Temario: ① Funciones holomorfas e Integración.
② Funciones meromorfas y Residuos
③ Introducción al Análisis de Fourier.

Referencias: "Complex Analysis" Stein & Shakarchi.
"Fourier Analysis: An Introduction" Stein & Shakarchi.

Parte I: "Funciones holomorfas e Integración"

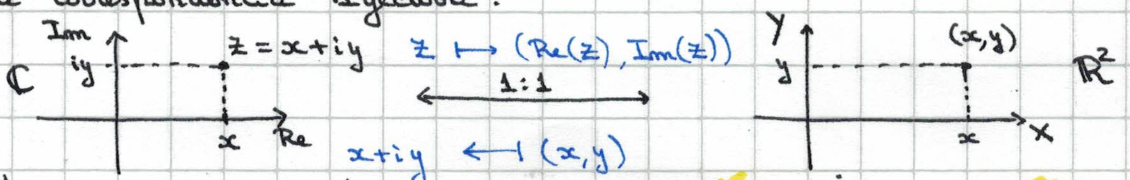
§0. Preliminares:

Sea $\mathbb{C} \overset{\text{def}}{:=} \mathbb{R}[X]/\langle X^2+1\rangle \overset{\text{def}}{=} \{[a+bX] \text{ con } a,b\in\mathbb{R} \text{ y } [X^2]=[-1]\}$.

$\rightsquigarrow$ **Notación**: $i \overset{\text{def}}{:=} [X]$ ($\Rightarrow i^2=-1$ en $\mathbb{C}$).

⚠ En la práctica: $\mathbb{C} = \{z = x+iy \text{ con } x,y\in\mathbb{R} \text{ y con } i^2=-1\}$.

Hay una correspondencia biyectiva:



Aquí, $x \overset{\text{def}}{:=} \mathrm{Re}(z)$ (resp. $y \overset{\text{def}}{:=} \mathrm{Im}(z)$) es la parte real (resp. imaginaria) de z.

La estructura de anillo se hereda de $\mathbb{R}[X]$: si $z=x+iy$, $w=s+it$

$$\Rightarrow\ z+w \overset{\text{def}}{:=} (x+s)+i(y+t)$$

$$z\cdot w \overset{\text{def}}{:=} (x+iy)(s+it) = xs + ixt + iys + i^2 yt = (xs-yt)+i(xt+ys).$$

Observaciones:

① Si $z = x+iy \neq 0$ (ie, $x\neq 0$ ó $y\neq 0$) entonces $z^{-1} \overset{\text{def}}{:=} \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ cumple $z\cdot z^{-1} = z^{-1}\cdot z = 1$. Luego, $\mathbb{C}$ es un cuerpo❗ (eg. $i^{-1}=-i$).

② Si definimos $\bar{z} := x - iy$ (conjugado), entonces:
$z\bar{z} = x^2+y^2$; $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

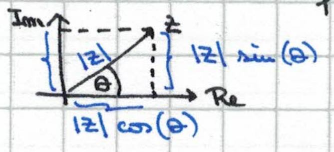
③ $\mathbb{C}$ hereda de $\mathbb{R}^2$ la estructura de espacio vectorial normado:
Definimos $|z| \overset{\text{def}}{:=} \|(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))\|_{\mathbb{R}^2,\text{eucl}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$
que llamamos el módulo de z.
En particular, $|z|^2 = x^2+y^2 = z\bar{z}$ y $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ para todo $z\neq 0$.

④ Para todos $z,w\in\mathbb{C}$ tenemos que:
i) $|zw| = |z|\cdot|w|$, $|\mathrm{Re}(z)|\leq|z|$ y $|\mathrm{Im}(z)|\leq|z|$
ii) $|z+w|\leq|z|+|w|$ y $||z|-|w||\leq|z-w|$ (desigualdad triangular).

Recuerdo (forma polar): sea $z \in \mathbb{C}^* \overset{\text{dy}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Un argumento de z, denotado $\arg(z)$, es un real $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = |z| \cos(\theta) \\ \mathrm{Im}(z) = |z| \sin(\theta) \end{cases}$$



$\arg(z)$ está bien definido módulo 2π (ie, $\arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

$\Rightarrow$ $z = \mathrm{Re}(z) + i\, \mathrm{Im}(z) \overset{\text{dy}}{=} |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ es la forma polar de $z \in \mathbb{C}^*$

Importante (identidad de Euler): si $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Dem: sea $f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \Rightarrow f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$

$$= i\,(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = i f(\theta)$$

Luego f verifica la EDO: $\{f' = if,\ f(0) = 1\} \Rightarrow f(\theta) = e^{i\theta}$ ∎

Def: sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Definimos la exponencial de z mediante:

$$e^z :\overset{\text{dy}}{=} e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Ejercicio útil Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Probar que $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.
2. Probar que $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (de Moivre).
3. Probar que $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

§1. Sucesiones:

Def: Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Diremos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $w \in \mathbb{C}$ si $\lim_{n\to\infty} |z_n - w| = 0$, y escribimos $\lim_{n\to\infty} z_n = w$.

Obs: Dado que $|\cdot|$ proviene de $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2, \text{eucl.}}$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = w \iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(w) \text{ y } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(w).$$

Def: Decimos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si: $\forall \varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq N$.

Hecho (Teorema de Bolzano-Weierstrass): $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\text{eucl}})$ es completo (ie, toda sucesión de Cauchy converge).

Corolario: $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es completo.

§2. Topología de $\mathbb{C}$:

Def: Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^{>0}$. Definimos:

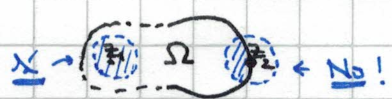
1. $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < r\}$ (disco abierto).
2. $\overline{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| \leq r\}$ (disco cerrado).
3. $\Gamma(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| = r\}$ (círculo).

Notación: $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1\} \stackrel{\text{def}}{=} D(0,1)$ "disco unitario"

Recordemos las nociones principales de topología que necesitaremos:

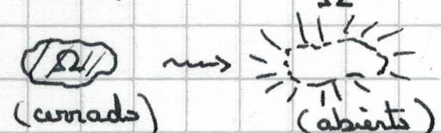
Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ subconjunto, y sea $z \in \mathbb{C}$. Decimos que:

1. z es un punto interior de Ω si $\exists r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq \Omega$



Denotamos $\mathrm{int}(\Omega)$ ó Ω° a $\{z \in \mathbb{C}$ tq z punto interior de $\Omega\} \subseteq \Omega$.

2. Ω es abierto si $\mathrm{int}(\Omega) = \Omega$. (abierto)
3. Ω es cerrado si $\Omega^c \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \Omega$ es abierto.

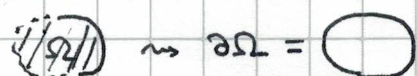


4. z es un punto límite o punto de acumulación de Ω si existe $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ sucesión tq $z_n \neq z$ $\forall n$ y $\lim_{n \to \infty} z_n = z$.

Denotamos $\Omega' := \{z \in \mathbb{C}$ tal que z es punto de acumulación de $\Omega\}$.

Hecho (ó $\boxed{\text{Ejercicio}}^*$): Ω cerrado $\Leftrightarrow$ $\Omega' \subseteq \Omega$

5. La clausura ó adherencia $\overline{\Omega}$ de Ω es $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Omega'$
6. La frontera ó borde $\partial\Omega$ de Ω es $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \mathrm{int}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^c}$



7. Ω es acotado si $\exists M \in \mathbb{R}^{>0}$ tq $\Omega \subseteq D(0, M)$.

En este caso, definimos el diámetro de Ω por
$$\mathrm{diam}(\Omega) := \sup_{z, w \in \Omega} |z - w|$$

8. Ω es compacto si es cerrado y acotado.

Dado que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{eucl})$, tenemos la siguiente caracterización de compacidad en términos de sucesiones:

Hecho: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es compacto $\Leftrightarrow$ Toda sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ posee una subsucesión convergente a un punto en Ω.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Un cubrimiento abierto de Ω es una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos de $\mathbb{C}$ tales que $\Omega \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.

Se tiene la siguiente caracterización topológica de la compacidad:

Hecho: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es compacto $\Leftrightarrow$ Todo cubrimiento abierto de Ω admite un subcubrimiento finito.

El siguiente resultado será de utilidad más adelante:

Prop: Sea $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq \dots$ una sucesión de conjuntos compactos no-vacíos de $\mathbb{C}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$.
$\Rightarrow \exists!\ w \in \mathbb{C}$ tal que $w \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Dem: Elegimos un elemento $z_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
Notamos que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$ implica que $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy.
Como $\mathbb{C}$ es completo, $\exists\, w \in \mathbb{C}$ tq $\lim_{n\to\infty} z_n = w$.
Veamos que dicho w verifica lo deseado:
Dado que K_n es compacto y $\{z_m\}_{m\geq n} \subseteq K_n$ suc. convergente, $w \in K_n\ \forall n$
Finalmente, si elegimos otra sucesión $\{z_n'\}_{n\geq 1}$ con $z_n' \in K_n$ y tal que $\lim_{n\to\infty} z_n' = w' \neq w$, se tendría que $|w - w'| > 0$, lo cual es una contradicción con el hecho que $\operatorname{diam}(K_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. ■

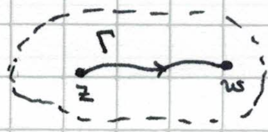
Recordemos la importante propiedad topológica siguiente:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto (resp. cerrado). Decimos que Ω es conexo si NO es posible hallar dos conjuntos abiertos (resp. cerrados) no-vacíos y disjuntos Ω_1 y Ω_2 tales que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ ← unión disjunta

⚠ **Terminología**: Una región es un abierto conexo de $\mathbb{C}$.

Una caracterización importante de los conjuntos conexos del plano complejo es:

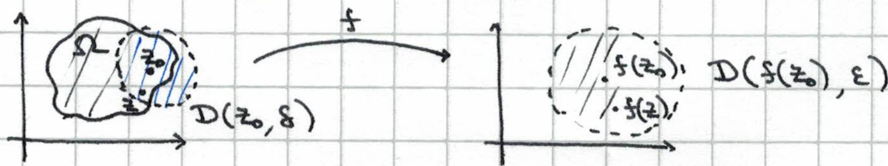
Hecho: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Entonces:
Ω es conexo $\Leftrightarrow$ Todo par de puntos en Ω puede conectarse mediante una curva Γ completamente contenida en Ω.



Obs: Muy pronto definiremos formalmente lo que entendemos por "curvas".

§3. Funciones continuas:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es **continua** en el punto $z_0 \in \Omega$ si:
"$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$"



Esto es equivalente a:
"$\forall \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ sucesión tq $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$, se tiene $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0)$"
Decimos que f es **continua en Ω** si es continua en cada punto $z_0 \in \Omega$.

Ejercicio Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función, y escribamos $z = x + iy$. Si escribimos $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ e identificamos f con la función real $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$. Probar que:
f continua en $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ son continuas en (x_0, y_0).

Prop: Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones continuas en $z_0 \in \Omega$. Entonces:
1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λf es continua en z_0.
2. $f + g$ es continua en z_0.
3. fg es continua en z_0.
4. Si $g(z_0) \neq 0$ entonces f/g es continua en z_0.

En part, $\mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{C}) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ continua}\}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra

ie, $\mathbb{C}$-esp. que además es un anillo conmutativo

Ejercicio Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función continua. Probar que la función
$$|f| : \Omega \to \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad z \mapsto |f(z)|$$
es continua. [Indicación: Usar la desigualdad triangular]

La ventaja de observar $|f|$ en lugar de f, es que $|f|$ toma valores reales y por ende tiene sentido hablar de mínimos y máximos:

Def: Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función. Decimos que f alcanza un:

① **máximo** en $z_0 \in \Omega$ si:
$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

② **mínimo** en $z_0 \in \Omega$ si:
$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Hecho (Teorema de Weierstrass): Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{C}$ una función continua.
$\Rightarrow$ f alcanza un máximo y un mínimo en K.
En particular, $|f|$ es acotada en K.

Luego de estos preámbulos, estamos listos para comenzar MAT235:

§4. Funciones holomorfas:

Def: Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega'$ punto de acumulación de Ω. Diremos que f es **derivable** (en sentido complejo) en $z_0 \in \Omega$ si el límite
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
existe. En tal caso, denotamos su valor por $f'(z_0) \in \mathbb{C}$.

Observaciones importantes:

① Aquí, $h \in \mathbb{C}^* \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $z_0 + h \in \Omega$. Es importante notar que h se acerca a $0 \in \mathbb{C}$ en cualquier dirección!

② Como consecuencia del álgebra de límites, si f y g son derivables en z_0:
(i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λf derivable en z_0 y $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$.
(ii) $f + g$ derivable en z_0 y $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
(iii) fg derivable en z_0 y $(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$ (Leibniz)
(iv) si $g(z_0) \neq 0$, f/g es derivable en z_0 y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0)f'(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

③ Si f derivable en z_0, entonces f es continua en z_0. En efecto:
$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \right] = f'(z_0) \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

④ Si f es derivable en z_0 y si g es derivable en $f(z_0)$ entonces la composición $(g \circ f)$ es derivable en z_0 y además
$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0) \quad \text{(Regla de la cadena)}$$