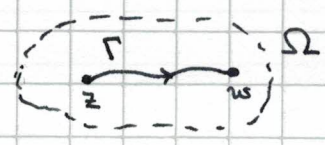


Hecho: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Entonces:

Ω es conexo $\Leftrightarrow$ Todo par de puntos en Ω puede conectarse mediante una curva Γ completamente contenida en Ω .

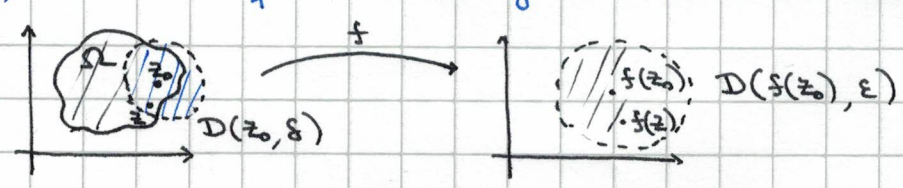


Obs: Muy pronto definiremos formalmente lo que entendemos por "curvas".

§3. Funciones continuas:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es continua en el punto $z_0 \in \Omega$ si:

$$" \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } z \in \Omega \text{ y } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon "$$



Esto es equivalente a:

$$" \forall \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega \text{ sucesión tq } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, \text{ se tiene } \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z_0) "$$

Decimos que f es continua en Ω si es continua en cada punto $z_0 \in \Omega$.

Ejercicio Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ función, y escribamos $z = x + iy$. Si escribimos $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ e identificamos f con la función real $\bar{f}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Probar que:
 f continua en $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en (x_0, y_0) .

Prop: Sean $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas en $z_0 \in \Omega$. Entonces:

- ① $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λf es continua en z_0 .
- ② $f + g$ es continua en z_0 .
- ③ fg es continua en z_0 .
- ④ Si $g(z_0) \neq 0$ entonces f/g es continua en z_0 .

i.e., $\mathbb{C}$ -es. que además es un anillo conmutativo

Em part, $\mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{C}) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ continua}\}$ es una $\mathbb{C}$ -álgebra

Ejercicio Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ función continua. Probar que la función $|f|: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $z \mapsto |f(z)|$ es continua. [Indicación: Usar la desigualdad triangular]

La ventaja de observar $|f|$ en lugar de f , es que $|f|$ toma valores reales y por ende tiene sentido hablar de mínimos y máximos:

Def: Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ función. Decimos que f alcanza un:

(6)

① máximo en $z_0 \in \Omega$ si:

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \text{ para todo } z \in \Omega.$$

② mínimo en $z_0 \in \Omega$ si:

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \text{ para todo } z \in \Omega.$$

Hecho (Teorema de Weierstrass): Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto compacto y sea $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua.

$\Rightarrow f$ alcanza un máximo y un mínimo en K .

En particular, $|f|$ es acotada en K .

Luego de estos preámbulos, estamos listos para comenzar MAT235:

§4. Funciones holomorfas:

Def: Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega'$ punto de acumulación de Ω . Decimos que f es derivable (en sentido complejo) en $z_0 \in \Omega$ si el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \stackrel{!}{=} \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

exista. En tal caso, denotamos su valor por $f'(z_0) \in \mathbb{C}$.

Observaciones importantes:

① Aquí, $h \in \mathbb{C}^* \stackrel{!}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $z_0+h \in \Omega$. Es importante notar que h se acerca a $0 \in \mathbb{C}$ en cualquier dirección!

② Como consecuencia del álgebra de límites, si f y g son derivables en z_0 :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λf derivable en z_0 y $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$.

(ii) $f+g$ derivable en z_0 y $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.

(iii) fg derivable en z_0 y $(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$ (Leibniz)

(iv) si $g(z_0) \neq 0$, f/g es derivable en z_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

③ si f derivable en z_0 , entonces f es continua en z_0 . En efecto:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \right] = f'(z_0) \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

④ si f es derivable en z_0 y g es derivable en $f(z_0)$ entonces la composición $(g \circ f)$ es derivable en z_0 y además

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0) \quad \text{(Regla de la cadena)}$$