§2. Topología de $\mathbb{C}$:

Def: Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^{>0}$. Definimos:

① $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < r\}$ (disco abierto). 

② $\overline{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| \leq r\}$ (disco cerrado). 

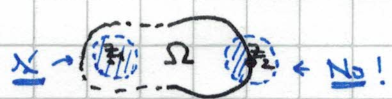
③ $\Gamma(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| = r\}$ (círculo). 

Notación: $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1\} \overset{\text{def}}{=} D(0,1)$ "disco unitario"

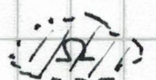
Recordemos las nociones principales de topología que necesitaremos:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ subconjunto, y sea $z \in \mathbb{C}$. Decimos que:

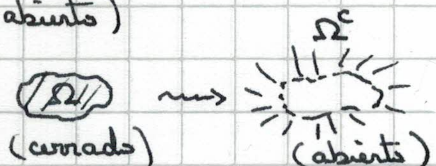
① z es un punto interior de Ω si $\exists\, r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq \Omega$



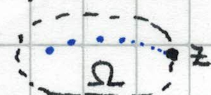
Denotamos $\text{int}(\Omega)$ ó Ω° a $\{z \in \mathbb{C}$ tq z punto interior de $\Omega\} \subseteq \Omega$.

② Ω es abierto si $\text{int}(\Omega) = \Omega$.  (abierto)

③ Ω es cerrado si $\Omega^c \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \Omega$ es abierto.

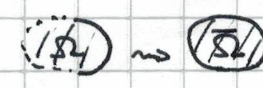


④ z es un punto límite o punto de acumulación de Ω si existe $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ sucesión tq $z_n \neq z$ $\forall n$ y $\lim_{n \to \infty} z_n = z$.



Denotamos $\Omega' := \{z \in \mathbb{C}$ tal que z es punto de acumulación de $\Omega\}$.

Hecho (ó $\boxed{\text{Ejercicio}}^*$): Ω cerrado $\iff \Omega' \subseteq \Omega$

⑤ La clausura ó adherencia $\overline{\Omega}$ de Ω es $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Omega'$ 

⑥ La frontera ó borde $\partial\Omega$ de Ω es $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \text{int}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^c}$

 $\rightsquigarrow \partial\Omega =$ 

⑦ Ω es acotado si $\exists\, M \in \mathbb{R}^{>0}$ tq $\Omega \subseteq D(0, M)$. 

En este caso, definimos el diámetro de Ω por

$$\text{diam}(\Omega) := \sup_{z, w \in \Omega} |z - w|$$

⑧ Ω es compacto si es cerrado y acotado.

Dado que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{eucl})$, tenemos la siguiente caracterización de compacidad en términos de sucesiones:

Hecho: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es compacto $\Leftrightarrow$ Toda sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ posee una subsucesión convergente a un punto en Ω.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Un cubrimiento abierto de Ω es una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos de $\mathbb{C}$ tales que $\Omega \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.

Se tiene la siguiente caracterización topológica de la compacidad:

Hecho: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es compacto $\Leftrightarrow$ Todo cubrimiento abierto de Ω admite un subcubrimiento finito.

El siguiente resultado será de utilidad más adelante:

Prop: Sea $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots \supseteq K_n \supseteq \ldots$ una sucesión de conjuntos compactos no-vacíos de $\mathbb{C}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$.
$\Rightarrow \exists!\, w \in \mathbb{C}$ tal que $w \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Dem: Elegimos un elemento $z_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
Notamos que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$ implica que $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy.
Como $\mathbb{C}$ es completo, $\exists\, w \in \mathbb{C}$ tq $\lim_{n\to\infty} z_n = w$.
Veamos que dicho w verifica lo deseado:
Dado que K_n es compacto y $\{z_m\}_{m\geq n} \subseteq K_n$ suc. convergente, $w \in K_n \ \forall n$
Finalmente, si elegimos otra sucesión $\{z_n'\}_{n\geq 1}$ con $z_n' \in K_n$ y tal que $\lim_{n\to\infty} z_n' = w' \neq w$, se tendría que $|w - w'| > 0$, lo cual es una contradicción con el hecho que $\operatorname{diam}(K_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. ■

Recordemos la importante propiedad topológica siguiente:

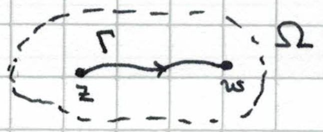
Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto (resp. cerrado). Decimos que Ω es conexo si NO es posible hallar dos conjuntos abiertos (resp. cerrados) no-vacíos y disjuntos Ω_1 y Ω_2 tales que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ ← unión disjunta

⚠ **Terminología**: Una región es un abierto conexo de $\mathbb{C}$.

Una caracterización importante de los conjuntos conexos del plano complejo es:

Hecho: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Entonces:

Ω es conexo $\Leftrightarrow$ Todo par de puntos en Ω puede conectarse mediante una curva Γ completamente contenida en Ω.

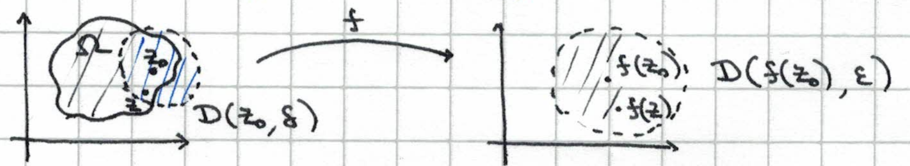


Obs: Muy pronto definiremos formalmente lo que entendemos por "curvas".

§3. Funciones continuas:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es **continua** en el punto $z_0 \in \Omega$ si:

"$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$"



Esto es equivalente a:

"$\forall \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ sucesión tq $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, se tiene $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$"

Decimos que f es **continua en Ω** si es continua en cada punto $z_0 \in \Omega$.

Ejercicio Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función, y escribamos $z = x + iy$. Si escribimos $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ e identificamos f con la función real $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$. Probar que:

f continua en $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ son continuas en (x_0, y_0).

Prop: Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones continuas en $z_0 \in \Omega$. Entonces:

1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λf es continua en z_0.
2. $f + g$ es continua en z_0.
3. fg es continua en z_0.
4. Si $g(z_0) \neq 0$ entonces f/g es continua en z_0.

En part, $\underbrace{\mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{C}) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ continua}\} \text{ es una } \mathbb{C}\text{-álgebra}}$

ie, $\mathbb{C}$-e.v. que además es un anillo conmutativo

Ejercicio Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función continua. Probar que la función

$$|f| : \Omega \to \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad z \mapsto |f(z)|$$

es continua. [Indicación: Usar la desigualdad triangular]

La ventaja de observar $|f|$ en lugar de f, es que $|f|$ toma valores reales y por ende tiene sentido hablar de mínimos y máximos: