§10. Integración de 1-formas diferenciales y Teorema de Green

En esta sección "recordaremos" las nociones necesarias para calcular integrales de línea.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto conexo no-vacío. Una **1-forma diferencial** continua y a valores complejos en Ω es una función continua

$$\omega : \Omega \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$
$$x \longmapsto \{\omega(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ lineal}\}$$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ son coord. en $\mathbb{R}^n$, entonces $(dx_1, \dots, dx_n)$ es la base canónica de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ como $\mathbb{C}$-ev. Luego toda 1-forma diferencial se escribe como:

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \dots, x_n)\, dx_i \quad \text{donde } f_i : \Omega \to \mathbb{C} \text{ función continua.}$$

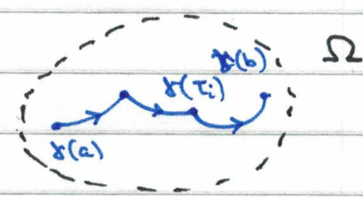
Ejemplo importante: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ función de clase $\mathcal{C}^p$, con $p \geq 1$. Entonces, su diferencial

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j$$

es una 1-forma diferencial en Ω.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto conexo no-vacío. Un **camino de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos** en Ω es una función continua

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega, \quad t \longmapsto \gamma(t)$$



tal que existe una subdivisión finita

$$a := \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N =: b$$

con $\gamma|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ de clase $\mathcal{C}^p$. Decimos que los $\gamma(\tau_i)$ son las **puntas** de γ.

Observación: Sea $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos, $p \geq 1$.

① El camino con **orientación decreciente**, denotado usualmente $-\gamma$ está definido por $(-\gamma)(t) := \gamma(-t)$ para $-b \leq -t \leq -a$. En otras palabras, se recorre la **curva** $\Gamma := \gamma([a,b])$ en sentido opuesto al original.

② Definimos el **largo** o **longitud** de γ mediante

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2}\, dt$$

donde $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n$.

③ Con la notación anterior, si $x_i := \gamma_i(t)$ entonces $dx_i = \gamma_i'(t)\, dt$ si γ es diferenciable en $t \in [a,b]$.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto conexo no-vacío, y sean $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos ($p \geq 1$) y $\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,\dots,x_n)\,dx_j$ una 1-forma diferencial en Ω. Definimos la **integral de línea**:

$$\int_\gamma \omega := \int_\gamma \sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,\dots,x_n)\,dx_j \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \sum_{j=1}^{n} f_j(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))\,\gamma_j'(t)\,dt$$

Observaciones:

1. Por definición, $\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$.
2. Sean $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \Omega$ y $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \Omega$ caminos de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos. Decimos que γ_1 y γ_2 son **equivalentes**, y escribimos $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si:

   $\exists\, \varphi : [a_1,b_1] \xrightarrow{\sim} [a_2,b_2]$ **difeomorfismo** de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos (i.e., φ biyectivo, $\mathcal{C}^p$ por pedazos, con derivadas por la izquierda y derecha $\neq 0$) **estrictamente creciente** tal que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Así, una curva orientada de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos es una clase de equivalencia de caminos de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos. En part, si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ entonces se tiene que $\Gamma = \gamma_1([a_1,b_1]) = \gamma_2([a_2,b_2])$.

El valor de la integral de línea $\int_\gamma \omega$ <u>no</u> depende de la parametrización de γ: si $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$ es un difeomorfismo definiendo una nueva parametrización entonces (haciendo $t = \varphi(s)$):

i) $\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_\gamma \omega$ si φ **preserva** la orientación (i.e., φ creciente y $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$).

ii) $\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = -\int_\gamma \omega = \int_{-\gamma} \omega$ si φ **revierte** la orientación (i.e., φ decreciente y $\varphi(a') = b$, $\varphi(b') = a$).

Luego, si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ entonces (i) nos da $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Del mismo modo, la longitud $\ell(\gamma) = \ell(-\gamma)$ sólo depende de la curva $\Gamma = \gamma([a,b]) \subseteq \Omega$ definida por γ.

Caso particular importante: En $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, si usamos la base $(dz, d\bar{z})$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ (en lugar de (dx,dy)) entonces una 1-forma diferencial es:

$$\omega = f(z,\bar{z})\,dz + g(z,\bar{z})\,d\bar{z} \quad \text{donde } f,g : \Omega \to \mathbb{C} \text{ continuas.}$$

Luego, si $\gamma : [a,b] \to \Omega$ es un camino de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos, entonces:

$$\int_\gamma \omega \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \left[f(\gamma(t),\overline{\gamma(t)})\,\gamma'(t) + g(\gamma(t),\overline{\gamma(t)})\,\overline{\gamma'(t)} \right] dt$$

Ejemplo: Sea $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ círculo de radio $r>0$ centrado en el origen y orientado en sentido anti-horario.

Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $\omega = z^n\, dz$, entonces:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma z^n\, dz \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \frac{d}{dt}(re^{it})\, dt = \int_0^{2\pi} r^n e^{itn} \cdot ire^{it}\, dt$$

$$= i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\, dt$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

Prop: Sea ω una 1-forma diferencial continua y a valores complejos en Ω y sea $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Entonces:

① si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω, entonces

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En part, $\int_\gamma df = 0$ si γ es una <u>curva cerrada</u> (i.e, $\gamma(a) = \gamma(b)$).

② si $\omega = \sum_{j=1}^n f_j\, dx_j$, entonces

$$\left| \int_\gamma \omega \right| \leq \ell(\gamma) \sup_{t\in[a,b]} \|\omega(\gamma(t))\|$$

donde $\|\omega\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |f_j|^2}$.

③ Se tiene que

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(\xi_j))(\gamma_i(\tau_{j+1}) - \gamma_i(\tau_j))$$

donde la subdivisión $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = b$ recorre el conjunto de todas las posibles subdivisiones de $[a,b]$ tales que $\max_{j=0,\ldots,N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \varepsilon$ y donde los $\xi_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ son puntos arbitrarios.

Dem: El punto ① se deduce de la regla de la cadena

$$(f\circ\gamma)'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t))\, \gamma_i'(t),$$

de la definición de $\int_\gamma df$ y del Teorema Fundamental del Cálculo ✓

El punto ② es consecuencia de la definición de $\int_\gamma \omega$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left| \sum_{j=1}^n f_j(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t)) \cdot \gamma_j'(t) \right| \leq \|\omega(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| \quad ✓$$

Finalmente, notamos que

$$\left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \sum_{i=1}^n f_i(\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t))\, \gamma_i'(t)\, dt - \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(\xi_j))(\gamma_i(\tau_{j+1}) - \gamma_i(\tau_j)) \right| \leq M_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \|\gamma'(t)\|\, dt$$

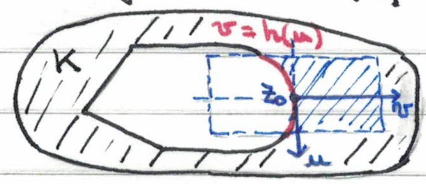
donde $M_j = \sup_{t\in[\tau_j,\tau_{j+1}]} \|\omega\circ\gamma(t) - \omega\circ\gamma(\xi_j)\|$.

Como $\max_{j=0,\ldots,N-1} M_j \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ por continuidad <u>uniforme</u> de $\omega\circ\gamma$ en el compacto $[a,b]$ (Teorema de Heine-Cantor), de donde deducimos ③ ✓ ■

Para enunciar el Teorema de Green debemos considerar compactos y sus bordes:

Df: Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto no-vacío y $p \geq 1$. Decimos que K tiene **borde de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos** si $\forall z_0 \in \partial K$, existen coordenadas (u,v) centradas en z_0 y un rectángulo $R = \{-\varepsilon < u < \varepsilon\} \times \{-\delta < v < \delta\}$ suficientemente pequeño tal que

$$K \cap R = \{(u,v) \in R \text{ tq } v \geq h(u)\}$$



donde h es de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos en $]-\varepsilon, \varepsilon[$ con $h(0) = 0$ y $\sup |h| < \delta$.

Obs: Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto con borde de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos:

① K compacto $\Rightarrow \partial K$ compacto y luego ∂K puede ser cubierto por finitos rectángulos $R = R_{z_0}$ con $z_0 \in \partial K$.

② Dado que $\partial K \cap R_{z_0} =$ grafo de $h \overset{df}{=} \{(u,v) \in R_{z_0} \text{ tq } v = h(u)\}$, tenemos que ∂K puede parametrizarse usando finitos caminos de la forma $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \partial K$, $u \mapsto (u, h(u))$.

③ **Ejercicio** Un **agujero** de un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ es una componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus K$. Probar que si K tiene borde de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos entonces K posee a lo más un número finito de agujeros.

[Indicación: Cada agujero está bordeado por los caminos $u \mapsto (u, h(u))$.]

Df: Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compacto con borde de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos. Decimos que ∂K está **orientado (canonicamente)** si cada uno de los ejes coordenados

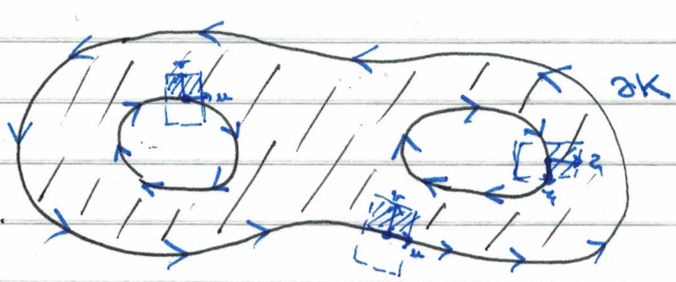
$$(z_0; (e_1(z_0), e_2(z_0))) \text{ definiendo las coord. } (u,v) \text{ en } R_{z_0}$$

están orientados positivamente resp. a la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$, ie,

$$\det_{\mathcal{C}} (e_1(z_0), e_2(z_0)) > 0.$$

Concretamente, orientamos ∂K al considerar cada uno de los caminos $u \mapsto (u, h(u))$ (que describen localmente ∂K) en la dirección de u **creciente**.

Ejemplo: El borde del compacto



está orientado canónicamente.

El último ingrediente que necesitamos son las formas diferenciales de grado 2:

Def: Si $V \cong \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta : V \to \mathbb{R}$ son formas lineales, definimos el **producto exterior** $\alpha \wedge \beta$ como la forma bilineal alternada $V \times V \to \mathbb{R}$ dada por:

$$(\alpha \wedge \beta)(\xi, \eta) := \alpha(\xi)\beta(\eta) - \alpha(\eta)\beta(\xi) \quad \forall \xi, \eta \in V.$$

y luego $\alpha \wedge \alpha \overset{dy}{=} 0$ y $\beta \wedge \alpha \overset{dy}{=} -\alpha \wedge \beta$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío y $A^p(\mathbb{R}^n) := \{\varphi : \overbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}^{p \text{ veces}} \to \mathbb{R} \text{ p-lineal alternada}\}$

Una **p-forma diferencial** continua y a valores reales en Ω es una función continua $\omega : \Omega \to A^p(\mathbb{R}^n)$, $x \mapsto \omega(x)$.

Ejemplo principal: Sean (x,y) coordenadas en $\mathbb{R}^2$. Entonces (dx, dy) es la base canónica (dual) de $A^1(\mathbb{R}^2) \overset{dy}{=} (\mathbb{R}^2)^*$. Luego,

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0 \quad \text{y} \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

son los únicos productos exteriores relevantes.

Explícitamente, si $\xi = (a,b)$, $\eta = (c,d) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$(dx \wedge dy)(\xi, \eta) \overset{dy}{=} ad - bc \overset{dy}{=} \det{}_\varepsilon(\xi, \eta)$$

Así, tal como $\det_\varepsilon$ permite calcular el área (con signo) de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$, podemos pensar $dx \wedge dy$ como una expresión de la medida de área (de Lebesgue) $dx\,dy$ en $\mathbb{R}^2$.

Consecuencia: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto no-vacío. Entonces, si $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$:

i) Una 1-forma diferencial en Ω está dada por $\omega = f\,dx + g\,dy$, y si $z = (x,y) \in \Omega$ entonces: $(\omega(z))(\xi) \overset{dy}{=} f(x,y)\xi_1 + g(x,y)\xi_2$.

ii) Una 2-forma diferencial en Ω está dada por $\alpha = h\,dx \wedge dy$, y si $z = (x,y) \in \Omega$ entonces: $(\alpha(z))(\xi, \eta) = h(x,y)(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)$.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío, y sea $\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j\,dx_j$ una 1-forma diferencial de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω (a valores reales o complejos). Definimos su **diferencial exterior** mediante

$$d\omega := \sum_{j=1}^{n} df_j \wedge dx_j, \quad \text{donde } df_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,dx_i$$

En particular, si $n=2$ y $\omega = u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy$ entonces

$$d\omega = du \wedge dx + dv \wedge dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Con todo lo anterior en mente, podemos enunciar el "Teorema de Green" (que fue enunciado por Green en 1828, que ya era conocido por Euler en el siglo XVIII, y que fue probado por Riemann en su tesis doctoral en 1851). Se trata de un caso particular del Teorema de Stokes sobre integración en variedades compactas orientables (con borde).

Teorema de Green: Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compacto no-vacío, con borde ∂K de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y orientado canónicamente. Entonces, para toda 1-forma diferencial $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ de clase $\mathcal{C}^1$ en una vecindad de K se tiene que:

$$\boxed{\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega}$$

ie, $\displaystyle\int_{\partial K} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$.

§11. Teoremas de Cauchy y Goursat

El "Teorema de Cauchy" es un resultado central en Análisis Complejo, y fue enunciado por Cauchy en 1825 y probado por Riemann en 1851 para funciones holomorfas de clase $\mathcal{C}^1$. Finalmente, Goursat prueba en 1884 la versión general, donde no se asume la condición de ser de clase $\mathcal{C}^1$.

Teorema de Cauchy: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto no-vacío con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y orientado canónicamente tal que $K \subseteq \Omega$. Entonces para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que f es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω se tiene que

$$\boxed{\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0}$$

Dem (Riemann): Consideremos la 1-forma diferencial $\omega = f(z)\,dz$ de clase $\mathcal{C}^1$. Luego, $d\omega \overset{\text{def}}{=} df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) \wedge dz = 0$ pues $dz \wedge dz = 0$ y pues $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (Cauchy-Riemann). Así, el Teorema de Green implica que $\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega = 0$ ✓ ■

Para eliminar la hipótesis $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ comenzaremos por analizar el caso en que K es un triángulo, y por ende un compacto de clase $\mathcal{C}^\infty$ por pedazos.