

Obs: Recíprocamente, dada una serie de potencias $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ con radio de convergencia $R > 0$ entonces f posee una "primitiva compleja" en el disco abierto $D(0, R)$ dada por

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$$

y tal que $F'(z) = f(z)$. Más aún

i) El radio de convergencia de F es $R > 0$ también.

ii) Cualquier otra primitiva es de la forma $F + C$ para cierta $C \in \mathbb{C}$ constante.

Cultura general En general, no es fácil determinar el comportamiento de una serie de potencias en $z_0 \in \partial D(0, R) = \Gamma(0, R)$: la serie puede no ser continua en z_0 o incluso no ser acotada.

Aun embargo, se tiene el siguiente resultado parcial:

Teorema (Abel): Sea $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ finito, y sea $z_0 \in \Gamma(0, R)$ tal que $f(z_0)$ converge.

Entonces, si $S = S_{z_0, \delta, \eta} \subseteq D(0, R) \cup \{z_0\}$ es un sector circular cerrado de la forma

$$S_{z_0, \delta, \eta} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \delta \text{ y } |\arg(z - z_0)| \leq \pi/2 - \eta\}$$



entonces $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in S} f(z) = f(z_0)$.

En otras palabras, hay continuidad en $z_0 \in \Gamma(0, R) \cap \mathbb{D}$ si no nos acercamos "tangencialmente" a z_0 .

§6. Funciones complejas elementales:

Recordemos algunas funciones "notables" que pueden definirse mediante series de potencias.

Comencemos por la función exponencial compleja, que puede definirse a partir de la exponencial real y las funciones trigonométricas reales (suponiendo que hayan sido definidas rigurosamente anteriormente, cf. §0, pág 2).

También es posible (y conveniente) hacerlo al revés:

Def: Para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos la función exponencial mediante la serie

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

cuyo radio de convergencia es $+\infty$. En part, $e^z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es entera.

La propiedad más importante de e^z es la siguiente.

(14)

Prop (Propiedad fundamental): La función exponencial $\exp$ define un morfismo entre el grupo aditivo $(\mathbb{C}, +)$ y el grupo multiplicativo $(\mathbb{C}^*, \times)$. En otras palabras, para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

Dem: Tenemos que $e^z \cdot e^w = (\sum u_p) \cdot (\sum v_q)$ con $u_p := \frac{z^p}{p!}$ y $v_q := \frac{w^q}{q!}$.

Así, la serie producto está dada por el producto de Cauchy $\sum w_n$ con:

$$w_n = \sum_{p=0}^n \frac{z^p}{p!} \cdot \frac{w^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} z^p w^{n-p} = \frac{(z+w)^n}{n!}$$

y luego $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$. En part, $e^z \cdot e^{-z} = e^0 \stackrel{d}{=} 1$ y así $e^z \in \mathbb{C}^*$.

(Más adelante veremos que $\exp$ es sobreyectiva!). ■

A partir de $\exp$ podemos definir las siguientes funciones clásicas:

① **Coseno hiperbólico:**

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \stackrel{d}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

② **Senos hiperbólicos:**

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \stackrel{d}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

③ **Coseno:**

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh(iz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

④ **Senos:**

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\sinh(iz)}{i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

⚠ **Observaciones importantes**

(i) Todas estas series tienen radio de conv. $R = +\infty$, y luego son funciones enteras.

(ii) Dado que todas las series están definidas mediante coeficientes $a_n \in \mathbb{R}$, ellas toman valores reales al restringirnos al eje real de $\mathbb{C}$.

Más aún, ellas cumplen $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

(iii) La Propiedad fundamental de $\exp$ implica todas las identidades trigonométricas usuales (⚠). Por ejemplo,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \text{ para todos } a, b \in \mathbb{C}.$$

(iv) **Ejercicio** Utilizando las definiciones anteriores, se prueba la identidad de Euler (15)

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{C}$$

(v) En part, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

$$\Rightarrow 1 = e^{iy} e^{-iy} = (\cos(y) + i \sin(y)) \cdot (\cos(y) - i \sin(y)) \quad \text{y por ende}$$
$$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio Probar que $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Teorema:

① La función exponencial real induce un isomorfismo de grupos

$$(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{>0}, \cdot), \quad x \mapsto e^x$$

② La función $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se anula en un real positivo minimal que denotaremos por $\pi/2$ (esta es la definición "oficial" de π).

③ La función exponencial compleja es periódica de período $2\pi i$ e induce morfismos de grupos sobreyectivos

$$(\mathbb{R}, +) \rightarrow (S^1, \cdot), \quad y \mapsto e^{iy}$$

$$(\mathbb{C}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot), \quad z \mapsto e^z$$

donde $e^{iy} = 1$ (resp. $e^z = 1$) si y sólo si $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ (resp. $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$).

Aquí, $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \partial\mathbb{D}$ es el círculo unitario en $\mathbb{C}$.

Dem:

Para ① basta probar que $\exp$ es una biyección continua y creciente entre $\mathbb{R}$ y $]0, +\infty[$. Notar que $e^x = 1 + x + \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x > 0$ para $x \geq 0$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Por otro lado, $e^x = 1/e^{-x}$ implica que $e^x > 0$ para $x \leq 0$ y que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Finalmente, el hecho que $(e^x)' \stackrel{\text{def}}{=} e^x > 0$ implica que e^x es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ ✓

Para ②, supongamos por contradicción que $\cos$ no se anula en $[0, +\infty[$.

Como $\cos(0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$, el Teorema del valor Intermedio implica que $\cos(x) > 0$ en $[0, +\infty[$. Dado que $(\sin(x))' \stackrel{\text{def}}{=} \cos(x)$, tendríamos que $\sin(x)$ sería estrictamente creciente y positiva en $]0, +\infty[$.

Por otro lado, dado que $(\cos(x))' \stackrel{\text{def}}{=} -\sin(x)$, el Teorema del valor Medio nos daría que $\forall x > 1, \exists c \in [1, x]$ tal que

$$\frac{\cos(x) - \cos(1)}{x - 1} = -\sin(c) \leq -\sin(1)$$

$$\text{i.e., } \cos(x) \leq \cos(1) - (x-1)\sin(1) \quad \forall x \geq 1 \Rightarrow \cos(x) < 0 \text{ si } x \gg 0 \quad \nabla$$

Así, $\exists! x_0 := \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}^{>0}$ minimal tal que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ✓

↑ $[0, +\infty[\cap \cos^{-1}(10^3)$ vacíoado $\neq \emptyset$

Para probar (3), notamos que $\cos(x) > 0$ para $x \in [0, \pi/2[$. Además, la relación $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ implica $\sin(\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. Dado que $\cos(x) = (\sin(x))'$, tenemos que $y \mapsto \sin(y)$ es una biyección creciente entre el intervalo $[0, \pi/2]$ y $[0, 1]$ (pues $\sin(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}) = +1$).

$\Rightarrow$ La función $[0, \pi/2] \ni y \mapsto e^{iy}$ parametriza biyectivamente el cuarto de círculo $\sqrt{\cos^2(y) + \sin^2(y)} = |z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ ✓

La identidad de Euler y la Prop. fundamental de exp implican que

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i(y+\pi/2)} = i e^{iy}, \quad e^{2\pi i} = 1$$

$\Rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $y \mapsto e^{iy}$ sobreyectiva y $e^{iy} = 1 \Leftrightarrow y \in 2\pi\mathbb{Z}$ ✓

Finalmente, el último resultado sobre $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ se deduce del hecho que todo complejo $z \neq 0$ admite una forma polar $z = \rho u$, donde $\rho = |z| \in \mathbb{R}^{>0}$ y $u = z/|z| \in S^1$ ✓ ■

Ejercicio importante Probar que la función

(i) **Tangente** $\tan(z) := \sin(z)/\cos(z)$ y **Secante** $\sec(z) := 1/\cos(z)$ son holomorfas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$.

(ii) **Cotangente** $\cot(z) := \cos(z)/\sin(z)$ y **Cosecante** $\csc(z) := 1/\sin(z)$ son holomorfas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$

(iii) **Tangente hiperbólica** $\tanh(z) := \sinh(z)/\cosh(z)$ es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z})$.

(iv) **Cotangente hiperbólica** $\coth(z) := \cosh(z)/\sinh(z)$ es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus i\pi\mathbb{Z}$

(v) Probar que las funciones $\cos(z)$ y $\sin(z)$ no son acotadas en $\mathbb{C}$.

Obs: Terminemos esta sección recordando que:

① La función **logaritmo natural** (real) es por definición el isomorfismo de grupos $\ln: (\mathbb{R}^{>0}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ dado por la inversa de exp.

En particular, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$.

② Si $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, con $\rho = |z| > 0$, entonces $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Aix, para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ la relación $e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$ implica que:

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

$$\text{y } \arg(e^z) = y = \operatorname{Im}(z) \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$$

Ejercicio (muy) útil Probar que $|e^z| \leq e^{|z|}$ y que $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im}(z)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.