La definición más importante del curso es la siguiente:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dirá **holomorfa** en el punto $z_0 \in \Omega$ si $\exists\, r > 0$ tq $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ y f es derivable en $D(z_0, r)$. Diremos que f es **holomorfa en Ω** si es holomorfa $\forall z_0 \in \Omega$. Si $A \subseteq \mathbb{C}$ conjunto no necesariamente abierto, entonces decimos que f es holomorfa en A si $\exists\, \Omega$ abierto tq $A \subseteq \Omega \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ y f holomorfa en Ω.

Notación: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Denotamos por

$$\mathcal{O}(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorfa en } \Omega \}$$

al $\mathbb{C}$-álgebra de funciones holomorfas en Ω.

Una función f holomorfa en todo $\mathbb{C}$ (i.e., $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) es llamada una **función entera**.

Ejemplos:

① La función $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z_0 = 0$, pero NO es holomorfa en $z_0 = 0$.

② Todo polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ es una función entera.

③ La función racional $f(z) = p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z)$ es holomorfa en el abierto $\Omega := U_q \overset{\text{def}}{=} \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } q(z) \neq 0 \}$.

§5. Series de potencias:

En esta sección discutiremos sobre una clase importante de funciones holomorfas. Comencemos por recordar un poco de notación y terminología.

Si $\{u_n\}_{n \geq n_0}$ es una ~~sucesión~~ en $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, de término general u_n, denotamos por $\sum_{n \geq n_0} u_n$ (o por $\sum u_n$) a la sucesión $\{S_n\}_{n \geq n_0}$ de sumas parciales

$$S_n := u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_n \qquad (n \geq n_0).$$

Decimos que la **serie $\sum_{n \geq n_0} u_n$ es convergente** si $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ existe.

Em tal caso, escribimos

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n .$$

"la suma de la serie $\sum_{n \geq n_0} u_n$"

El **resto de orden n** de una serie convergente $\sum u_n$ de suma S es

$$\rho_n := S - S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$$

Def: Sea $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\Omega \subseteq k$ no-vacío. Consideremos una sucesión $\{f_n : \Omega \to k,\ x \mapsto f_n(x)\}_{n \geq n_0}$ de funciones a valores en k y definamos para $f : \Omega \to k$ la norma del supremo

$$\|f\|_{\Omega} := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Entonces, decimos que la serie de funciones $\sum f_n$:

① Converge uniformemente en Ω si la serie $\sum f_n(x)$ converge $\forall x \in \Omega$ (ie, converge puntualmente en Ω) y los restos verifican $\|\rho_n\|_{\Omega} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

② Converge normalmente en Ω si la serie real $\sum \|f_n\|_{\Omega}$ converge.

Obs: ① Convergencia normal $\Rightarrow$ Convergencia uniforme.

② Convergencia normal $\Rightarrow$ Convergencia absoluta uniforme (ie, $\sum |f_n|$ converge uniformemente), pero no coinciden:

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Analizar la convergencia normal y (absoluta) uniforme de $\sum f_n$ donde $f_n(x) = 0$ si $x \neq n$ y $f_n(n) = 1/n$.

③ M-test de Weierstrass:

si $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in \Omega$ y $\sum M_n$ converge en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Convergencia absoluta uniforme de $\sum f_n$ en Ω.

Def: Una serie de potencias compleja es una serie de funciones de la forma

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$ es una variable compleja. El dominio de convergencia de la serie de potencias está dado por

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \sum a_n z^n \text{ converge}\}.$$

Si $z \in \mathcal{D}$, escribimos $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ el valor de la suma en z.

Teorema: Sea $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ serie de potencias compleja y sea $R \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ dado por:

$$R := \sup\{r \geq 0 \text{ tq la sucesión } \{|a_n| r^n\}_{n \geq 0} \text{ es acotada}\}.$$

Entonces, el dominio de convergencia $\mathcal{D}$ verifica $D(0,R) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \overline{D}(0,R)$.

Más aún, $\sum a_n z^n$ converge normalmente en todo disco cerrado $\overline{D}(0,r) \subseteq D(0,R)$.

Además, el radio de convergencia R está dado por

$$R = \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\} \quad \text{(fórmula de Hadamard)}$$

Aquí: $1/0 := +\infty$.

Finalmente, si $a_n \neq 0$ $\forall n$ y $l := \lim_{n \to +\infty} |a_{n+1}|/|a_n|$ existe en $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ entonces $R = 1/l$ (criterio de d'Alembert).

<u>Dem</u>: Sea $A := \{r \geq 0 \text{ tq } \{|a_n| r^n\}_{n\geq 0} \text{ es acotada}\} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ y $R := \sup A$.
$\Rightarrow$ si $|z| > R$, $|z| \notin A$ y luego $\{|a_n||z|^n\}$ no-acotada $\Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge.
Así, $\mathcal{D} \subseteq \overline{D}(0,R)$ ✓
Sea $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tq $r < R = \sup A \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \exists\, \rho \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tq $\rho \in A$ y $r < \rho < R$.
$\Rightarrow \exists\, C \geq 0$ tq $|a_n|\rho^n \leq C \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, y luego para $z \in \overline{D}(0,r)$ tenemos

$$|a_n z^n| \leq |a_n|\rho^n \cdot \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq C\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \quad \text{con } r/\rho < 1.$$

$$\Rightarrow \Big|\sum a_n z^n\Big| \underset{\text{desig. triangular}}{\leq} \sum |a_n z^n| \leq \sum \|a_n z^n\|_{\overline{D}(0,r)} \leq C \sum \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leftarrow \text{convergente!}$$

Así, $\sum a_n z^n$ converge normalmente en $\overline{D}(0,r)$ $\forall r < R$ y así $D(0,R) \subseteq \mathcal{D}$ ✓
Veamos la fórmula de Hadamard:
Si $r > \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$, hay infinitos índices n tales que $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \leq r'$ para cierto r' con $0 < r' < r$.
$\Rightarrow |a_n| r'^n \geq 1$ y luego la subsucesión $|a_n| r^n \geq \left(\frac{r}{r'}\right)^n \longrightarrow +\infty$ no es acotada y luego (por definición) $R \leq r$.
Recíprocamente, si $r < \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$ entonces $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \geq r$ para $n \geq n_0$ suficientemente grande $\Rightarrow |a_n| r^n \leq 1 \;\; \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| r^n$ acotada.
Luego, por definición tenemos $R \geq r$ y así $R = \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$ ✓
Finalmente, el criterio de d'Alembert se deduce a partir del hecho

$$\text{“} \lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = l \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \text{”}$$

que se deja como $\boxed{\text{Ejercicio}}$. ■

<u>Ejemplos</u>:
1. La serie geométrica $\sum_{n\geq 0} z^n$ tiene radio de conv. $R = 1$ y $\mathcal{D} = D(0,1)$.
2. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^n}$ tiene radio de convergencia $R = +\infty$ y $\mathcal{D} = \mathbb{C}$.
3. La serie $\sum_{n \geq 1} n^n z^n$ tiene radio de conv. $R = 0$ y $\mathcal{D} = \{0\}$.
4. Dado que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

Las series $\sum a_n z^n$ y $\sum n^\alpha a_n z^n$ tienen el mismo radio de convergencia.
Sin embargo, reemplazar a_n por $n^\alpha a_n$ puede afectar la convergencia en el borde $\partial D(0,R)$. Por ejemplo, para $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ se tiene $\mathcal{D} = \overline{D}(0,1)$ mientras que $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ diverge en $z = 1 \in \partial D(0,1)$.

Más precisamente, el siguiente resultado de Abel permitirá probar que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge en $\mathcal{D} = \overline{D}(0,1) \setminus \{1\}$.

Lema de Abel: Sea $\sum_{n\geq n_0} u_n v_n$ una serie compleja. Supongamos que $u_n \in \mathbb{R}$ y $u_n \geq 0$ $\forall n \geq n_0$, y que $\{u_n\}$ es una sucesión decreciente que converge a 0. Supongamos además que las sumas parciales

$$S_n = v_{n_0} + v_{n_0+1} + \ldots + v_n$$

cumplen $|S_n| \leq M$ $\forall n \geq n_0$ para cierta constante $M \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

$\Rightarrow$ La serie $\sum u_n v_n$ es convergente.

Dem: Veamos que $\left\{\sum_{n\geq n_0}^{p} u_n v_n\right\}_{p\geq n_0}$ es una sucesión de Cauchy ($\Rightarrow$ converge ✓):

Para todos $q > p > n_0$ escribimos

$$u_p v_p + \ldots + u_q v_q = u_p(S_p - S_{p-1}) + u_{p+1}(S_{p+1} - S_p) + \ldots + u_q(S_q - S_{q-1})$$

$$= -u_p S_{p-1} + S_p \underbrace{(u_p - u_{p+1})}_{\geq 0} + \ldots + S_{q-1}\underbrace{(u_{q-1} - u_q)}_{\geq 0} + u_q S_q$$

$\geq 0 \leftarrow$ decreciente $\rightarrow \geq 0$

$|S_n| \leq M$

$$\Rightarrow \quad |u_p v_p + \ldots + u_q v_q| = M u_p + M(u_p - u_{p+1}) + \ldots + M(u_{q-1} - u_q) + M u_q$$

$$= 2M u_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 . \quad \blacksquare$$

Ejemplo: Sea $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ y tq $z \neq 1$. Consideremos la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ donde $u_n := 1/n \searrow_{n\to\infty} 0$ y $v_n := z^n = e^{ni\theta}$. Dado que:

$$v_1 + \ldots + v_n = e^{i\theta}\left(\frac{e^{ni\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right)$$

$\Rightarrow |v_1 + \ldots + v_n| \leq M := 2/|e^{i\theta} - 1|$ para $e^{i\theta} \neq 1$.

Así, el Lema de Abel implica la convergencia de $\sum z^n/n$ si $|z| = 1$ y $z \neq 1$.

Recordemos que podemos sumar y multiplicar series:

Sean $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ series de potencias con radios de convergencia R' y R'' respectivamente. Entonces, podemos considerar:

① **La suma** $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n := \sum (a_n + b_n) z^n$, que ciertamente converge en $D(0,R') \cap D(0,R'')$ y luego, su radio de conv. R^+ verifica

$$R^+ \geq \min(R', R'')$$

Más aún, $R^+ = \min(R', R'')$ si $R' \neq R''$ pues la serie diverge para $R' < |z| < R''$.

Ejercicio Dar un ejemplo donde $R^+ > \min(R', R'')$.

② **El producto** $(\sum a_n z^n) \cdot (\sum b_n z^n)$: Recordemos que si $\sum_{p\geq 0} u_p$ y $\sum_{q\geq 0} v_q$ son series absolutamente convergentes, entonces

$$\left(\sum u_p\right) \cdot \left(\sum v_q\right) = \sum_{n\geq 0} w_n$$

donde $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0$. $(\bigstar)$

En el caso particular de series de potencias, considerando $u_n := a_n z^n$ y $v_n = b_n z^n$, la fórmula $(\bigstar)$ nos da:

$$\left(\sum a_n z^n\right) \cdot \left(\sum b_n z^n\right) = \sum c_n z^n$$

$$\text{donde } c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} \quad \forall n \geq 0$$

"Producto de Cauchy"

La serie producto converge en $D(0,R') \cap D(0,R'')$ pues cada factor converge absolutamente en dicho conjunto. Así, su radio de convergencia $R^{\times}$ verifica

$$R^{\times} \geq \min(R', R'')$$

Ejercicio Considere las series $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = 1 + \sum_{n \geq 1} 2^{n-1} z^n$ y $\sum_{n \geq 0} b_n z^n = 1 - \sum_{n\geq 1} z^n$ y pruebe que es posible que $R^{\times} > \min(R', R'')$ incluso cuando $R' \neq R''$.

El siguiente importante resultado nos dará muchos ejemplos de funciones holomorfas.

Teorema: Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces, $f'(z)$ existe para todo $z \in D(0,R)$ (ie, $f \in \mathcal{O}(D(0,R))$!) Más aún,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

y en particular $f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n z^{n-p}$ $\forall p \geq 1$. Además, dichas series de potencias tienen radio de convergencia $R > 0$ también.

Dem: El hecho que las series derivadas tengan el mismo radio de convergencia viene del hecho que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n(n-1)\cdots(n-p+1)} = 1$ para todo $p \in \mathbb{N}$ ✓

Luego, la fórmula del binomio de Newton nos da:

$$(z+h)^n = z^n + nhz^{n-1} + \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} h^p z^{n-p}$$

con $\binom{n}{p} \overset{\text{dy}}{=} \frac{n(n-1)}{p(p-1)} \binom{n-2}{p-2} \leq n(n-1) \binom{n-2}{p-2}$ y así:

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right| \leq n(n-1)|h| \sum_{p=2}^{n} \binom{n-2}{p-2} |h|^{p-2} |z|^{n-p} \overset{\text{Newton}}{=} n(n-1)|h| (|z|+|h|)^{n-2}$$

Sea $z \in D(0,R)$ y $h \in \mathbb{C}^*$ tal que $z+h \in D(0,R)$. El cálculo anterior nos da:

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n| (|z|+|h|)^{n-2}$$

Si consideramos $\delta > 0$ tq $|h| \leq \delta < R - |z|$ entonces $|z| + |h| \leq r := |z| + \delta < R$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 2} n(n-1)|a_n|(|z|+|h|)^{n-2} \leq M := \sum_{n\geq 2} n(n-1)|a_n| r^{n-2} < +\infty \quad (\text{pues } r < R)$$

Luego, concluimos al considerar $h \to 0$ que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} \quad \text{para todo } z \in D(0,R) \quad \blacksquare$$

Obs: Recíprocamente, dada una serie de potencias $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ con radio de convergencia $R > 0$ entonces f posee una "primitiva compleja" en el disco abierto $D(0,R)$ dada por

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$$

y tal que $F'(z) = f(z)$. Más aún

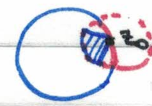
i) El radio de convergencia de F es $R > 0$ también.

ii) Cualquier otra primitiva es de la forma $F + C$ para cierta $C \in \mathbb{C}$ constante.

Cultura general: En general, no es fácil determinar el comportamiento de una serie de potencias en $z_0 \in \partial D(0,R) = \Gamma(0,R)$: la serie puede no ser continua en z_0 o incluso no ser acotada.

Sin embargo, se tiene el siguiente resultado parcial:

Teorema (Abel): Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ finito, y sea $z_0 \in \Gamma(0,R)$ tal que $f(z_0)$ converge. Entonces, si $S = S_{z_0,\delta,\eta} \subseteq D(0,R) \cup \{z_0\}$ es un sector circular cerrado de la forma



$$S_{z_0,\delta,\eta} := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z - z_0| \leq \delta \text{ y } |\text{ángulo}(z - z_0, z_0)| \leq \pi/2 - \eta \}$$

entonces $\lim_{z \to z_0, z \in S} f(z) = f(z_0)$.

En otras palabras, hay continuidad en $z_0 \in \Gamma(0,R) \cap D$ si no nos acercamos "tangencialmente" a z_0.

§6. Funciones complejas elementales:

Recordemos algunas funciones "notables" que pueden definirse mediante series de potencias.

Comencemos por la función exponencial compleja, que puede definirse a partir de la exponencial real y las funciones trigonométricas reales (suponiendo que hayan sido definidas rigurosamente anteriormente, cf. §0, pág 2). También es posible (y conveniente) hacerlo al revés:

Def: Para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos la función exponencial mediante la serie

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

cuyo radio de convergencia es $+\infty$. En part, $e^z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es entera.