Dem: Sea $f(z) = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots$

$\Rightarrow a_{n+1}/a_n = \frac{\alpha-n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ y luego $R = 1$.

Por otro lado $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ con

$$n a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}(\alpha-n+1) \overset{\text{df}}{=} \alpha a_{n-1} - (n-1) a_{n-1}$$

$\Rightarrow f'(z) = \alpha f(z) - z f'(z)$, ie, $(1+z) f'(z) = \alpha f(z)$

Luego, la función $g(z) := f(z)/(1+z)^\alpha$ verifica

$$g'(z) = \frac{f'(z)\cdot(1+z)^\alpha - f(z)\alpha(1+z)^{\alpha-1}}{(1+z)^{2\alpha}} = 0 \quad \forall z \in D(0,1).$$

Así, $g(z) = g(0) \overset{\text{df}}{=} 1 \quad \forall z \in D(0,1)$, ie, $f(z) = (1+z)^\alpha \quad \forall z \in D(0,1)$ ✓ ■

Aplicación: Las series de potencias de $(1+z^2)^{-1}$ y $(1-z^2)^{-1/2}$ nos dan, al integrar, las series de potencias:

① $\operatorname{Arctan}(z) := z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad \forall z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{\pm i\}$

② $\operatorname{Arcsin}(z) := z + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall z \in \overline{D}(0,1).$

Ejercicio: Probar que $\operatorname{Arctan}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \quad \forall z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{\pm i\}$.

§ 8. Diferenciabilidad y Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Df: Sea $\Omega \subseteq V$ abierto no-vacío y $f: \Omega \to W$ una función. Decimos que f es k-diferenciable en $x \in \Omega$ si $\exists\, l \in \operatorname{Hom}_k(V,W)$ aplicación k-lineal y $\exists\, \varepsilon: \mathcal{U} \to W$ función definida en $\mathcal{U} \subseteq V$ vecindad de $0 \in V$ tales que

$$f(x+h) = f(x) + l(h) + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \forall h \in \mathcal{U}$$

con $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ en W.

La aplicación lineal l es la diferencial de f en x, denotada $l := df_x$.

Por convención, una función $\mathbb{R}$-diferenciable se dirá "diferenciable" simplemente.

Notación de Landau: Sea $h \mapsto \eta(h)$ una función arbitraria, entonces:

① $\eta(h) = O(\|h\|^m) \overset{\text{df}}{\iff} \exists\, C > 0$ tq $\|\eta(h)\| \leq C\|h\|^m$.

② $\eta(h) = o(\|h\|^m) \overset{\text{df}}{\iff} \exists\, \varepsilon$ tq $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ y $\|\eta(h)\| \leq \varepsilon(h)\|h\|^m$.

Así, si $f : \Omega \to W$ es k-diferenciable en $x \in \Omega$ entonces:

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(\|h\|).$$

Notación: Si $f : \Omega \to W$ es k-diferenciable $\forall x \in \Omega$, escribimos

$$df : \Omega \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V,W),\ x \mapsto df_x \quad \text{"la diferencial de } f\text{"}$$

Obs importante: Si $V \cong k^n$ y $(e_1, \dots, e_n)$ es una base de V, entonces podemos escribir $h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j \in V$ y luego $l \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$ verifica $l(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j v_j$ con $v_j := l(e_j) \in W$. En particular:

$$df_x(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \quad \forall h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \overset{\text{def}}{=} df_x(e_j) \in W$ es la derivada parcial de f en la dirección e_j.

Caso particular importante: Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal $\Rightarrow df_x = f$ para todo $x \in V$, i.e., $df = f$ (función constante!)

En part, las funciones coordenadas (resp. a la base $(e_1, \dots, e_n)$)

$$x_j : V \longrightarrow k, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mapsto a_j$$

verifican $dx_j = x_j$ y luego $dx_j(h) = h_j$

Así, para toda $l \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$, la identidad $l(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j\, l(e_j)$ equivale a $l = \sum_{j=1}^{n} dx_j \cdot l(e_j)$ y luego $(dx_1, \dots, dx_n)$ es una base de $\mathrm{Hom}_k(V,W)$. Luego:

$$\boxed{df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j}$$

Volvamos al caso de funciones de variable compleja:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$. Si consideramos la identificación $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $z = x+iy \mapsto (x,y)$ y si f es $\mathbb{R}$-diferenciable, entonces:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

⚠ En $\mathbb{C}$, es más natural considerar $z = x+iy$ & $\bar{z} = x - iy$, en lugar de las variables reales x e y. En particular,

$$\begin{Bmatrix} dz = dx + i\,dy \\ d\bar{z} = dx - i\,dy \end{Bmatrix} \longleftrightarrow \begin{Bmatrix} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = -\frac{i}{2}(dz - d\bar{z}) \end{Bmatrix}$$

Así, (dx, dy) y $(dz, d\bar{z})$ son dos bases de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ y luego $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ se reescribe como:

$$\boxed{df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z}}$$

Def: Escribamos $z = x+iy \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función $\mathbb{R}$-diferenciable en Ω. Definimos:

$$\left.\boxed{\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \quad \text{y} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)}\right\} \text{"derivadas de Wirtinger"}$$

Así, $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$. Además, $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ son $\mathbb{C}$-lineales.

Ejercicio útil Probar que los operadores $\partial/\partial z$ y $\partial/\partial \bar{z}$ son conjugados, ie,

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \quad \text{y} \quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

Ahora podemos enunciar el resultado principal de esta sección:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Entonces, son equivalentes:

① f es holomorfa en Ω (ie, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$).

② f es $\mathbb{R}$-diferenciable en Ω y $df_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal $\forall z \in \Omega$.

③ f es $\mathbb{R}$-diferenciable en Ω y se verifica la Ecuación de Cauchy-Riemann

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{en } \Omega}$$

Más aún, si cualquiera de estas condiciones se cumple, entonces $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$.

Dem: ① ⇒ ② pues si $f'(z)$ existe en todo $z \in \Omega$, entonces existe una función $\varepsilon : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ definida en una vecindad abierta $\mathcal{U}$ de $0 \in \mathbb{C}$ tq $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ y $\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + \varepsilon(h) \quad \forall h \in \mathcal{U}$

ie, $f(z+h) = f(z) + f'(z)h + h\,\varepsilon(h)$

$\Rightarrow df_z(h) = f'(z)h$ y luego observamos que df_z es $\mathbb{C}$-lineal ✓

Para ver que ② ⇒ ③ notamos que $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ implica que $df_z(h) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial z}\cdot h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}$ y luego $df_z(ih) = i\frac{\partial f}{\partial z}\cdot h - i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}$.

Así, df_z es $\mathbb{C}$-lineal $\Leftrightarrow df_z(ih) = i\, df_z(h)\ \forall h \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ ✓

Finalmente, para probar que ③ ⇒ ① notamos que en este caso $df_z(h) = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot h$ y luego (por definición!) tenemos que

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}(z) \cdot h + o(h)$$

$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$ existe para todo $z \in \Omega$ ■

⚠ **Observación importante:** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función $\mathbb{R}$-diferenciable en Ω. Si escribimos $z = x+iy$, y escribimos

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y) \quad \text{con} \quad u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} \overset{\text{dy}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right).$$

Así, la ecuación de Cauchy-Riemann (compleja) $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ se traduce en las Ecuaciones de Cauchy-Riemann (reales):

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Ejemplos:

① Si $f(z) = z$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ ✓ $(\Rightarrow f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ entera$)$

Alternativamente: $f(x+iy) = x+iy \Rightarrow u(x,y) = x,\ v(x,y) = y$

Así: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ✓

② Si $f(z) = \bar z$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 1 \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Alternativamente: $f(x+iy) = x - iy \Rightarrow u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y$.

Así: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

③ Si $f(z) = |z|^2 = z\bar z$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = z$ sólo se anula en $z_0 = 0$.

Alternativamente: $f(x+iy) = x^2+y^2 \Rightarrow u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$.

Así: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \overset{?}{=} 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \overset{?}{=} 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

④ **Ejercicio** Sea $f(x+iy) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ polinomio homogéneo de grado 3, donde $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Determinar cuándo f es holomorfa.

[Indicación: Es mejor escribir $x = \frac{z+\bar z}{2}$, $y = \frac{z-\bar z}{2i}$]