§7. Logaritmo complejo:

Notemos que si $w \in \mathbb{C}^* \overset{def}{=} \mathbb{C}\setminus\{0\}$, la ecuación $e^z = w$ implica:

$$|w| = |e^z| = e^{Re(z)} \quad \text{y} \quad \arg(w) = \arg(e^z) = Im(z) \mod 2\pi\mathbb{Z}$$

Así, podemos resolver $e^z = w$ al considerar:

$$Re(z) = \ln|w| \quad \text{e} \quad Im(z) = \arg(w) \mod 2\pi\mathbb{Z}$$

ie, $z = \ln|w| + i\arg(w) \mod 2\pi i\mathbb{Z}$!

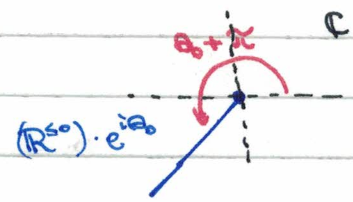
Para evitar la ambigüedad de elegir un argumento $\arg(w)$ procedemos de la manera siguiente:

Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fijo y consideramos el abierto

$$\Omega_{\theta_0} := \{ z \in \mathbb{C}^* \text{ tq } \arg(z) \neq \theta_0 + \pi \mod 2\pi\mathbb{Z} \}$$

$e^{i\pi} = -1$

ie, $\Omega_{\theta_0} = \mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{R}^{\leq 0} \cdot e^{i\theta_0})$



Para $z \in \Omega_{\theta_0}$ definimos:

$$\arg_{\theta_0}(z) := \text{único } \theta \in]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[\text{ tq } \arg(z) = \theta \mod 2\pi\mathbb{Z}$$

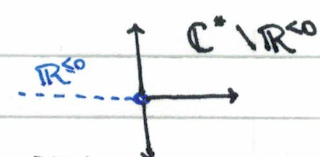
Definimos la rama $\log_{\theta_0}$ o $\ln_{\theta_0}$ del logaritmo complejo mediante

$$\log_{\theta_0}(z) := \ln|z| + i\arg_{\theta_0}(z) \quad \forall z \in \Omega_{\theta_0}$$

⚠ Las funciones $\arg_{\theta_0}$ y $\log_{\theta_0}$ no se pueden extender continuamente a $\mathbb{C}^*$. En efecto, en un punto de $\mathbb{R}^{<0} e^{i\theta_0}$ los límites de $\arg_{\theta_0}$ y $\log_{\theta_0}$ en cada lado de la semi-recta difieren en 2π (resp. $2\pi i$).

Def: La rama principal del argumento está dada por:

$$Arg(z) := \arg_0(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^{<0}$$



Del mismo modo, la rama principal del logaritmo está dada por:

$$Ln(z) := \ln|z| + i\,Arg(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^{<0}$$

Aquí, $Arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

Veamos que todas las ramas del logaritmo complejo son holomorfas:

Prop: Para todo $\theta_0 \in \mathbb{R}$, la función $\log_{\theta_0}$ verifica $\exp \circ \log_{\theta_0} = \mathrm{Id}$ en Ω_{θ_0}. Más aún, para todo $z \in \Omega_{z_0}$ se tiene que:

$$(\log_{\theta_0})'(z) = \lim_{\substack{\xi \to z \\ \xi \in \Omega_{z_0}}} \frac{\log_{\theta_0}(\xi) - \log_{\theta_0}(z)}{\xi - z} = \frac{1}{z}.$$

Dem: La identidad $\exp \circ \log_{\theta_0} = \mathrm{Id}$ se obtiene por construcción de $\log_{\theta_0}$. Para calcular su derivada, definamos $w := \log_{\theta_0} z$ y $\eta := \log_{\theta_0} \xi$. Si $\xi \to z$, entonces $\eta \to w$ por continuidad de $\log_{\theta_0}$ (!)

$$\Rightarrow \frac{\log_{\theta_0}\xi - \log_{\theta_0} z}{\xi - z} \overset{\text{def}}{=} \frac{\eta - w}{e^\eta - e^w} = \left(\frac{e^\eta - e^w}{\eta - w}\right)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{(\exp)'(w)} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \checkmark \blacksquare$$

Ejemplo importante: Sea $f(z) := \mathrm{Ln}(1+z)$, definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$

$\Rightarrow f'(z) = 1/(1+z) \quad \forall z \in \Omega$. En particular,

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots$$

en $D(0,1)$. Como $\mathrm{Ln}(1) \overset{\text{def}}{=} 0$, tenemos que

$$f(z) = \mathrm{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots$$

en $D(0,1)$. Por otro lado, sabemos que $\sum \frac{z^n}{n}$ converge en $\overline{D}(0,1) \setminus \{1\}$ y luego $f(z) = \left(\sum \frac{(-z)^n}{n}\right) - 1$ converge en $\overline{D}(0,1) \setminus \{-1\}$. Por ejemplo,

$$\mathrm{Ln}(2) = \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Consecuencia: El logaritmo complejo nos permite definir la función z^α para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$, teniendo en cuenta que se debe elegir una rama:

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log_{\theta_0}(z)) \quad \text{para todo } z \in \Omega_{\theta_0}$$

En particular, calculamos

$$\frac{d}{dz}(z^\alpha) \overset{\text{def}}{=} (\exp)'(\alpha \log_{\theta_0}(z)) \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha z^{\alpha - 1} \quad \forall z \in \Omega_{\theta_0}$$

Es importante destacar que el valor de z^α depende de la rama escogida !

Ejercicio Probar que:

(i) $i^i = e^{-\pi/2}$ si escogemos la rama principal Ln del logaritmo.

(ii) $i^i = e^{-5\pi/2}$ si escogemos la rama $\log_{2\pi}$.

Lema (fórmula de Newton): La rama principal $(1+z)^\alpha := \exp(\alpha\,\mathrm{Ln}(1+z))$, definida en $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$ verifica en $D(0,1)$:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots$$

Dem: Sea $f(z) = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots$

$\Rightarrow a_{n+1}/a_n = \frac{\alpha - n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ y luego $R = 1$.

Por otro lado $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ con

$$n a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}(\alpha-n+1) \overset{\text{df}}{=} \alpha a_{n-1} - (n-1) a_{n-1}$$

$\Rightarrow f'(z) = \alpha f(z) - z f'(z)$, i.e., $(1+z) f'(z) = \alpha f(z)$

Luego, la función $g(z) := f(z)/(1+z)^\alpha$ verifica

$$g'(z) = \frac{f'(z)\cdot(1+z)^\alpha - f(z)\alpha(1+z)^{\alpha-1}}{(1+z)^{2\alpha}} = 0 \quad \forall z \in D(0,1).$$

Así, $g(z) = g(0) \overset{\text{df}}{=} 1 \ \forall z \in D(0,1)$, i.e., $f(z) = (1+z)^\alpha \ \forall z \in D(0,1)$ ✓ ∎

Aplicación: Las series de potencias de $(1+z^2)^{-1}$ y $(1-z^2)^{-1/2}$ nos dan, al integrar, las series de potencias:

① $\operatorname{Arctan}(z) := z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad \forall z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{\pm i\}$

② $\operatorname{Arcsin}(z) := z + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall z \in \overline{D}(0,1)$.

Ejercicio: Probar que $\operatorname{Arctan}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \quad \forall z \in \overline{D}(0,1)\setminus\{\pm i\}$.

§8. Diferenciabilidad y Ecuaciones de Cauchy–Riemann

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Def: Sea $\Omega \subseteq V$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to W$ una función. Decimos que f es k-diferenciable en $x \in \Omega$ si $\exists\, \ell \in \operatorname{Hom}_k(V,W)$ aplicación k-lineal y $\exists\, \varepsilon : \mathcal{U} \to W$ función definida en $\mathcal{U} \subseteq V$ vecindad de $0 \in V$ tales que

$$f(x+h) = f(x) + \ell(h) + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \forall h \in \mathcal{U}$$

con $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ en W.

La aplicación lineal ℓ es la diferencial de f en x, denotada $\ell := df_x$.

Por convención, una función $\mathbb{R}$-diferenciable se dirá "diferenciable" simplemente.

Notación de Landau: Sea $h \mapsto \eta(h)$ una función arbitraria, entonces:

① $\eta(h) = O(\|h\|^m) \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists\, C > 0$ tq $\|\eta(h)\| \leq C\|h\|^m$.

② $\eta(h) = o(\|h\|^m) \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \exists\, \varepsilon$ tq $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ y $\|\eta(h)\| \leq \varepsilon(h)\|h\|^m$.