

- Temario:
- 1 Funciones holomorfas e Integración.
 - 2 Funciones meromorfas y Residuos
 - 3 Introducción al Análisis de Fourier.

Referencias: "Complex Analysis" Stein & Shakarchi.
 "Fourier Analysis: An Introduction" Stein & Shakarchi.

Parte I: "Funciones holomorfas e Integración"

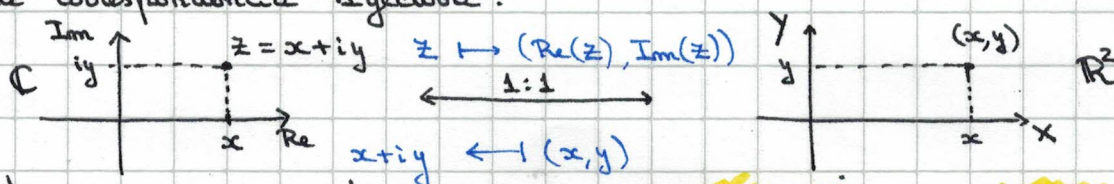
§0. Preliminares:

Sea $\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}[X] / \langle X^2 + 1 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{[a + bX] \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } [X^2] = [-1]\}$.

→ Notación: $i \stackrel{\text{def}}{=} [X] \quad (\Rightarrow i^2 = -1 \text{ en } \mathbb{C})$.

⚠ Em la práctica: $\mathbb{C} = \{z = x + iy \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \text{ y con } i^2 = -1\}$.

Hay una correspondencia biyectiva:



Aquí, $x \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re}(z)$ (resp. $y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im}(z)$) es la parte real (resp. imaginaria) de z .

La estructura de anillo se hereda de $\mathbb{R}[X]$: $\lambda: z = x + iy, w = s + it$

$$\Rightarrow z + w \stackrel{\text{def}}{=} (x + s) + i(y + t)$$

$$z \cdot w \stackrel{\text{def}}{=} (x + iy)(s + it) = xs + ixt + iys + i^2 yt \\ = (xs - yt) + i(xt + ys).$$

Observaciones:

① $\lambda: z = x + iy \neq 0$ (i.e., $x \neq 0$ ó $y \neq 0$) entonces $z^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ cumple $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$. Luego, $\mathbb{C}$ es un cuerpo! (eg. $i^{-1} = -i$).

② λ definimos $\bar{z} := x - iy$ (conjugado), entonces:
 $z\bar{z} = x^2 + y^2$; $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

③ $\mathbb{C}$ hereda de $\mathbb{R}^2$ la estructura de espacio vectorial normado:

Definimos $|z| \stackrel{\text{def}}{=} \|(\text{Re}(z), \text{Im}(z))\|_{\mathbb{R}^2}$, es decir $= \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ que llamamos al módulo de z .

En particular, $|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$ y $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ para todo $z \neq 0$.

④ Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos que:

i) $|zw| = |z| \cdot |w|$, $|\text{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\text{Im}(z)| \leq |z|$

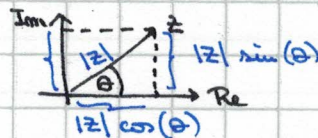
ii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ y $||z| - |w|| \leq |z - w|$ (desigualdad triangular).

Recuerdos (forma polar): sea $z \in \mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(2)

Un argumento de z , denotado $\arg(z)$, es un real $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\theta) \\ \operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\theta) \end{cases}$$



⚠ $\arg(z)$ está bien definido módulo 2π (i.e., $\arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

$\Rightarrow z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \stackrel{\text{def}}{=} |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ es la forma polar de $z \in \mathbb{C}^*$.

[Importante (identidad de Euler): si $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Dem: sea $f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \Rightarrow f'(\theta) = -\sin(\theta) + i \cos(\theta)$
 $= i(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = i f(\theta)$

Luego f verifica la EDO: $\{f' = if, f(0) = 1\} \Rightarrow f(\theta) = e^{i\theta}$ ■

[Def: sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Definimos la exponencial de z mediante:

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Ejercicio útil Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

① Probar que $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

② Probar que $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (de Moivre).

③ Probar que $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

§1. Sucesiones:

[Def: sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Diremos que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $w \in \mathbb{C}$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - w| = 0$, y escribimos $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$.

Obs: Dado que $|\cdot|$ proviene de $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2, \text{euc}}$, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(w) \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(w).$$

[Def: Decimos que $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si: $\forall \varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq N$.

Hecho (Teorema de Bolzano - Weierstrass): $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\text{euc}})$ es completo (i.e., toda sucesión de Cauchy converge).

[Corolario: $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es completo.