Def: Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ función. Decimos que f alcanza un:

① **máximo** en $z_0\in\Omega$ si:
$$|f(z)|\leq|f(z_0)| \quad \text{para todo } z\in\Omega.$$

② **mínimo** en $z_0\in\Omega$ si:
$$|f(z_0)|\leq|f(z)| \quad \text{para todo } z\in\Omega.$$

Hecho (Teorema de Weierstrass): Sea $K\subseteq\mathbb{C}$ un conjunto compacto y sea $f:K\to\mathbb{C}$ una función continua.
$\Rightarrow f$ alcanza un máximo y un mínimo en K.
En particular, $|f|$ es acotada en K.

Luego de estos preámbulos, estamos listos para comenzar MAT235:

§4. Funciones holomorfas:

Def: Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ y $z_0\in\Omega'$ punto de acumulación de Ω. Diremos que f es **derivable** (en sentido complejo) en $z_0\in\Omega$ si el límite
$$\lim_{h\to0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\Omega}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$
existe. En tal caso, denotamos su valor por $f'(z_0)\in\mathbb{C}$.

Observaciones importantes:

① Aquí, $h\in\mathbb{C}^*\overset{\text{def}}{=}\mathbb{C}\setminus\{0\}$ y $z_0+h\in\Omega$. Es importante notar que h se acerca a $0\in\mathbb{C}$ en cualquier dirección!

② Como consecuencia del álgebra de límites, si f y g son derivables en z_0:

(i) $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, λf derivable en z_0 y $(\lambda f)'(z_0)=\lambda f'(z_0)$.

(ii) $f+g$ derivable en z_0 y $(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)$.

(iii) fg derivable en z_0 y $(fg)'(z_0)=f(z_0)g'(z_0)+f'(z_0)g(z_0)$ (Leibniz)

(iv) si $g(z_0)\neq0$, f/g es derivable en z_0 y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0)=\frac{g(z_0)f'(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

③ Si f derivable en z_0, entonces f es continua en z_0. En efecto:
$$\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{(f(z)-f(z_0))}{z-z_0}\cdot(z-z_0)\right]=f'(z_0)\cdot0=0 \quad ✓$$

④ Si f es derivable en z_0 y si g es derivable en $f(z_0)$ entonces la composición $(g\circ f)$ es derivable en z_0 y además
$$(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\,f'(z_0) \quad \text{(Regla de la cadena)}$$

Ejemplos:

① sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f(z) = \lambda$ (constante). Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\lambda - \lambda}{h} = 0$$

$\Rightarrow f'(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

② sea $f(z) = z$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{z_0 + h - z_0}{h} = 1$$

$\Rightarrow f'(z_0) = 1 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

③ Ejemplo ② + Obs. ② (iii) $\Rightarrow f(z) = z^n$ derivable $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Más aún, tenemos inductivamente que $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $\forall z_0 \in \mathbb{C}$
(Obs: Aquí, definimos $0^0 := 1$ por conveniencia).

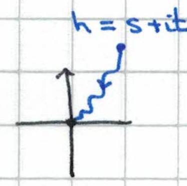
④ Ejemplo ③ + Obs ② (i) & (ii) $\Rightarrow$ Todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in \underbrace{\mathbb{C}[z]}_{\text{anillo de polinomios}}$ es derivable $\forall z_0 \in \mathbb{C}$.

⑤ sea $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m} \in \overbrace{\mathbb{C}(z)}^{\text{cuerpo de funciones racionales}}$ función racional

y sea $\mathcal{U}_q := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } q(z) \neq 0 \}$ (abierto de $\mathbb{C}$).
Entonces, el Ejemplo ④ + Obs ② (iv) $\Rightarrow f$ es derivable en $\mathcal{U}_q \subseteq \mathbb{C}$.

⑥ Sea $f(z) = \overline{z}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z_0} + \overline{h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$



Si $h = s + it \in \mathbb{C}$ verifica

(i) $s = 0$: $\quad \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{\overline{it}}{it} = -1$.

(ii) $t = 0$: $\quad \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s} = 1$.

$\Rightarrow f(z) = \overline{z}$ **no** es derivable en ningún punto del plano complejo
(a pesar que $F(x,y) = (x, -y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$!).

⑦ Sea $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)(\overline{z_0} + \overline{h}) - z_0\overline{z_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(z_0 + \overline{h} + z_0 \frac{\overline{h}}{h} \right).$$

Luego, $f'(z_0)$ existe $\Leftrightarrow z_0 = 0$. Más aún, $f'(0) = 0$.

La definición más importante del curso es la siguiente:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dirá **holomorfa** en el punto $z_0 \in \Omega$ si $\exists\, r > 0$ tq $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ y f es derivable en $D(z_0, r)$. Diremos que f es **holomorfa en Ω** si es holomorfa $\forall z_0 \in \Omega$. Si $A \subseteq \mathbb{C}$ conjunto no necesariamente abierto, entonces decimos que f es holomorfa en A si $\exists\, \Omega$ abierto tq $A \subseteq \Omega \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ y f holomorfa en Ω.

Notación: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Denotamos por

$$\mathcal{O}(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorfa en } \Omega \}$$

al $\mathbb{C}$-álgebra de funciones holomorfas en Ω.

Una función f holomorfa en todo $\mathbb{C}$ (ie, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) es llamada una **función entera**.

Ejemplos:

① La función $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z_0 = 0$, pero NO es holomorfa en $z_0 = 0$.

② Todo polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ es una función entera.

③ La función racional $f(z) = p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z)$ es holomorfa en el abierto $\Omega := \mathcal{U}_q \overset{\text{def}}{=} \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } q(z) \neq 0 \}$.

§5. Series de potencias:

En esta sección discutiremos sobre una clase importante de funciones holomorfas. Comencemos por recordar un poco de notación y terminología.

Si $\{u_n\}_{n \geq n_0}$ es una sucesión en $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, de término general u_n, denotamos por $\sum_{n \geq n_0} u_n$ (o por $\sum u_n$) a la sucesión $\{S_n\}_{n \geq n_0}$ de sumas parciales

$$S_n := u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_n \qquad (n \geq n_0).$$

Decimos que la **serie $\sum_{n \geq n_0} u_n$ es convergente** si $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ existe.

"la suma de la serie $\sum_{n \geq n_0} u_n$"

En tal caso, escribimos

$$S = \sum_{n = n_0}^{+\infty} u_n .$$

El **resto de orden n** de una serie convergente $\sum u_n$ de suma S es

$$\rho_n := S - S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{p = n+1}^{+\infty} u_p$$