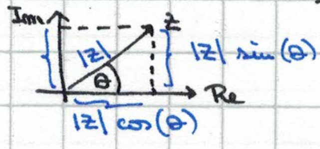
Recuerdo (forma polar): sea $z \in \mathbb{C}^* \overset{df}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Un **argumento** de z, denotado $\arg(z)$, es un real $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = |z| \cos(\theta) \\ \mathrm{Im}(z) = |z| \sin(\theta) \end{cases}$$



$\arg(z)$ está bien definido módulo 2π (ie, $\arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

$\Rightarrow z = \mathrm{Re}(z) + i\, \mathrm{Im}(z) \overset{df}{=} |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ es la **forma polar** de $z \in \mathbb{C}^*$

Importante (**identidad de Euler**): Si $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Dem: sea $f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \Rightarrow f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta)$
$= i(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = i f(\theta)$

Luego f verifica la EDO: $\{f' = if,\ f(0) = 1\} \Rightarrow f(\theta) = e^{i\theta}$ ∎

Df: Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Definimos la **exponencial** de z mediante:

$$e^z :\overset{df}{=} e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Ejercicio útil Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Probar que $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.
2. Probar que $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (**de Moivre**).
3. Probar que $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

§1. Sucesiones:

Df: Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Diremos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a $w \in \mathbb{C}$ si $\lim_{n\to\infty} |z_n - w| = 0$, y escribimos $\lim_{n\to\infty} z_n = w$.

Obs: Dado que $|\cdot|$ proviene de $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2,\,\text{eucl.}}$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = w \iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(w) \text{ y } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(w).$$

Df: Decimos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** si: $\forall \varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq N$.

Hecho (Teorema de Bolzano-Weierstrass): $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\text{eucl}})$ es completo (ie, toda sucesión de Cauchy converge).

Corolario: $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es completo.