z)\,dz\right| \leq \ell(\partial T_n') \sup_{\partial T_n'} |z-z_0|\,|\varepsilon(z)|$$
$$\leq 3\,(\operatorname{diam}(T_n'))^2 \sup_{\partial T_n'} |\varepsilon(z)|$$

$$\Rightarrow |I| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_n'} f(z)\,dz\right| \leq 3\,(\operatorname{diam}(T))^2 \sup_{\partial T_n'} |\varepsilon(z)| \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \quad \blacksquare$$

Teorema de Goursat: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto no-vacío con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y orientado canónicamente tal que $K \subseteq \Omega$. Entonces, para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ se tiene que

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0.$$

Dem: Sea $\delta = \operatorname{dist}(K, \mathbb{C}\setminus\Omega) > 0$. Parametrizamos ∂K usando finitos caminos de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y por cada uno de dichos caminos $\gamma : [a,b] \to \Omega$ consideramos una



subdivisión $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = b$ tal que $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$

$\Rightarrow$ Cada segmento $[\gamma(\tau_j), \gamma(\tau_{j+1})]$ está contenido en Ω.

Para $0 < \varepsilon << 1$, la unión de dichos segmentos forman el borde de un compacto K_ε con borde poligonal. Dicho compacto es triangulable, ie, $K_\varepsilon = \bigcup_i T_i$, y luego $\int_{\partial K_\varepsilon} f(z)\,dz = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z)\,dz = 0$ por el Lema de Goursat.

Finalmente, $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial K_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial K} f(z)\,dz$ (cf. §10, pág 27) ✓ $\blacksquare$