MAT235 : "Análisis Complejo"

Temario:
1. Funciones holomorfas e Integración.
2. Funciones meromorfas y Residuos
3. Introducción al Análisis de Fourier.

Referencias: "Complex Analysis" Stein & Shakarchi.
"Fourier Analysis: An Introduction" Stein & Shakarchi.

Parte I : "Funciones holomorfas e Integración"

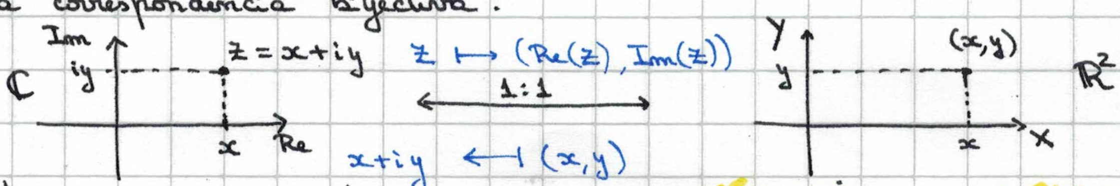
§0. Preliminares:

Sea $\mathbb{C} :\overset{df}{=} \mathbb{R}[X]/\langle X^2+1\rangle \overset{df}{=} \{[a+bX] \text{ con } a,b\in\mathbb{R} \text{ y } [X^2]=[-1]\}$.

$\rightsquigarrow$ **Notación**: $i :\overset{df}{=} [X]$ $\quad (\Rightarrow i^2=-1 \text{ en } \mathbb{C})$.

⚠ En la práctica: $\mathbb{C} = \{z = x+iy \text{ con } x,y\in\mathbb{R} \text{ y con } i^2=-1\}$.

Hay una correspondencia biyectiva:



Aquí, $x :\overset{df}{=} Re(z)$ (resp. $y :\overset{df}{=} Im(z)$) es la parte real (resp. imaginaria) de z.

La estructura de anillo se hereda de $\mathbb{R}[X]$: si $z=x+iy$, $w=s+it$

$$\Rightarrow \quad z+w :\overset{df}{=} (x+s)+i(y+t)$$
$$z\cdot w :\overset{df}{=} (x+iy)(s+it) = xs + ixt + iys + i^2yt$$
$$= (xs-yt)+i(xt+ys).$$

Observaciones:

1. Si $z = x+iy \neq 0$ (ie, $x\neq 0$ ó $y \neq 0$) entonces $z^{-1} :\overset{df}{=} \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ cumple $z\cdot z^{-1} = z^{-1}\cdot z = 1$. Luego, $\mathbb{C}$ es un cuerpo ! (eg. $i^{-1}=-i$).

2. Si definimos $\bar{z} := x-iy$ (conjugado), entonces:
$z\bar{z} = x^2+y^2$; $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$; $Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

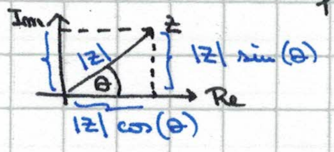
3. $\mathbb{C}$ hereda de $\mathbb{R}^2$ la estructura de espacio vectorial normado:
Definimos $|z| :\overset{df}{=} \|(Re(z), Im(z))\|_{\mathbb{R}^2, \text{eucl}} = \sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$
que llamamos el módulo de z.
En particular, $|z|^2 = x^2+y^2 = z\bar{z}$ y $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ para todo $z\neq 0$.

4. Para todos $z,w\in\mathbb{C}$ tenemos que:
i) $|zw| = |z|\cdot|w|$, $|Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)|\leq |z|$
ii) $|z+w| \leq |z|+|w|$ y $||z|-|w|| \leq |z-w|$ (desigualdad triangular).

Recuerdo (forma polar): Sea $z \in \mathbb{C}^* \overset{\text{df}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Un **argumento** de z, denotado $\arg(z)$, es un real $\theta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\theta) \\ \operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\theta) \end{cases}$$



⚠ $\arg(z)$ está bien definido módulo 2π (ie, $\arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).

$\Rightarrow z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \overset{\text{df}}{=} |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ es la **forma polar** de $z \in \mathbb{C}^*$

Importante (**identidad de Euler**): Si $\theta \in \mathbb{R}$ entonces

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Dem: Sea $f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \Rightarrow f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$

$$= i\,(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = i f(\theta)$$

Luego f verifica la EDO: $\{ f' = if ,\ f(0) = 1 \} \Rightarrow f(\theta) = e^{i\theta}$ ■

Df: Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Definimos la **exponencial** de z mediante:

$$e^z \overset{\text{df}}{:=} e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Ejercicio útil Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Probar que $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.
2. Probar que $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (**de Moivre**).
3. Probar que $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

§1. Sucesiones:

Df: Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Diremos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a $w \in \mathbb{C}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - w| = 0$, y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$.

Obs: Dado que $|\cdot|$ proviene de $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2,\text{eucl.}}$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = w \iff \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(w) \text{ y } \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(w).$$

Df: Decimos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** si: $\forall \varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_m| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq N$.

Hecho (Teorema de Bolzano-Weierstrass): $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\text{eucl}})$ es completo (ie, toda sucesión de Cauchy converge).

Corolario: $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es completo.

§2. Topología de $\mathbb{C}$:

Def: Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^{>0}$. Definimos:

① $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < r\}$ (disco abierto).

② $\overline{D}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| \leq r\}$ (disco cerrado).

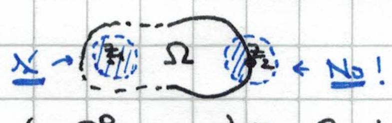
③ $\Gamma(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| = r\}$ (círculo).

⚠ **Notación**: $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1\} \overset{\text{def}}{=} D(0,1)$ "disco unitario"

Recordemos las nociones principales de topología que necesitaremos:

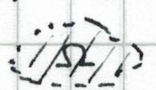
Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ subconjunto, y sea $z \in \mathbb{C}$. Decimos que:

① z es un punto interior de Ω si $\exists r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq \Omega$

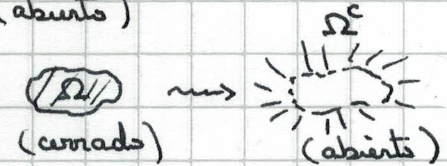


Denotamos $\mathrm{int}(\Omega)$ ó Ω° a $\{z \in \mathbb{C}$ tq z punto interior de $\Omega\} \subseteq \Omega$.

② Ω es abierto si $\mathrm{int}(\Omega) = \Omega$.



③ Ω es cerrado si $\Omega^c \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \Omega$ es abierto.

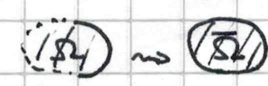


④ z es un punto límite o punto de acumulación de Ω si existe $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ sucesión tq $z_n \neq z$ $\forall n$ y $\lim_{n \to \infty} z_n = z$.

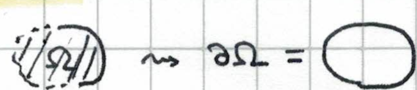
Denotamos $\Omega' := \{z \in \mathbb{C}$ tal que z es punto de acumulación de $\Omega\}$.

Hecho (ó $\boxed{\text{Ejercicio}}$*): Ω cerrado $\Leftrightarrow$ $\Omega' \subseteq \Omega$

⑤ La clausura ó adherencia $\overline{\Omega}$ de Ω es $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Omega'$



⑥ La frontera ó borde $\partial\Omega$ de Ω es $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \mathrm{int}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^c}$



⑦ Ω es acotado si $\exists M \in \mathbb{R}^{>0}$ tq $\Omega \subseteq D(0, M)$.

En este caso, definimos el diámetro de Ω por

$$\mathrm{diam}(\Omega) := \sup_{z, w \in \Omega} |z - w|$$

⑧ Ω es compacto si es cerrado y acotado.

Dado que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es isométrico a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{eucl})$, tenemos la siguiente caracterización de compacidad en términos de sucesiones:

Hecho: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es compacto $\Leftrightarrow$ Toda sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ posee una subsucesión convergente a un punto en Ω.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Un cubrimiento abierto de Ω es una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de abiertos de $\mathbb{C}$ tales que $\Omega \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.

Se tiene la siguiente caracterización topológica de la compacidad:

Hecho: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es compacto $\Leftrightarrow$ Todo cubrimiento abierto de Ω admite un subcubrimiento finito.

El siguiente resultado será de utilidad más adelante:

Prop: Sea $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq \dots$ una sucesión de conjuntos compactos no-vacíos de $\mathbb{C}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(K_n) = 0$.
$\Rightarrow \exists!\, w \in \mathbb{C}$ tal que $w \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Dem: Elegimos un elemento $z_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.
Notamos que $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(K_n) = 0$ implica que $\{z_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy.
Como $\mathbb{C}$ es completo, $\exists\, w \in \mathbb{C}$ tq $\lim_{n\to\infty} z_n = w$.
Veamos que dicho w verifica lo deseado:
Dado que K_n es compacto y $\{z_m\}_{m\geq n} \subseteq K_n$ suc. convergente, $w \in K_n\ \forall n$.
Finalmente, si elegimos otra sucesión $\{z_n'\}_{n\geq 1}$ con $z_n' \in K_n$ y tal que $\lim_{n\to\infty} z_n' = w' \neq w$, se tendría que $|w - w'| > 0$, lo cual es una contradicción con el hecho que $\text{diam}(K_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. ■

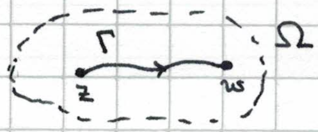
Recordemos la importante propiedad topológica siguiente:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto (resp. cerrado). Decimos que Ω es conexo si NO es posible hallar dos conjuntos abiertos (resp. cerrados) no-vacíos y disjuntos Ω_1 y Ω_2 tales que $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ ← unión disjunta

⚠ **Terminología**: Una región es un abierto conexo de $\mathbb{C}$.

Una caracterización importante de los conjuntos conexos del plano complejo es:

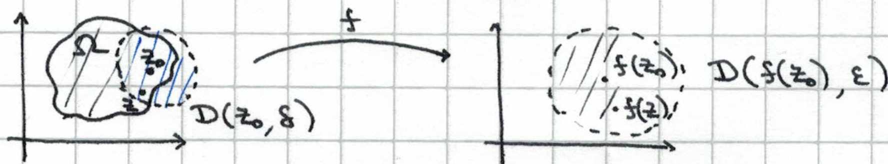
Hecho: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Entonces:
Ω es conexo $\Leftrightarrow$ Todo par de puntos en Ω puede conectarse mediante una curva Γ completamente contenida en Ω.



Obs: Muy pronto definiremos formalmente lo que entendemos por "curvas".

§3. Funciones continuas:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es **continua** en el punto $z_0 \in \Omega$ si:
"$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $z \in \Omega$ y $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$"



Esto es equivalente a:
"$\forall \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ sucesión tq $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, se tiene $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$"
Decimos que f es **continua en Ω** si es continua en cada punto $z_0 \in \Omega$.

Ejercicio Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función, y escribamos $z = x + iy$. Si escribimos $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ e identificamos f con la función real $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$. Probar que:
f continua en $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ son continuas en (x_0, y_0).

Prop: Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones continuas en $z_0 \in \Omega$. Entonces:
1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λf es continua en z_0.
2. $f + g$ es continua en z_0.
3. fg es continua en z_0.
4. Si $g(z_0) \neq 0$ entonces f/g es continua en z_0.

Em part, $\mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{C}) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ continua}\}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra

ie, $\mathbb{C}$-esp. que además es un anillo conmutativo

Ejercicio Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función continua. Probar que la función
$$|f| : \Omega \to \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad z \mapsto |f(z)|$$
es continua. [Indicación: Usar la desigualdad triangular]

La ventaja de observar $|f|$ en lugar de f, es que $|f|$ toma valores reales y por ende tiene sentido hablar de mínimos y máximos:

Def: Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función. Decimos que f alcanza un:

① **máximo** en $z_0 \in \Omega$ si:
$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

② **mínimo** en $z_0 \in \Omega$ si:
$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Hecho (Teorema de Weierstrass): Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto compacto y sea $f : K \to \mathbb{C}$ una función continua.
$\Rightarrow$ f alcanza un máximo y un mínimo en K.
En particular, $|f|$ es acotada en K.

Luego de estos preámbulos, estamos listos para comenzar MAT235:

§4. Funciones holomorfas:

Def: Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega'$ punto de acumulación de Ω. Diremos que f es **derivable** (en sentido complejo) en $z_0 \in \Omega$ si el límite
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
existe. En tal caso, denotamos su valor por $f'(z_0) \in \mathbb{C}$.

Observaciones importantes:

① Aquí, $h \in \mathbb{C}^* \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $z_0 + h \in \Omega$. Es importante notar que h se acerca a $0 \in \mathbb{C}$ en cualquier dirección!

② Como consecuencia del álgebra de límites, si f y g son derivables en z_0:
(i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, λf derivable en z_0 y $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$.
(ii) $f + g$ derivable en z_0 y $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
(iii) fg derivable en z_0 y $(fg)'(z_0) = f(z_0) g'(z_0) + f'(z_0) g(z_0)$ (Leibniz)
(iv) si $g(z_0) \neq 0$, f/g es derivable en z_0 y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{g(z_0) f'(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

③ Si f derivable en z_0, entonces f es continua en z_0. En efecto:
$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \right] = f'(z_0) \cdot 0 = 0 \checkmark$$

④ Si f es derivable en z_0 y si g es derivable en $f(z_0)$ entonces la composición $(g \circ f)$ es derivable en z_0 y además
$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0) \quad \text{(Regla de la cadena)}$$

Ejemplos:

① Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f(z) = \lambda$ (constante). Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\lambda - \lambda}{h} = 0$$

$\Rightarrow f'(z_0) = 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

② Sea $f(z) = z$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{z_0 + h - z_0}{h} = 1$$

$\Rightarrow f'(z_0) = 1 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

③ Ejemplo ② + Obs. ② (iii) $\Rightarrow f(z) = z^n$ derivable $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Más aún, tenemos inductivamente que $f'(z_0) = n z_0^{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $\forall z_0 \in \mathbb{C}$
(Obs: Aquí, definimos $0^0 := 1$ por conveniencia).

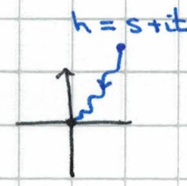
④ Ejemplo ③ + Obs ② (i) & (ii) $\Rightarrow$ Todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^n \in \underbrace{\mathbb{C}[z]}_{\text{anillo de polinomios}}$ es derivable $\forall z_0 \in \mathbb{C}$.

⑤ Sea $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m} \in \overbrace{\mathbb{C}(z)}^{\text{cuerpo de funciones racionales}}$ función racional

y sea $\mathcal{U}_q := \{ z \in \mathbb{C}$ tal que $q(z) \neq 0 \}$ (abierto de $\mathbb{C}$).
Entonces, el Ejemplo ④ + Obs ② (iv) $\Rightarrow f$ es derivable en $\mathcal{U}_q \subseteq \mathbb{C}$.

⑥ Sea $f(z) = \bar{z}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\bar{z}_0 + \bar{h} - \bar{z}_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$



Si $h = s + it \in \mathbb{C}$ verifica

(i) $s = 0$: $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{\overline{it}}{it} = -1$.

(ii) $t = 0$: $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s} = 1$.

$\Rightarrow f(z) = \bar{z}$ no es derivable en ningún punto del plano complejo (a pesar que $F(x,y) = (x,-y)$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$!).

⑦ Sea $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)(\bar{z}_0 + \bar{h}) - z_0\bar{z}_0}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\bar{z}_0 + \bar{h} + z_0 \frac{\bar{h}}{h} \right).$$

Luego, $f'(z_0)$ existe $\Leftrightarrow z_0 = 0$. Más aún, $f'(0) = 0$.

La definición más importante del curso es la siguiente:

Df: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dirá **holomorfa** en el punto $z_0 \in \Omega$ si $\exists\, r > 0$ tq $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ y f es derivable en $D(z_0, r)$. Diremos que f es **holomorfa en Ω** si es holomorfa $\forall z_0 \in \Omega$. Si $A \subseteq \mathbb{C}$ conjunto no necesariamente abierto, entonces decimos que f es holomorfa en A si $\exists\, \Omega$ abierto tq $A \subseteq \Omega \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ y f holomorfa en Ω.

Notación: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Denotamos por

$$\mathcal{O}(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorfa en } \Omega \}$$

al $\mathbb{C}$-álgebra de funciones holomorfas en Ω.

Una función f holomorfa en todo $\mathbb{C}$ (ie, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) es llamada una **función entera**.

Ejemplos:

① La función $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z_0 = 0$, pero NO es holomorfa en $z_0 = 0$.

② Todo polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ es una función entera.

③ La función racional $f(z) = p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z)$ es holomorfa en el abierto $\Omega := U_q \overset{\text{df}}{=} \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } q(z) \neq 0 \}$.

§5. Series de potencias:

En esta sección discutiremos sobre una clase importante de funciones holomorfas. Comenzamos por recordar un poco de notación y terminología.

Si $\{u_n\}_{n \geq n_0}$ es una sucesión en $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, de término general u_n, denotamos por $\sum_{n \geq n_0} u_n$ (o por $\sum u_n$) a la sucesión $\{S_n\}_{n \geq n_0}$ de sumas parciales

$$S_n := u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_n \qquad (n \geq n_0).$$

Decimos que la **serie $\sum_{n \geq n_0} u_n$ es convergente** si $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ existe.

"la suma de la serie $\sum_{n \geq n_0} u_n$"

En tal caso, escribimos

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n .$$

El **resto de orden n** de una serie convergente $\sum u_n$ de suma S es

$$\rho_n := S - S_n \overset{\text{df}}{=} \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$$

Def: Sea $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\Omega \subseteq k$ no-vacío. Consideremos una sucesión $\{f_n : \Omega \to k,\ x \mapsto f_n(x)\}_{n \geq n_0}$ de funciones a valores en k y definamos para $f : \Omega \to k$ la norma del supremo

$$\|f\|_\Omega := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Entonces, decimos que la serie de funciones $\sum f_n$:

① Converge uniformemente en Ω si la serie $\sum f_n(x)$ converge $\forall x \in \Omega$ (ie, converge puntualmente en Ω) y los restos verifican $\|\rho_n\|_\Omega \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

② Converge normalmente en Ω si la serie real $\sum \|f_n\|_\Omega$ converge.

Obs: ① Convergencia normal $\Rightarrow$ Convergencia uniforme.

② Convergencia normal $\Rightarrow$ Convergencia absoluta uniforme (ie, $\sum |f_n|$ converge uniformemente), pero no coinciden:

Ejercicio Analizar la convergencia normal y (absoluta) uniforme de $\sum f_n$ donde $f_n(x) = 0$ si $x \neq n$ y $f_n(n) = 1/n$.

③ M-test de Weierstrass:

Si $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in \Omega$ y $\sum M_n$ converge en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Convergencia absoluta uniforme de $\sum f_n$ en Ω.

Def: Una serie de potencias compleja es una serie de funciones de la forma

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$ es una variable compleja. El dominio de convergencia de la serie de potencias está dado por

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \sum a_n z^n \text{ converge}\}.$$

Si $z \in \mathcal{D}$, escribimos $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ el valor de la suma en z.

Teorema: Sea $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ serie de potencias compleja y sea $R \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ dado por:

$$R := \sup \{r \geq 0 \text{ tq la sucesión } \{|a_n| r^n\}_{n \geq 0} \text{ es acotada}\}.$$

Entonces, el dominio de convergencia $\mathcal{D}$ verifica $D(0,R) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \overline{D}(0,R)$.

Más aún, $\sum a_n z^n$ converge normalmente en todo disco cerrado $\overline{D}(0,r) \subseteq D(0,R)$.

Además, el radio de convergencia R está dado por

$$R = \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \in \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\} \quad \text{(fórmula de Hadamard)}$$

Aquí: $1/0 := +\infty$.

Finalmente, si $a_n \neq 0$ $\forall n$ y $l := \lim_{n \to +\infty} |a_{n+1}| / |a_n|$ existe en $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ entonces $R = 1/l$ (criterio de d'Alembert).

Dem: Sea $A := \{r \geq 0 \text{ tq } \{|a_n| r^n\}_{n\geq 0} \text{ es acotada}\} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ y $R := \sup A$.

$\Rightarrow$ si $|z| > R$, $|z| \notin A$ y luego $\{|a_n||z|^n\}$ no-acotada $\Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge.

Así, $\mathcal{D} \subseteq \overline{D}(0,R)$ ✓

Sea $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tq $r < R = \sup A \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \exists\, \rho \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tq $\rho \in A$ y $r < \rho < R$.

$\Rightarrow \exists\, C \geq 0$ tq $|a_n| \rho^n \leq C \ \forall n \in \mathbb{N}$, y luego para $z \in \overline{D}(0,r)$ tenemos

$$|a_n z^n| \leq |a_n| \rho^n \cdot \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq C \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \quad \text{con } r/\rho < 1.$$

$$\Rightarrow \left|\sum a_n z^n\right| \underset{\text{desig. triangular}}{\leq} \sum |a_n z^n| \leq \sum \|a_n z^n\|_{\overline{D}(0,r)} \leq C \sum \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leftarrow \text{convergente!}$$

Así, $\sum a_n z^n$ converge normalmente en $\overline{D}(0,r)\ \forall r < R$ y así $D(0,R) \subseteq \mathcal{D}$ ✓

Veamos la fórmula de Hadamard:

Si $r > \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$, hay infinitos índices n tales que $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \leq r'$ para cierto r' con $0 < r' < r$.

$\Rightarrow |a_n| r'^n \geq 1$ y luego la subsucesión $|a_n| r^n \geq \left(\frac{r}{r'}\right)^n \longrightarrow +\infty$ no es acotada y luego (por definición) $R \leq r$.

Recíprocamente, si $r < \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$ entonces $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \geq r$ para $n \geq n_0$ suficientemente grande $\Rightarrow |a_n| r^n \leq 1 \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| r^n$ acotada.

Luego, por definición tenemos $R \geq r$ y así $R = \liminf 1/\sqrt[n]{|a_n|}$ ✓

Finalmente, el criterio de d'Alembert se deduce a partir del hecho

$$\text{"} \lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \text{"}$$

que se deja como $\boxed{\text{Ejercicio}}$. ■

Ejemplos:

1. La serie geométrica $\sum_{n\geq 0} z^n$ tiene radio de conv. $R = 1$ y $\mathcal{D} = D(0,1)$.
2. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^n}$ tiene radio de convergencia $R = +\infty$ y $\mathcal{D} = \mathbb{C}$.
3. La serie $\sum_{n\geq 1} n^n z^n$ tiene radio de conv. $R = 0$ y $\mathcal{D} = \{0\}$.
4. Dado que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$
Las series $\sum a_n z^n$ y $\sum n^\alpha a_n z^n$ tienen el mismo radio de convergencia.

Sin embargo, reemplazar a_n por $n^\alpha a_n$ puede afectar la convergencia en el borde $\partial D(0,R)$. Por ejemplo, para $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ se tiene $\mathcal{D} = \overline{D}(0,1)$ mientras que $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ diverge en $z = 1 \in \partial D(0,1)$.

Más precisamente, el siguiente resultado de Abel permitirá probar que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge en $\mathcal{D} = \overline{D}(0,1) \setminus \{1\}$.

Lema de Abel: Sea $\sum_{n\geq n_0} u_n v_n$ una serie compleja. Supongamos que $u_n \in \mathbb{R}$ y $u_n \geq 0$ $\forall n \geq n_0$, y que $\{u_n\}$ es una sucesión <u>decreciente</u> que converge a 0. Supongamos además que las sumas parciales

$$S_n = v_{n_0} + v_{n_0+1} + \ldots + v_n$$

cumplen $|S_n| \leq M$ $\forall n \geq n_0$ para cierta constante $M \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

$\Rightarrow$ La serie $\sum u_n v_n$ es convergente.

Dem: Veamos que $\left\{\sum_{n\geq n_0}^{p} u_n v_n\right\}_{p\geq n_0}$ es una sucesión de Cauchy ($\Rightarrow$ converge ✓):

Para todos $q > p > n_0$ escribimos

$$\begin{aligned} u_p v_p + \ldots + u_q v_q &= u_p(S_p - S_{p-1}) + u_{p+1}(S_{p+1} - S_p) + \ldots + u_q(S_q - S_{q-1}) \\ &= -u_p S_{p-1} + S_p\underbrace{(u_p - u_{p+1})}_{\geq 0} + \ldots + S_{q-1}\underbrace{(u_{q-1} - u_q)}_{\geq 0} + u_q S_q \end{aligned}$$

$\geq 0 \leftarrow$ decreciente $\longrightarrow \geq 0$

$$|S_n| \leq M \Rightarrow \quad |u_p v_p + \ldots + u_q v_q| = M u_p + M(u_p - u_{p+1}) + \ldots + M(u_{q-1} - u_q) + M u_q$$

$$= 2M u_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0. \quad \blacksquare$$

<u>Ejemplo</u>: Sea $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ y tq $z \neq 1$. Consideremos la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ donde $u_n := 1/n \searrow_{n\to\infty} 0$ y $v_n := z^n = e^{ni\theta}$. Dado que:

$$v_1 + \ldots + v_n = e^{i\theta}\left(\frac{e^{ni\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right)$$

$\Rightarrow |v_1 + \ldots + v_n| \leq M := 2/|e^{i\theta} - 1|$ para $e^{i\theta} \neq 1$.

Así, el Lema de Abel implica la convergencia de $\sum z^n/n$ si $|z| = 1$ y $z \neq 1$.

Recordemos que podemos <u>sumar</u> y <u>multiplicar</u> series:

Sean $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ series de potencias con radios de convergencia R' y R'' respectivamente. Entonces, podemos considerar:

① **La suma** $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n := \sum (a_n + b_n) z^n$, que ciertamente converge en $D(0,R') \cap D(0,R'')$ y luego, su radio de conv. R^+ verifica

$$R^+ \geq \min(R', R'')$$

Más aún, $R^+ = \min(R', R'')$ si $R' \neq R''$ pues la serie diverge para $R' < |z| < R''$.

Ejercicio Dar un ejemplo donde $R^+ > \min(R', R'')$.

② **El producto** $\left(\sum a_n z^n\right) \cdot \left(\sum b_n z^n\right)$: Recordemos que si $\sum_{p\geq 0} u_p$ y $\sum_{q\geq 0} v_q$ son series absolutamente convergentes, entonces

$$\left(\sum u_p\right) \cdot \left(\sum v_q\right) = \sum_{n\geq 0} w_n$$

donde $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0$. $(\star)$ (12)

En el caso particular de series de potencias, considerando $u_n := a_n z^n$ y $v_n = b_n z^n$, la fórmula $(\star)$ nos da:

$$\left(\sum a_n z^n\right) \cdot \left(\sum b_n z^n\right) = \sum c_n z^n$$

$$\text{donde } c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} \quad \forall n \geq 0$$

"Producto de Cauchy"

La serie producto converge en $D(0,R') \cap D(0,R'')$ pues cada factor converge absolutamente en dicho conjunto. Así, su radio de convergencia $R^\times$ verifica

$$R^\times \geq \min(R', R'')$$

Ejercicio Considere las series $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^{n-1} z^n$ y $\sum_{n\geq 0} b_n z^n = 1 - \sum_{n\geq 1} z^n$ y pruebe que es posible que $R^\times > \min(R', R'')$ incluso cuando $R' \neq R''$.

El siguiente importante resultado nos dará muchos ejemplos de funciones holomorfas.

Teorema: Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces, $f'(z)$ existe para todo $z \in D(0,R)$ (i.e., $f \in \mathcal{O}(D(0,R))$!) Más aún,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

y en particular $f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n z^{n-p} \quad \forall p \geq 1$. Además, dichas series de potencias tienen radio de convergencia $R > 0$ también.

Dem: El hecho que las series derivadas tengan el mismo radio de convergencia viene del hecho que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n(n-1)\cdots(n-p+1)} = 1$ para todo $p \in \mathbb{N}$ ✓

Luego, la fórmula del binomio de Newton nos da:

$$(z+h)^n = z^n + nhz^{n-1} + \sum_{p=2}^{n} \binom{n}{p} h^p z^{n-p}$$

con $\binom{n}{p} \overset{\text{def}}{=} \frac{n(n-1)}{p(p-1)} \binom{n-2}{p-2} \leq n(n-1)\binom{n-2}{p-2}$ y así:

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right| \leq n(n-1)|h| \sum_{p=2}^{n} \binom{n-2}{p-2} |h|^{p-2} |z|^{n-p} \overset{\text{Newton}}{=} n(n-1)|h| \left(|z|+|h|\right)^{n-2}$$

Sea $z \in D(0,R)$ y $h \in \mathbb{C}^*$ tal que $z+h \in D(0,R)$. El cálculo anterior nos da:

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n| \left(|z|+|h|\right)^{n-2}$$

Si consideramos $\delta > 0$ tq $|h| \leq \delta < R - |z|$ entonces $|z|+|h| \leq r := |z| + \delta < R$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 2} n(n-1)|a_n|\left(|z|+|h|\right)^{n-2} \leq M := \sum_{n\geq 2} n(n-1)|a_n| r^{n-2} < +\infty \quad (\text{pues } r < R)$$

Luego, concluimos al considerar $h \to 0$ que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} \quad \text{para todo } z \in D(0,R) \quad \blacksquare$$

Obs: Recíprocamente, dada una serie de potencias $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ con radio de convergencia $R>0$ entonces f posee una "primitiva compleja" en el disco abierto $D(0,R)$ dada por

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$$

y tal que $F'(z) = f(z)$. Más aún

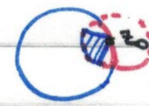
i) El radio de convergencia de F es $R>0$ también.

ii) Cualquier otra primitiva es de la forma $F+C$ para cierta $C \in \mathbb{C}$ constante.

{Cultura general} En general, no es fácil determinar el comportamiento de una serie de potencias en $z_0 \in \partial D(0,R) = \Gamma(0,R)$: la serie puede no ser continua en z_0 o incluso no ser acotada.

Sin embargo, se tiene el siguiente resultado parcial:

Teorema (Abel): Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ serie de potencias con radio de convergencia $R>0$ finito, y sea $z_0 \in \Gamma(0,R)$ tal que $f(z_0)$ converge. Entonces, si $S = S_{z_0,\delta,\eta} \subseteq D(0,R) \cup \{z_0\}$ es un sector circular cerrado de la forma



$$S_{z_0,\delta,\eta} := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z-z_0| \leq \delta \text{ y } |\text{ángulo}(z-z_0, z_0)| \leq \pi/2 - \eta \}$$

entonces $\lim_{z\to z_0,\, z\in S} f(z) = f(z_0)$.

En otras palabras, hay continuidad en $z_0 \in \Gamma(0,R) \cap \mathcal{D}$ si no nos acercamos "tangencialmente" a z_0.

§6. Funciones complejas elementales:

Recordemos algunas funciones "notables" que pueden definirse mediante series de potencias.

Comenzamos por la función exponencial compleja, que puede definirse a partir de la exponencial real y las funciones trigonométricas reales (suponiendo que hayan sido definidas rigurosamente anteriormente, cf. §0, pág 2).

También es posible (y conveniente) hacerlo al revés:

Def: Para todo $z \in \mathbb{C}$ definimos la función exponencial mediante la serie

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

cuyo radio de convergencia es $+\infty$. En part, $e^z \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es entera.

La propiedad más importante de e^z es la siguiente.

Prop (Propiedad fundamental): La función exponencial exp define un morfismo entre el grupo aditivo $(\mathbb{C},+)$ y el grupo multiplicativo $(\mathbb{C}^*,\times)$. En otras palabras, para todos $z,w\in\mathbb{C}$ se tiene que

$$e^{z+w} = e^z\cdot e^w$$

Dem: Tenemos que $e^z\cdot e^w = \left(\sum u_p\right)\cdot\left(\sum v_q\right)$ con $u_p := \frac{z^p}{p!}$ y $v_q = \frac{w^q}{q!}$.
Así, la serie producto está dada por el producto de Cauchy $\sum w_n$ con:

$$w_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{z^p}{p!}\cdot\frac{w^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} z^p w^{n-p} = \frac{(z+w)^n}{n!}$$

y luego $e^z\cdot e^w = e^{z+w}$. En part, $e^z\cdot e^{-z} = e^0 \overset{\text{def}}{=} 1$ y así $e^z\in\mathbb{C}^*$.
(Más adelante veremos que exp es sobreyectiva!). ■

A partir de exp podemos definir las siguientes funciones clásicas:

① Coseno hiperbólico:

$$\cosh(z) := \frac{e^z+e^{-z}}{2} \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

② Seno hiperbólico:

$$\sinh(z) := \frac{e^z-e^{-z}}{2} \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

③ Coseno:

$$\cos(z) := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cosh(iz) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

④ Seno:

$$\sin(z) := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{\sinh(iz)}{i} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

⚠ Observaciones importantes

(i) Todas estas series tienen radio de conv. $R=+\infty$, y luego son funciones enteras.

(ii) Dado que todas las series están definidas mediante coeficientes $a_n\in\mathbb{R}$, ellas toman valores reales al restringirnos al eje real de $\mathbb{C}$.
Más aún, ellas cumplen $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

(iii) La Propiedad fundamental de exp implica todas las identidades trigonométricas usuales (!). Por ejemplo,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{para todos } a,b\in\mathbb{C}.$$

(iv) **Ejercicio** Utilizando las definiciones anteriores, se prueba la identidad de Euler
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{C}$$

(v) En part, si $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tenemos que
$$e^{z} = e^{x} e^{iy} = e^{x}(\cos(y) + i\sin(y))$$

$\Rightarrow 1 = e^{iy} e^{-iy} = (\cos(y)+i\sin(y))\cdot(\cos(y)-i\sin(y))$ y por ende $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio Probar que $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Teorema:

① La función exponencial real induce un isomorfismo de grupos
$$(\mathbb{R},+) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{>0}, \times), \quad x \mapsto e^{x}$$

② La función $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se anula en un real positivo minimal que denotaremos por $\pi/2$ (esta es la definición "oficial" de π).

③ La función exponencial compleja es periódica de período $2\pi i$ e induce morfismos de grupos sobreyectivos
$$(\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \times), \quad y \mapsto e^{iy}$$
$$(\mathbb{C},+) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times), \quad z \mapsto e^{z}$$
donde $e^{iy} = 1$ (resp. $e^{z} = 1$) si y sólo si $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ (resp. $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$).
Aquí, $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\} = \partial\mathbb{D}$ es el círculo unitario en $\mathbb{C}$.

Dem:

· Para ① basta probar que exp es una biyección continua y creciente entre $\mathbb{R}$ y $]0,+\infty[$. Notar que $e^{x} = 1 + x + \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n!} \geq 1+x > 0$ para $x \geq 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$. Por otro lado, $e^{x} = 1/e^{-x}$ implica que $e^{x} > 0$ para $x \leq 0$ y que $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$. Finalmente, el hecho que $(e^{x})' \overset{\text{dy}}{=} e^{x} > 0$ implica que e^{x} es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ ✓

· Para ②, supongamos por contradicción que cos <u>no</u> se anula en $[0,+\infty[$. Como $\cos(0) \overset{\text{dy}}{=} 1$, el Teorema del valor Intermedio implica que $\cos(x) > 0$ en $[0,+\infty[$. Dado que $(\sin(x))' \overset{\text{dy}}{=} \cos(x)$, tendríamos que $\sin(x)$ sería estrictamente creciente y positiva en $]0,+\infty[$.
Por otro lado, dado que $(\cos(x))' \overset{\text{dy}}{=} -\sin(x)$, el Teorema del valor Medio nos daría que $\forall x > 1$, $\exists\, c \in [1,x]$ tal que
$$\frac{\cos(x) - \cos(1)}{x-1} = -\sin(c) \leq -\sin(1)$$

i.e., $\cos(x) \leq \cos(1) - (x-1)\sin(1)$ $\forall x \geq 1$ $\Rightarrow \cos(x) < 0$ si $x \gg 0$ ↯

Así, $\exists!\, x_0 := \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}^{>0}$ minimal tal que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ✓

$[0,+\infty[\,\cap \cos^{-1}(\{0\})$ cerrado $\neq \emptyset$

Para probar ③, notamos que $\cos(x) > 0$ para $x \in [0, \pi/2[$. Además, la relación $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ implica $\sin(\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. Dado que $\cos(x) = (\sin(x))'$, tenemos que $y \mapsto \sin(y)$ es una biyección creciente entre el intervalo $[0, \pi/2]$ y $[0,1]$ (pues $\sin(0) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}) = +1$).

$\Rightarrow$ La función $[0,\pi/2] \ni y \mapsto e^{iy}$ parametriza biyectivamente el cuarto de círculo $\sqrt{\cos^2(y) + \sin^2(y)} = |z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ ✓

La identidad de Euler y la Prop. fundamental de exp implican que

$$e^{i\pi/2} = i \;, \quad e^{i(y+\pi/2)} = i e^{iy} \;, \quad e^{2\pi i} = 1$$

$\Rightarrow \mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$, $y \mapsto e^{iy}$ sobreyectiva y $e^{iy} = 1 \Leftrightarrow y \in 2\pi\mathbb{Z}$ ✓

Finalmente, el último resultado sobre $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ se deduce del hecho que todo complejo $z \neq 0$ admite una forma polar $z = \rho u$, donde $\rho = |z| \in \mathbb{R}^{>0}$ y $u = z/|z| \in S^1$ ✓ ■

Ejercicio importante Probar que la función

(i) Tangente $\tan(z) := \sin(z)/\cos(z)$ y Secante $\sec(z) := 1/\cos(z)$ son holomorfas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\pi/2 + \pi\mathbb{Z})$.

(ii) Cotangente $\cot(z) := \cos(z)/\sin(z)$ y Cosecante $\csc(z) := 1/\sin(z)$ son holomorfas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$

(iii) Tangente hiperbólica $\tanh(z) := \sinh(z)/\cosh(z)$ es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus (i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z})$.

(iv) Cotangente hiperbólica $\coth(z) := \cosh(z)/\sinh(z)$ es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus i\pi\mathbb{Z}$

(v) Probar que las funciones $\cos(z)$ y $\sin(z)$ no son acotadas en $\mathbb{C}$.

Obs: Terminemos esta sección recordando que:

① La función logaritmo natural (real) es por definición el isomorfismo de grupos $\ln : (\mathbb{R}^{>0}, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ dado por la inversa de exp.

En particular, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$.

② Si $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, con $\rho = |z| > 0$, entonces $\theta = \arg(z) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Así, para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ la relación $e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ implica que:

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad \text{y} \quad \arg(e^z) = y = \operatorname{Im}(z) \mod 2\pi\mathbb{Z}$$

Ejercicio (muy) útil Probar que $|e^z| \leq e^{|z|}$ y que $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im}(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

§7. Logaritmo complejo:

Notemos que si $w \in \mathbb{C}^* \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C}\setminus\{0\}$, la ecuación $e^z = w$ implica:

$$|w| = |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \text{y} \quad \arg(w) = \arg(e^z) = \mathrm{Im}(z) \mod 2\pi\mathbb{Z}$$

Así, podemos resolver $e^z = w$ al considerar:

$$\mathrm{Re}(z) = \ln|w| \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = \arg(w) \mod 2\pi\mathbb{Z}$$

ie, $z = \ln|w| + i\arg(w) \mod 2\pi i\mathbb{Z}$!

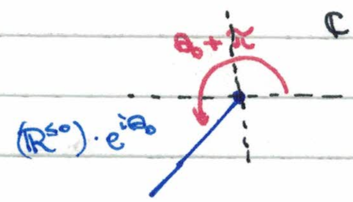
Para evitar la ambigüedad de elegir un argumento $\arg(w)$ procedemos de la manera siguiente:

Sea $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fijo y consideramos el abierto

$$\Omega_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C}^* \text{ tq } \arg(z) \neq \theta_0 + \pi \mod 2\pi\mathbb{Z}\}$$

$e^{i\pi} = -1$

ie, $\Omega_{\theta_0} = \mathbb{C}^* \setminus (\mathbb{R}^{\leq 0} \cdot e^{i\theta_0})$



Para $z \in \Omega_{\theta_0}$ definimos:

$$\arg_{\theta_0}(z) := \text{único } \theta \in]\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[\text{ tq } \arg(z) = \theta \mod 2\pi\mathbb{Z}$$

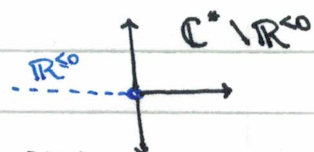
Definimos la rama $\log_{\theta_0}$ o $\ln_{\theta_0}$ del logaritmo complejo mediante

$$\log_{\theta_0}(z) := \ln|z| + i\arg_{\theta_0}(z) \quad \forall z \in \Omega_{\theta_0}$$

⚠ Las funciones $\arg_{\theta_0}$ y $\log_{\theta_0}$ no se pueden extender continuamente a $\mathbb{C}^*$. En efecto, en un punto de $\mathbb{R}^{<0} e^{i\theta_0}$ los límites de $\arg_{\theta_0}$ y $\log_{\theta_0}$ en cada lado de la semi-recta difieren en 2π (resp. $2\pi i$).

Def: La rama principal del argumento está dada por:

$$\mathrm{Arg}(z) := \arg_0(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^{<0}$$



Del mismo modo, la rama principal del logaritmo está dada por:

$$\mathrm{Ln}(z) := \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^{<0}$$

Aquí, $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi, \pi[$.

Veamos que todas las ramas del logaritmo complejo son holomorfas:

Prop: Para todo $\theta_0 \in \mathbb{R}$, la función $\log_{\theta_0}$ verifica $\exp \circ \log_{\theta_0} = Id$ en Ω_{θ_0}. Más aún, para todo $z \in \Omega_{z_0}$ se tiene que:

$$(\log_{\theta_0})'(z) = \lim_{\substack{\xi \to z \\ \xi \in \Omega_{z_0}}} \frac{\log_{\theta_0}(\xi) - \log_{\theta_0}(z)}{\xi - z} = \frac{1}{z}.$$

Dem: La identidad $\exp \circ \log_{\theta_0} = Id$ se obtiene por construcción de $\log_{\theta_0}$. Para calcular su derivada, definimos $w := \log_{\theta_0} z$ y $\eta := \log_{\theta_0} \xi$.

Si $\xi \to z$, entonces $\eta \to w$ por continuidad de $\log_{\theta_0}$ (!)

$$\Rightarrow \frac{\log_{\theta_0}\xi - \log_{\theta_0} z}{\xi - z} \overset{\text{def}}{=} \frac{\eta - w}{e^\eta - e^w} = \left(\frac{e^\eta - e^w}{\eta - w}\right)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{(\exp)'(w)} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z} \checkmark \quad \blacksquare$$

Ejemplo importante: Sea $f(z) := \mathrm{Ln}(1+z)$, definida en $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$

$\Rightarrow f'(z) = 1/(1+z) \quad \forall z \in \Omega$. En particular,

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots$$

en $D(0,1)$. Como $\mathrm{Ln}(1) \overset{\text{def}}{=} 0$, tenemos que

$$f(z) = \mathrm{Ln}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots$$

en $D(0,1)$. Por otro lado, sabemos que $\sum \frac{z^n}{n}$ converge en $\overline{D}(0,1) \setminus \{1\}$ y luego $f(z) = \left(\sum \frac{(-z)^n}{n}\right) - 1$ converge en $\overline{D}(0,1) \setminus \{-1\}$. Por ejemplo,

$$\mathrm{Ln}(2) = \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Consecuencia: El logaritmo complejo nos permite definir la función z^α para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$, teniendo en cuenta que se debe **elegir** una rama:

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log_{\theta_0}(z)) \quad \text{para todo } z \in \Omega_{\theta_0}$$

En particular, calculamos

$$\frac{d}{dz}(z^\alpha) \overset{\text{def}}{=} (\exp)'(\alpha \log_{\theta_0}(z)) \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha z^{\alpha - 1} \quad \forall z \in \Omega_{\theta_0}$$

Es importante destacar que el valor de z^α **depende** de la rama escogida!

Ejercicio Probar que:

(i) $i^i = e^{-\pi/2}$ si escogemos la rama principal Ln del logaritmo.

(ii) $i^i = e^{-5\pi/2}$ si escogemos la rama $\log_{2\pi}$.

Lema (fórmula de Newton): La rama principal $(1+z)^\alpha := \exp(\alpha \,\mathrm{Ln}(1+z))$, definida en $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$ verifica en $D(0,1)$:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots$$

Dem: Sea $f(z) = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots$

$\Rightarrow a_{n+1}/a_n = \frac{\alpha - n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ y luego $R = 1$.

Por otro lado $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ con.

$$n a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}(\alpha-n+1) \overset{\text{def}}{=} \alpha a_{n-1} - (n-1) a_{n-1}$$

$\Rightarrow f'(z) = \alpha f(z) - z f'(z)$, ie, $(1+z) f'(z) = \alpha f(z)$

Luego, la función $g(z) := f(z)/(1+z)^\alpha$ verifica

$$g'(z) = \frac{f'(z)\cdot(1+z)^\alpha - f(z)\alpha(1+z)^{\alpha-1}}{(1+z)^{2\alpha}} = 0 \quad \forall z \in D(0,1).$$

Así, $g(z) = g(0) \overset{\text{def}}{=} 1 \quad \forall z \in D(0,1)$, ie, $f(z) = (1+z)^\alpha \quad \forall z \in D(0,1)$ ✓ ∎

Aplicación: Las series de potencias de $(1+z^2)^{-1}$ y $(1-z^2)^{-1/2}$ nos dan, al integrar, las series de potencias:

① $\operatorname{Arctan}(z) := z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad \forall z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{\pm i\}$

② $\operatorname{Arcsin}(z) := z + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall z \in \overline{D}(0,1).$

Ejercicio Probar que $\operatorname{Arctan}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \quad \forall z \in \overline{D}(0,1) \setminus \{\pm i\}$.

§8. Diferenciabilidad y Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Def: Sea $\Omega \subseteq V$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to W$ una función. Decimos que f es k-diferenciable en $x \in \Omega$ si $\exists\, l \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$ aplicación k-lineal y $\exists\, \varepsilon : \mathcal{U} \to W$ función definida en $\mathcal{U} \subseteq V$ vecindad de $0 \in V$ tales que

$$f(x+h) = f(x) + l(h) + \|h\|\,\varepsilon(h) \quad \forall h \in \mathcal{U}$$

con $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ en W.

La aplicación lineal l es la diferencial de f en x, denotada $l := df_x$.

Por convención, una función $\mathbb{R}$-diferenciable se dirá "diferenciable" simplemente.

Notación de Landau: Sea $h \mapsto \eta(h)$ una función arbitraria, entonces:

① $\eta(h) = O(\|h\|^m) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, C > 0$ tq $\|\eta(h)\| \leq C \|h\|^m$.

② $\eta(h) = o(\|h\|^m) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, \varepsilon$ tq $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ y $\|\eta(h)\| \leq \varepsilon(h) \|h\|^m$.

Así, si $f : \Omega \to W$ es k-diferenciable en $x \in \Omega$ entonces:

$$f(x+h) = f(x) + df_x(h) + o(\|h\|).$$

Notación: Si $f : \Omega \to W$ es k-diferenciable $\forall x \in \Omega$, escribimos

$$df : \Omega \to \mathrm{Hom}_k(V,W), \; x \mapsto df_x \quad \text{"la diferencial de } f\text{"}$$

Obs importante: Si $V \cong k^n$ y $(e_1, \dots, e_n)$ es una base de V, entonces podemos escribir $h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j \in V$ y luego $l \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$ verifica $l(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j v_j$ con $v_j := l(e_j) \in W$. En particular:

$$df_x(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \quad , \; \forall h = \sum_{j=1}^{n} h_j e_j$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \overset{\text{def}}{=} df_x(e_j) \in W$ es la derivada parcial de f en la dirección e_j.

Caso particular importante: Si $f : V \to W$ es una aplicación lineal $\Rightarrow df_x = f$ para todo $x \in V$, i.e., $df = f$ (función constante!)

En part, las funciones coordenadas (resp. a la base $(e_1, \dots, e_n)$)

$$x_j : V \to k, \; \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mapsto a_j$$

verifican $dx_j = x_j$ y luego $dx_j(h) = h_j$

Así, para toda $l \in \mathrm{Hom}_k(V,W)$, la identidad $l(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j\, l(e_j)$ equivale a $l = \sum_{j=1}^{n} dx_j \cdot l(e_j)$ y luego $(dx_1, \dots, dx_n)$ es una base de $\mathrm{Hom}_k(V,W)$.

Luego:

$$\boxed{df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j}$$

Volvamos al caso de funciones de variable compleja:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$. Si consideramos la identificación $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $z = x+iy \mapsto (x,y)$ y si f es $\mathbb{R}$-diferenciable, entonces:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

⚠ En $\mathbb{C}$, es más natural considerar $z = x+iy$ & $\bar{z} = x - iy$, en lugar de las variables reales x e y. En particular,

$$\begin{cases} dz = dx + i\,dy \\ d\bar{z} = dx - i\,dy \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \\ dy = -\frac{i}{2}(dz - d\bar{z}) \end{cases}$$

Así, (dx, dy) y $(dz, d\bar{z})$ son dos bases de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ y luego $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ se reescribe como:

$$\boxed{df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\bar{z}}$$

Def: Escribamos $z = x+iy \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, y sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función $\mathbb{R}$-diferenciable en Ω. Definimos:

$$\left.\boxed{\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \quad y \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)}\right\} \text{"derivadas de Wirtinger"}$$

Así, $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$. Además, $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ son $\mathbb{C}$-lineales.

Ejercicio útil Probar que los operadores $\partial/\partial z$ y $\partial/\partial \bar{z}$ son conjugados, ie,

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \quad y \quad \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}.$$

Ahora podemos enunciar el resultado principal de esta sección:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Entonces, son equivalentes:

1. f es holomorfa en Ω (ie, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$).
2. f es $\mathbb{R}$-diferenciable en Ω y $df_z: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal $\forall z \in \Omega$.
3. f es $\mathbb{R}$-diferenciable en Ω y se verifica la Ecuación de Cauchy-Riemann

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{en } \Omega}$$

Más aún, si cualquiera de estas condiciones se cumple, entonces $\frac{\partial f}{\partial z} = f'$.

Dem: ① ⇒ ② pues si $f'(z)$ existe en todo $z \in \Omega$, entonces existe una función $\varepsilon: \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ definida en una vecindad abierta $\mathcal{U}$ de $0 \in \mathbb{C}$ tq $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ y $\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) + \varepsilon(h)$ $\forall h \in \mathcal{U}$

ie, $f(z+h) = f(z) + f'(z)h + h\varepsilon(h)$

$\Rightarrow df_z(h) = f'(z)h$ y luego observamos que df_z es $\mathbb{C}$-lineal ✓

Para ver que ② ⇒ ③ notamos que $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ implica que $df_z(h) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial z} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}$ y luego $df_z(ih) = i\frac{\partial f}{\partial z} \cdot h - i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}$.

Así, df_z es $\mathbb{C}$-lineal $\iff df_z(ih) = i\, df_z(h)\ \forall h \iff \frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ ✓

Finalmente, para probar que ③ $\Rightarrow$ ① notamos que en este caso $df_z(h) = \frac{\partial f}{\partial z}\cdot h$ y luego (por definición!) tenemos que

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z}(z)\cdot h + o(h)$$

$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$ existe para todo $z \in \Omega$ ■

⚠ **Observación importante**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función $\mathbb{R}$-diferenciable en Ω. Si escribimos $z = x+iy$, y escribimos

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y) \quad \text{con } u,v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} \overset{\text{dy}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right).$$

Así, la ecuación de Cauchy-Riemann (compleja) $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ se traduce en las Ecuaciones de Cauchy-Riemann (reales):

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Ejemplos:

① Si $f(z) = z$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ ✓ ($\Rightarrow f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ entera)

Alternativamente: $f(x+iy) = x+iy \Rightarrow u(x,y) = x,\ v(x,y) = y$

Así: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ✓

② Si $f(z) = \bar z$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 1 \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Alternativamente: $f(x+iy) = x - iy \Rightarrow u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y$.

Así: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

③ Si $f(z) = |z|^2 = z\bar z$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = z$ sólo se anula en $z_0 = 0$.

Alternativamente: $f(x+iy) = x^2+y^2 \Rightarrow u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$.

Así: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \overset{?}{=} 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \overset{?}{=} 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} \iff (x,y) = (0,0)$.

④ **Ejercicio** Sea $f(x+iy) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ polinomio homogéneo de grado 3, donde $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. Determinar cuándo f es holomorfa.

[Indicación: Es mejor escribir $x = \frac{z+\bar z}{2}$, $y = \frac{z-\bar z}{2i}$]

§9. Operador Laplaciano y funciones armónicas

El operador Laplaciano es muy importante en matemáticas (y en física!). En $\mathbb{R}^n$ está dado por

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$ operando sobre funciones de clase $\mathcal{C}^2$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ abierto no-vacío, y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función compleja tal que $f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$:

⚠ Veremos después que siempre se cumple.

Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es holomorfa y además $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann (y el Teorema de Schwarz sobre la conmutatividad de las derivadas de 2do orden!) implican que:

① $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 .$$

② $$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 .$$

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío, y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R})$. Decimos que u es **armónica** en Ω si $\Delta u = 0$ en Ω.

Obs: Una prueba alternativa de ① y ② se obtiene al notar que:

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \underset{\text{Schwarz}}{\overset{\text{def}}{=}} 4\, \frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \underset{\text{Schwarz}}{=} 4\, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \frac{\partial}{\partial z}$$

Luego, la ecuación de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ implica $0 = \Delta f = \Delta u + i \Delta v$
$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$.

Prop: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorfa tal que $u = \mathrm{Re}(f)$ y $v = \mathrm{Im}(f)$ son de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω. Entonces, u y v son armónicas en Ω y se relacionan mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
Recíprocamente, si $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω verificando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces u y v son armónicas en Ω y $f := u + iv$ es holomorfa en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.
En ambos casos, decimos que u y v son **funciones armónicas conjugadas**.

⚠ Veremos pronto que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ implica que $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$!

Ejemplos: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no vacío.

① Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $\sigma(z) = \bar{z}$ conjugación, entonces $g(z) := \overline{f(z)}$ (ie, $g = \bar{f}$) es armónica en Ω. En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \iff 0 = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$$

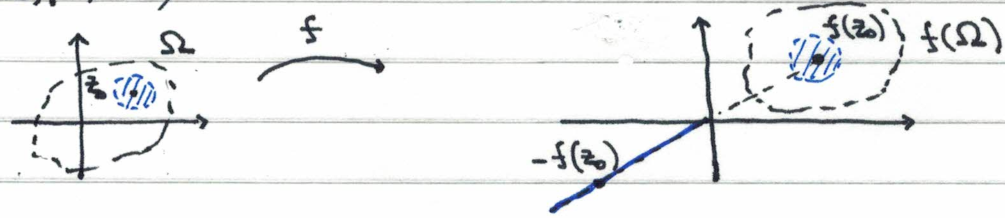
y luego $\Delta g = 4 \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{\partial g}{\partial z}\right) = 0$.

② Si $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ entonces $h := f + \bar{g}$ es armónica en Ω.

③ **Ejercicio** Sea $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función armónica en Ω. Probar que $f(x+iy) := \dfrac{\partial u}{\partial z}(x,y)$ es holomorfa en Ω.

Corolario: Sea $f \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ (ie, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorfa y $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$). Entonces, la función $\ln|f| : \Omega \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \ln|f(z)|$ es armónica en Ω.

Dem: Sea $z_0 \in \Omega$, y sea $\delta > 0$ tal que $f(D(z_0,\delta)) \subseteq D(f(z_0), \varepsilon)$ con $0 < \varepsilon < |f(z_0)|$, ie,

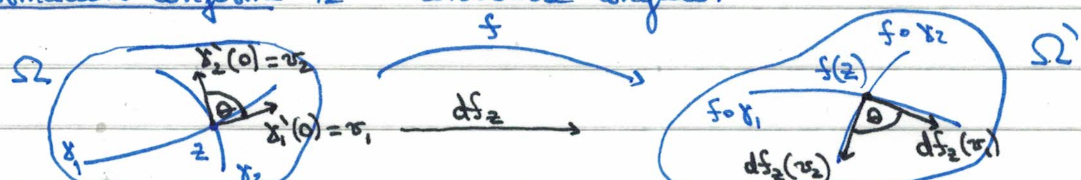


$\Rightarrow D(f(z_0), \varepsilon)$ es disjunto de la semi-recta pasando por 0 y $-f(z_0)$, y luego podemos definir una rama $\log_{\theta_0}$ en $D(f(z_0), \varepsilon)$.

Así, $\log_{\theta_0}(f(z)) \overset{\text{def}}{=} \ln|f(z)| + i \arg_{\theta_0}(f(z))$ es holomorfa en $D(z_0, \delta)$

$\overset{\text{Prop}}{\Rightarrow} \ln|f(z)| = \operatorname{Re}(\log_{\theta_0}(f(z)))$ es armónica en $D(z_0, \delta)$ ✓ ∎

Cultura general: Históricamente ($\approx$ siglo XVI - XVII), se tiene otra caracterización de las funciones holomorfas en términos de "preservar ángulos" ($\leadsto$ cartografía!): Si $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos y $f : \Omega \to \Omega'$ diferenciable, entonces f es una transformación conforme si "conserva ángulos"



Hecho: $f \in \mathcal{O}(\Omega) \iff f$ es conforme y preserva la orientación (ie, $\det(df_z) > 0$ en Ω).

§10. Integración de 1-formas diferenciales y Teorema de Green

En esta sección "recordaremos" las nociones necesarias para calcular integrales de línea.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto convexo no-vacío. Una 1-forma diferencial continua y a valores complejos en Ω es una función continua

$$\omega : \Omega \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$
$$x \longmapsto \{\omega(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ lineal}\}$$

Si $(x_1, \dots, x_n)$ son coord. en $\mathbb{R}^n$, entonces $(dx_1, \dots, dx_n)$ es la base canónica de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ como $\mathbb{C}$-ev. Luego toda 1-forma diferencial se escribe como:

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \dots, x_n)\, dx_i \quad \text{donde } f_i : \Omega \to \mathbb{C} \text{ función continua.}$$

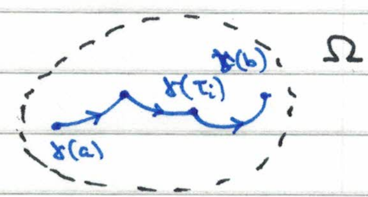
Ejemplo importante: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ función de clase $\mathcal{C}^p$, con $p \geq 1$. Entonces, su diferencial

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j$$

es una 1-forma diferencial en Ω.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto convexo no-vacío. Un camino de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos en Ω es una función continua

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega, \ t \longmapsto \gamma(t)$$



tal que existe una subdivisión finita

$$a := \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N =: b$$

con $\gamma|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ de clase $\mathcal{C}^p$. Decimos que los $\gamma(\tau_i)$ son las puntas de γ.

Observación: Sea $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos, $p \geq 1$.

1. El camino con orientación decreciente, denotado usualmente $-\gamma$ está definido por $(-\gamma)(t) := \gamma(-t)$ para $-b \leq -t \leq -a$. En otras palabras, se recorre la curva $\Gamma := \gamma([a,b])$ en sentido opuesto al original.
2. Definimos el largo o longitud de γ mediante

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2}\, dt$$

donde $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n$.

3. Con la notación anterior, si $x_i := \gamma_i(t)$ entonces $dx_i = \gamma_i'(t)\, dt$ si γ es diferenciable en $t \in [a,b]$.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto conexo no-vacío, y sean $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos ($p \geq 1$) y $\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,\dots,x_n)\,dx_j$ una 1-forma diferencial en Ω. Definimos la integral de línea:

$$\int_\gamma \omega := \int_\gamma \sum_{j=1}^{n} f_j(x_1,\dots,x_n)\,dx_j \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \sum_{j=1}^{n} f_j(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))\,\gamma_j'(t)\,dt$$

Observaciones:

1. Por definición, $\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$.
2. Sean $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \Omega$ y $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \Omega$ caminos de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos. Decimos que γ_1 y γ_2 son equivalentes, y escribimos $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si:

   $\exists\, \varphi : [a_1,b_1] \xrightarrow{\sim} [a_2,b_2]$ difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos (i.e., φ biyectivo, $\mathcal{C}^p$ por pedazos, con derivadas por la izquierda y derecha $\neq 0$) estrictamente creciente tal que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$.

Así, una curva orientada de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos es una clase de equivalencia de caminos de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos. En part, si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ entonces se tiene que $\Gamma = \gamma_1([a_1,b_1]) = \gamma_2([a_2,b_2])$.

El valor de la integral de línea $\int_\gamma \omega$ no depende de la parametrización de γ: si $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$ es un difeomorfismo definiendo una nueva parametrización entonces (haciendo $t = \varphi(s)$):

i) $\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_\gamma \omega$ si φ preserva la orientación (i.e., φ creciente y $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$).

ii) $\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = -\int_\gamma \omega = \int_{-\gamma} \omega$ si φ revierte la orientación (i.e., φ decreciente y $\varphi(a') = b$, $\varphi(b') = a$).

Luego, si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ entonces (i) nos da $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Del mismo modo, la longitud $\ell(\gamma) = \ell(-\gamma)$ sólo depende de la curva $\Gamma = \gamma([a,b]) \subseteq \Omega$ definida por γ.

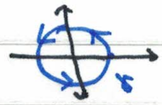
Caso particular importante: En $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, si usamos la base $(dz, d\bar{z})$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ (en lugar de (dx,dy)) entonces una 1-forma diferencial es:

$$\omega = f(z,\bar{z})\,dz + g(z,\bar{z})\,d\bar{z} \quad \text{donde } f, g : \Omega \to \mathbb{C} \text{ continuas.}$$

Luego, si $\gamma : [a,b] \to \Omega$ es un camino de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos, entonces:

$$\int_\gamma \omega \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \left[f(\gamma(t),\overline{\gamma(t)})\,\gamma'(t) + g(\gamma(t),\overline{\gamma(t)})\,\overline{\gamma'(t)} \right] dt$$

Ejemplo: Sea $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ círculo de radio $r>0$ centrado en el origen y orientado en sentido anti-horario.



Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $\omega = z^n \, dz$, entonces:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma z^n \, dz \stackrel{def}{=} \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \frac{d}{dt}(re^{it}) \, dt = \int_0^{2\pi} r^n e^{itn} \cdot ire^{it} \, dt$$

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} \, dt$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

Prop: Sea ω una 1-forma diferencial continua y a valores complejos en Ω y sea $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un camino de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Entonces:

(1) si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω, entonces

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En part, $\int_\gamma df = 0$ si γ es una curva cerrada (i.e., $\gamma(a) = \gamma(b)$).

(2) si $\omega = \sum_{j=1}^n f_j \, dx_j$, entonces

$$\left| \int_\gamma \omega \right| \leq \ell(\gamma) \sup_{t\in[a,b]} \|\omega(\gamma(t))\|$$

donde $\|\omega\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |f_j|^2}$.

(3) Se tiene que

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{n} f_i(\gamma(\xi_j))(\gamma_i(\tau_{j+1}) - \gamma_i(\tau_j))$$

donde la subdivisión $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = b$ recorre el conjunto de todas las posibles subdivisiones de $[a,b]$ tales que $\max_{j=0,\ldots,N-1} (\tau_{j+1} - \tau_j) \leq \varepsilon$ y donde los $\xi_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ son puntos arbitrarios.

Dem: El punto (1) se deduce de la regla de la cadena

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)) \, \gamma_i'(t),$$

de la definición de $\int_\gamma df$ y del Teorema Fundamental del Cálculo ✓

El punto (2) es consecuencia de la definición de $\int_\gamma \omega$ y la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left| \sum_{j=1}^n f_j(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)) \cdot \gamma_j'(t) \right| \leq \|\omega(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| \quad ✓$$

Finalmente, notamos que

$$\left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \sum_{i=1}^n f_i(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)) \, \gamma_i'(t) \, dt - \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(\xi_j))(\gamma_i(\tau_{j+1}) - \gamma_i(\tau_j)) \right| \leq M_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \|\gamma'(t)\| \, dt$$

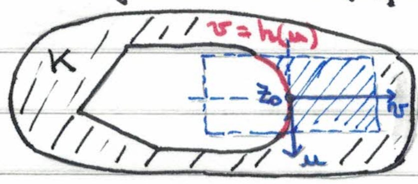
donde $M_j = \sup_{t\in[\tau_j, \tau_{j+1}]} \|\omega \circ \gamma(t) - \omega \circ \gamma(\xi_j)\|$.

Como $\max_{j=0,\ldots,N-1} M_j \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ por continuidad uniforme de $\omega \circ \gamma$ en el compacto $[a,b]$ (Teorema de Heine-Cantor), de donde deducimos (3) ✓ ∎

Para enunciar el Teorema de Green debemos considerar compactos y sus bordes :

Df : Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto no-vacío y $p \geq 1$. Decimos que K tiene **borde de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos** si $\forall z_0 \in \partial K$, existen coordenadas (u,v) centradas en z_0 y un rectángulo $R = \{-\varepsilon < u < \varepsilon\} \times \{-\delta < v < \delta\}$ suficientemente pequeño tal que

$$K \cap R = \{(u,v) \in R \text{ tq } v \geq h(u)\}$$



donde h es de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos en $]-\varepsilon, \varepsilon[$ con $h(0) = 0$ y $\sup |h| < \delta$.

Obs : Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto con borde de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos :

① K compacto $\Rightarrow$ ∂K compacto y luego ∂K puede ser cubierto por finitos rectangulos $R = R_{z_0}$ con $z_0 \in \partial K$.

② Dado que $\partial K \cap R_{z_0}$ = grafo de $h \overset{df}{=} \{(u,v) \in R_{z_0} \text{ tq } v = h(u)\}$, tenemos que ∂K puede parametrizarse usando finitos caminos de la forma $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \partial K$, $u \mapsto (u, h(u))$.

③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Un **agujero** de un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ es una componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus K$. Probar que si K tiene borde de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos entonces K posee a lo más un número finito de agujeros.
[Indicación : Cada agujero está bordeado por los caminos $u \mapsto (u, h(u))$.]

Df : Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compacto con borde de clase $\mathcal{C}^p$ por pedazos. Decimos que ∂K está **orientado (canonicamente)** si cada uno de los ejes coordenados

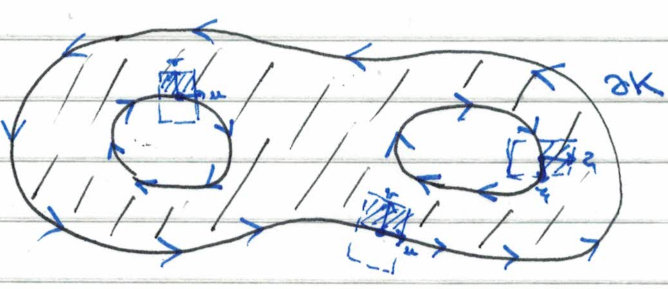
$$(z_0 ; (e_1(z_0), e_2(z_0))) \text{ definiendo las coord. } (u,v) \text{ en } R_{z_0}$$

están orientados positivamente resp. a la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$, ie,

$$\det_{\mathcal{C}} (e_1(z_0), e_2(z_0)) > 0 .$$

Concretamente, orientamos ∂K al considerar cada uno de los caminos $u \mapsto (u, h(u))$ (que describen localmente ∂K) en la dirección de u **creciente**.

Ejemplo : El borde del compacto



está orientado canónicamente.

El último ingrediente que necesitamos son las formas diferenciales de grado 2:

Def: Si $V \cong \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta : V \to \mathbb{R}$ son formas lineales, definimos el **producto exterior** $\alpha \wedge \beta$ como la forma bilineal alternada $V \times V \to \mathbb{R}$ dada por:

$$(\alpha \wedge \beta)(\xi, \eta) := \alpha(\xi)\beta(\eta) - \alpha(\eta)\beta(\xi) \quad \forall \xi, \eta \in V.$$

y luego $\alpha \wedge \alpha \overset{dq}{=} 0$ y $\beta \wedge \alpha \overset{dq}{=} -\alpha \wedge \beta$.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío y $A^p(\mathbb{R}^n) := \{\varphi : \mathbb{R}^n \overset{p \text{ veces}}{\times \dots \times} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ p-lineal alternada}\}$

Una **p-forma diferencial** continua y a valores reales en Ω es una función continua $\omega : \Omega \to A^p(\mathbb{R}^n)$, $x \mapsto \omega(x)$.

Ejemplo principal: Sean (x,y) coordenadas en $\mathbb{R}^2$. Entonces (dx, dy) es la base canónica (dual) de $A^1(\mathbb{R}^2) \overset{dq}{=} (\mathbb{R}^2)^*$. Luego,

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0 \quad \text{y} \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx$$

son los únicos productos exteriores relevantes.

Explícitamente, si $\xi = (a,b)$, $\eta = (c,d) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$(dx \wedge dy)(\xi, \eta) \overset{dq}{=} ad - bc \overset{dq}{=} \det_{\varepsilon}(\xi, \eta)$$

Así, tal como $\det_{\varepsilon}$ permite calcular el área (con signo) de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$, podemos pensar $dx \wedge dy$ como una expresión de la medida de área (de Lebesgue) $dx\, dy$ en $\mathbb{R}^2$.

Consecuencia: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto no-vacío. Entonces, si $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$:

i) Una 1-forma diferencial en Ω está dada por $\omega = f\, dx + g\, dy$, y si $z = (x,y) \in \Omega$ entonces: $(\omega(z))(\xi) \overset{dq}{=} f(x,y)\xi_1 + g(x,y)\xi_2$.

ii) Una 2-forma diferencial en Ω está dada por $\alpha = h\, dx \wedge dy$, y si $z = (x,y) \in \Omega$ entonces: $(\alpha(z))(\xi, \eta) = h(x,y)(\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2)$.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío, y sea $\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j\, dx_j$ una 1-forma diferencial de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω (a valores reales o complejos). Definimos su **diferencial exterior** mediante

$$d\omega := \sum_{j=1}^{n} df_j \wedge dx_j, \quad \text{donde } df_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i$$

En particular, si $n = 2$ y $\omega = u(x,y)\, dx + v(x,y)\, dy$ entonces

$$d\omega = du \wedge dx + dv \wedge dy = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Con todo lo anterior en mente, podemos enunciar el "Teorema de Green" (que fue enunciado por Green en 1828, que ya era conocido por Euler en el siglo XVIII, y que fue probado por Riemann en su tesis doctoral en 1851). Se trata de un caso particular del Teorema de Stokes sobre integración en variedades compactas orientables (con borde).

Teorema de Green: Sea $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compacto no-vacío, con borde ∂K de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos y orientado canónicamente. Entonces, para toda 1-forma diferencial $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ de clase $\mathscr{C}^1$ en una vecindad de K se tiene que:

$$\boxed{\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega}$$

ie, $\displaystyle\int_{\partial K} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$

§11. Teoremas de Cauchy y Goursat

El "Teorema de Cauchy" es un resultado central en Análisis Complejo, y fue enunciado por Cauchy en 1825 y probado por Riemann en 1851 para funciones holomorfas de clase $\mathscr{C}^1$. Finalmente, Goursat prueba en 1884 la versión general, donde no se asume la condición de ser de clase $\mathscr{C}^1$.

Teorema de Cauchy: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto no-vacío con borde de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos y orientado canónicamente tal que $K \subseteq \Omega$. Entonces para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que f es de clase $\mathscr{C}^1$ en Ω se tiene que

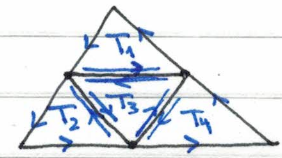
$$\boxed{\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0}$$

Dem (Riemann): Consideremos la 1-forma diferencial $\omega = f(z)\,dz$ de clase $\mathscr{C}^1$. Luego, $d\omega \overset{\text{def}}{=} df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) \wedge dz = 0$ pues $dz \wedge dz = 0$ y pues $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (Cauchy-Riemann). Así, el Teorema de Green implica que $\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega = 0$ ✓ ∎

Para eliminar la hipótesis $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ comenzaremos por analizar el caso en que K es un triángulo, y por ende un compacto de clase $\mathscr{C}^\infty$ por pedazos.

Lema de Goursat: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $T \subseteq \Omega$ un triángulo. Entonces, $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dem: Sea $I := \int_{\partial T} f(z)\,dz \in \mathbb{C}$. Dividamos T en 4 triángulos $T_1, .., T_4$ con vértices en los puntos medios de los lados de T:



← la orientación de las aristas interiores son opuestas!

$\Rightarrow I = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial T_k} f(z)\,dz$ y luego $\exists\, k \in \{1,..,4\}$ tq $\left|\int_{\partial T_k} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|I|}{4}$.

Inductivamente, construimos triángulos $T_0' \supseteq T_1' \supseteq T_2' \supseteq \ldots$ con $T_0' = T$, $T_1' = T_k$, etc, con $\operatorname{diam}(T_n') = \operatorname{diam}(T)/2^n$ y con $\left|\int_{\partial T_n'} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|I|}{4^n}$.

$\Rightarrow \exists!\, z_0 \in \mathbb{C}$ tq $z_0 \in T_n'$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (cf. §2, pág 4), ie, $\bigcap_{n\geq 0} T_n' = \{z_0\}$.

Dado que f es holomorfa (ie, $\mathbb{C}$-diferenciable) en z_0, tenemos que

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0) + (z-z_0)\varepsilon(z) \quad \text{y} \quad \lim_{z\to z_0} \varepsilon(z) = 0.$$

Por otro lado, si $g(z) := f(z_0)z + \frac{1}{2}(z-z_0)^2 f'(z_0)$ entonces g es holomorfa y $dg \overset{\text{dy}}{=} (f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0))\,dz \Rightarrow \int_{\partial T_n'} dg = 0$ ✓

Así,

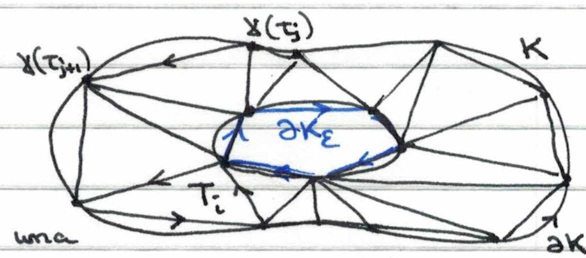
$$\left|\int_{\partial T_n'} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial T_n'} (z-z_0)\varepsilon(z)\,dz\right| \leq \ell(\partial T_n') \sup_{\partial T_n'} |z-z_0|\,|\varepsilon(z)|$$
$$\leq 3\,(\operatorname{diam}(T_n'))^2 \sup_{\partial T_n'} |\varepsilon(z)|$$

$$\Rightarrow |I| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_n'} f(z)\,dz\right| \leq 3\,(\operatorname{diam}(T))^2 \sup_{\partial T_n'} |\varepsilon(z)| \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad \blacksquare$$

Teorema de Goursat: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $K \subseteq \mathbb{C}$ un compacto no-vacío con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y orientado canónicamente tal que $K \subseteq \Omega$. Entonces, para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ se tiene que

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0.$$

Dem: Sea $\delta = \operatorname{dist}(K, \mathbb{C}\setminus\Omega) > 0$. Parametrizamos ∂K usando finitos caminos de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y por cada uno de dichos caminos $\gamma : [a,b] \to \Omega$ consideramos una subdivisión $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = b$ tal que $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$



$\Rightarrow$ Cada segmento $[\gamma(\tau_j), \gamma(\tau_{j+1})]$ está contenido en Ω.

Para $0 < \varepsilon << 1$, la unión de dichos segmentos forman el borde de un compacto K_ε con borde poligonal. Dicho compacto es triangulable, ie, $K_\varepsilon = \bigcup_i T_i$, y luego $\int_{\partial K_\varepsilon} f(z)\,dz = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z)\,dz = 0$ por el Lema de Goursat.

Finalmente, $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial K_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial K} f(z)\,dz$ (cf. §10, pág 27) ✓ $\blacksquare$

§12. Fórmula de Cauchy y Fórmula de Pompeiu

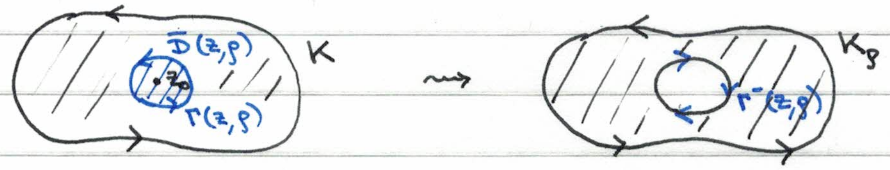
Durante esta sección $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ será un abierto no-vacío.

Teorema (Fórmula de Cauchy): Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y sea $K \subseteq \Omega$ un compacto no-vacío de borde de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos y orientado canónicamente. Entonces, para todo punto z en $\operatorname{int}(K)$ se tiene que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

En particular, f está determinada por sus valores en ∂K.

Dem: Sea $\rho > 0$ tal que $\overline{D}(z,\rho) \subseteq \operatorname{int}(K)$, y sea $K_\rho := K \setminus D(z,\rho)$



$\Gamma^-(z,\rho) := -\Gamma(z,\rho)$
orientación opuesta

Luego, $\partial K_\rho = \partial K \cup \Gamma^-(z,\rho)$. Sea $g(w) = f(w)/(w-z)$ función holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$. Como $K_\rho \subseteq \Omega \setminus \{z\}$, el Teorema de Cauchy nos da

$$0 = \int_{\partial K_\rho} g(w)\, dw = \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \int_{\Gamma(z,\rho)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw .$$

Para calcular la última integral de línea, parametrizamos $\Gamma(z,\rho)$ usando $\gamma(t) = z + \rho e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$:

$$\int_{\Gamma(z,\rho)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\rho e^{it})}{\rho e^{it}} \cdot i\rho e^{it}\, dt = i\int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{it})\, dt =: I_\rho$$

Finalmente, el resultado se obtiene del hecho que $\lim_{\rho \to 0} I_\rho = 2\pi i f(z)$, gracias a la continuidad de f en z. ∎

(Cultura general) La Fórmula de Pompeiu (1905) es una generalización de la fórmula de Cauchy para funciones no necesariamente holomorfas:

Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto con borde orientado de clase $\mathscr{C}^1$ por pedazos, y denotemos por $d\lambda(z) := dx\,dy$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, entonces:

1. Para toda función $f : K \to \mathbb{C}$ de clase $\mathscr{C}^1$ se tiene

$$\int_{\partial K} f(z)\, dz = 2i \iint_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\lambda(z) .$$

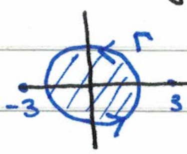
2. Si $z \in \operatorname{int}(K)$, entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{\pi} \iint_K \frac{1}{w-z} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\, d\lambda(w) .$$

(la demostración es muy similar, usando Teo. de Green y Teo. de Convergencia Dominada)

Ejemplos:

① Sea $K = \overline{\mathbb{D}}(0,2)$ y $\Gamma = \partial K$ círculo de radio 2 centrado en el origen, y sea $f(z) = z/(9-z^2)$ función holomorfa en una vecindad abierta de K. Luego, la fórmula de Cauchy aplicada a $z_0 = -i \in \mathrm{int}(K)$ nos da:

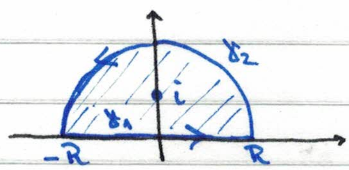


$$\int_\Gamma \frac{z/(9-z^2)}{z-(-i)}\,dz = \int_\Gamma \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\,dz = 2\pi i\, f(-i) = 2\pi i\left(\frac{-i}{10}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

② (cf. "distribución de Cauchy"): Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$ y consideremos la integral

$$I(a) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx \quad \text{(por paridad)}.$$

Sea $f(z) := e^{iaz}/(z^2+1)$ función holomorfa en $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$, y sea $\Gamma = \partial K$ donde K es el semi-círculo:



con $R > 1$.

Notamos que f no es holomorfa en K!

⇝ Astucia: Escribir $f(z) = g(z)/(z-i)$ con $g(z) := e^{iaz}/(z+i)$ holomorfa en K.

La fórmula de Cauchy aplicada a $z_0 = i \in \mathrm{int}(K)$ nos da:

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = \int_{\partial K} \frac{g(z)}{z-i}\,dz = 2\pi i\, g(i) = 2\pi i\, \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a}$$

Por otro lado, $\int_{\partial K} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = I_1 + I_2$.

i) I_1: $\gamma_1(t) = t$ con $t \in [-R,R]$ y luego $I_1 \overset{\text{dy}}{=} \int_{-R}^{R} \frac{e^{iat}}{t^2+1}\,dt \xrightarrow{R\to+\infty} I(a)$.

ii) I_2: $\gamma_2(t) = Re^{it}$ con $t \in [0,\pi]$, y luego:

$$I_2 \overset{\text{dy}}{=} \int_0^\pi \frac{e^{iaRe^{it}}}{R^2 e^{i2t}+1}\cdot iRe^{it}\,dt = \int_0^\pi h(t)\,dt$$

con
$$|h(t)| = \frac{R}{|R^2e^{i2t}+1|}\cdot\left|e^{iaRe^{it}}\right| \underset{||z|-|w|| \leq |z-w|}{\leq} \frac{R}{R^2-1}\cdot e^{-aR\sin(t)}$$

$$\underset{t=0}{\leq} \frac{R}{R^2-1}$$

$$\Rightarrow |I_2| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Así, $I(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a}$ ✓

Por paridad, obtenemos $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$ para todo $a \in \mathbb{R}^{>0}$.

§13. Diferenciabilidad de funciones holomorfas y Teorema de Morera

Una de las aplicaciones más notables y espectaculares de la fórmula de Cauchy es el siguiente resultado:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $K \subseteq \Omega$ compacto no-vacío con borde ∂K de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Entonces, toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω. Más aún, para todo punto interior $z_0 \in \operatorname{int}(K)$:

① Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z_0) = f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

② Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$

$$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z_0) \underset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^{n+m} f}{\partial \bar{z}^m \partial z^n}(z_0) = 0.$$

En particular, una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ posee derivadas complejas $f^{(n)}$ de orden arbitrario y además $f^{(n)} \in \mathcal{O}(\Omega)$ para todo $n \geq 1$.

Dem: Dividiendo el borde ∂K en N caminos γ_j de clase $\mathcal{C}^1$, tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{a_j}^{b_j} \frac{f(\gamma_j(t))}{\gamma_j(t)-z}\, \gamma_j'(t)\, dt$$

Como $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, f es continua en Ω y la última integral puede considerarse una función en la variable z. Dado que la función $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\Omega \setminus \{z\}$, el resultado se obtiene por inducción usando las fórmulas

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{w-z}\right)(z_0) = \frac{n!}{(w-z_0)^{n+1}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^{n+m}}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}\left(\frac{1}{w-z}\right) = 0 \text{ si } m > 0 \quad \blacksquare$$

Ejemplos:

① $I = \int_{\partial \mathbb{D}(0,4)} \frac{\sin(z)}{(z-\pi)^4}\, dz$ se calcula considerando $f(z) = \sin(z)$ y luego $f^{(3)}(z) = -\cos(z)$ y luego $I = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(\pi) = \frac{-2\pi i}{6}\cos(\pi) = \frac{i\pi}{3}$.

② $I = \int_{\partial \mathbb{D}(i,2)} \frac{1}{(z^2+4)^2}\, dz = \int_{\partial \mathbb{D}(i,2)} \frac{f(z)}{(z-2i)^2}\, dz$

con $f(z) = 1/(z+2i)^2$ holomorfa en $\overline{\mathbb{D}}(i,2)$

$\Rightarrow f'(z) = -2/(z+2i)^3$ y luego $I = \frac{2\pi i}{1!} f'(2i) = 2\pi i \cdot \frac{(-2)}{4^3 i^3} = \pi/16$.

③ Ejercicio: Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$, calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+1)^2}\, dx$

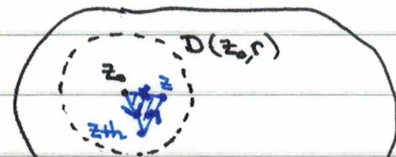
El siguiente resultado es el recíproco del Lema de Goursat, y será relevante más adelante para probar holomorfía en ciertos contextos.

Teorema de Morera (1886): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y sea $f: \Omega \to \mathbb{C}$ función continua. Si suponemos que:

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0 \quad \text{para todo triángulo } T \subseteq \Omega$$

entonces f es holomorfa en Ω.

Dem: Sea $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tq $D(z_0, r) \subseteq \Omega$.



Para $z \in D(z_0, r)$ definimos

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(w)\,dw,$$

donde $[z_0, z]$ es el segmento que une z_0 a z.

Luego, para $z \in D(z_0, r)$ y $h \neq 0$ tal que $z + h \in D(z_0, r)$, tenemos que

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{h}\left(\int_{[z_0, z+h]} f(w)\,dw - \int_{[z_0, z]} f(w)\,dw \right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\cancel{\int_{\partial T} \overset{0}{f(w)}\,dw} - \int_{[z+h, z]} f(w)\,dw \right)$$

$\gamma(t) = z + th$
con $t \in [0,1]$

$$= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w)\,dw \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\cancel{h}} \int_0^1 f(z+th) \cdot \cancel{h}\,dt$$

La continuidad de f en z_0 implica entonces que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) \quad \text{y luego} \quad F \in \mathcal{O}(\Omega).$$

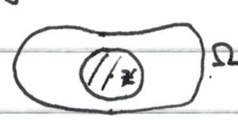
En particular, $F'(z) = f(z)$ es holomorfa en Ω también ✓ ■

§14. Desigualdad de Cauchy y Teorema de Liouville

La fórmula de Cauchy para las derivadas de funciones holomorfa permite obtener las siguientes "estimaciones a priori", probadas por Cauchy en 1844.

Teorema (Desigualdad de Cauchy): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, $z \in \Omega$, y $r > 0$ tal que $\overline{D}(z, r) \subseteq \Omega$. Entonces, para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $n \geq 0$ se tiene que:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\partial \overline{D}(z,r)} |f|$$



Dem: La fórmula de Cauchy implica $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial \overline{D}(z,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$

$\gamma(t) = z + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ $\longrightarrow$ $\overset{\text{df}}{=} \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \cdot \frac{e^{-i(n+1)t}}{r^{n+1}}\, r i e^{it}\,dt$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{it})|\,dt \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{\partial \overline{D}(z,r)} |f| \quad ✓ \quad ■$$

Corolario: Sea f una función entera (ie, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) tal que $\exists A, B \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}$ se tiene $|f(z)| \leq A(1+|z|)^B$

ie, "f crece de manera polinomial cuando $|z| \to +\infty$".

Entonces, f es un polinomio de grado $\leq B$.

Dem: Sea $\lfloor B \rfloor \in \mathbb{N}$ la parte entera de B y sea $n := \lfloor B \rfloor + 1 > B$

Luego, para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $r > 0$ se tiene que

$$\sup_{\partial D(z,r)} |f| = \sup_{t \in [0,2\pi]} |f(z+re^{it})| \leq A(1+|z+re^{it}|)^B \leq A(1+|z|+r)^B,$$

y por la desigualdad de Cauchy $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} A(1+|z|+r)^B \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow f^{(n)}(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ y luego f es un polinomio de grado $\leq n-1 = \lfloor B \rfloor$ ■

El caso $B=0$ del corolario anterior fue enunciado por Cauchy en 1844 y probado en 1847 por Liouville.

Teorema de Liouville: Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ función entera y acotada (ie, $\exists A \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que $|f(z)| \leq A$ para todo $z \in \mathbb{C}$). Entonces, f es constante. ■

Una consecuencia importante es el famoso:

Teorema Fundamental del Álgebra: $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, ie, todo polinomio $P \in \mathbb{C}[z]$ de grado $d \geq 1$ posee una raíz en $\mathbb{C}$.

Dem: Supongamos por contradicción que existe

$$P(z) = a_d z^d + \ldots + a_1 z + a_0 \quad \text{tal que } P(w) \neq 0 \ \forall w \in \mathbb{C}.$$

Entonces, $f(z) := 1/P(z)$ es entera y $|f(z)| \approx 1/|a_d||z|^d$ tiende a 0 cuando $|z| \to +\infty$. En particular, f es acotada y luego constante gracias al Teorema de Liouville $\Rightarrow P = 1/f$ constante ↯ ■

Ejercicio Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ función entera y sea $u: \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función armónica $u := \mathrm{Re}(f)$. Probar que si u está acotada superiormente (ie, $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $u(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) entonces u es una función constante.

[Indicación: Considerar $g(z) := \exp(f(z))$.]

§15. Funciones analíticas

Una función real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es analítica si converge a su serie de Taylor. Esto implica en particular que es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Sin embargo,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y no es analítica (pues $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \geq 0$)!

En el caso de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ hay dos nociones naturales de analiticidad:

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función. Decimos que:

① f es $\mathbb{R}$-analítica si para todo $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, existe una vecindad abierta V de z_0 tal que

$$f(x,y) = \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2} a_{\alpha,\beta} (x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta$$

para todo $z = (x,y) \in V$, con convergencia normal en V.

② f es $\mathbb{C}$-analítica si para todo $z_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, existe una vecindad abierta V de z_0 tal que

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z - z_0)^n \quad \text{para todo } z \in V,$$

con convergencia normal en V.

Obs (cf. §5): Tanto en el caso $\mathbb{R}$-analítico como en el $\mathbb{C}$-analítico tenemos que las series anteriores son derivables término a término. En particular, sus coeficientes generales están únicamente determinados por las fórmulas:

$$a_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0)$$

Ejercicio

① Probar que si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-analítica, entonces es $\mathbb{R}$-analítica.
[Indicación: $(z - z_0)^n = ((x - x_0) + i(y - y_0))^n$ y usar Newton]

② Probar que la función $f(z) = \overline{z}$ es $\mathbb{R}$-analítica pero no es $\mathbb{C}$-analítica.

El resultado principal de esta sección relaciona las nociones de holomorfía y analiticidad:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ función.
Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

① f es holomorfa en Ω.

② f es $\mathbb{C}$-analítica en Ω.

Dem: ② ⇒ ① ya fue probado en §5. Para ver que ① ⇒ ②, sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y sean $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \Omega$.
Para $z \in \operatorname{int}(\overline{D}(z_0,r)) \overset{\text{def}}{=} D(z_0,r)$, la fórmula de Cauchy implica que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

Escribamos
$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \left(\frac{1}{1 - (z-z_0)/(w-z_0)} \right)$$
$$= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - w_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(z_0,r)} f(w) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw .$$

Luego, si $w = z_0 + r e^{it}$ entonces
$$\left| \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n \quad \text{con } M = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

⇒ La serie converge normalmente para todo $t \in [0, 2\pi]$ y luego
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{con } a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \overline{D}(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \underset{\text{Cauchy}}{=} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

y luego f es $\mathbb{C}$-analítica en $\overline{D}(z_0, r)$ ✓ ■

La demostración anterior muestra que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es analítica en todo disco cerrado contenido en Ω. En particular:

Corolario: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces, para todo $z_0 \in \Omega$ tenemos que
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n ,$$
donde el radio de convergencia R de esta serie verifica que
$$R \geq \operatorname{dist}(z_0, \Omega^c).$$

§16. Ceros de funciones holomorfas

Una consecuencia importante del hecho que toda función holomorfa es analítica es el siguiente resultado sobre los ceros de dichas funciones

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto convexo no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función holomorfa no-idénticamente nula (ie, $\exists z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) \neq 0$). Entonces, el conjunto de ceros

$$V(f) := f^{-1}(0) \overset{\text{df}}{=} \{z \in \Omega \text{ tal que } f(z) = 0\} \subseteq \Omega$$

consiste en puntos aislados (ie, para todo $z \in V(f)$ existe una vecindad abierta $\mathcal{U}_z \subseteq \Omega$ tal que $V(f) \cap \mathcal{U}_z = \{z\}$).

Antes de probar el resultado anterior, recordemos la siguiente caracterización de conjuntos aislados.

Lema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no-vacío, y sea $A \subseteq \Omega$ un subconjunto. Las siguientes propiedades son equivalentes:

① $A \subseteq \Omega$ es un cerrado formado por puntos aislados.

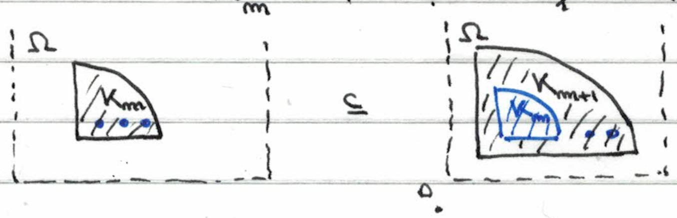
② A es localmente finito en Ω, ie, todo punto $x \in \Omega$ posee una vecindad abierta $\mathcal{U}_x$ tal que $A \cap \mathcal{U}_x$ es un conjunto finito.

③ Para todo compacto $K \subseteq \Omega$, la intersección $A \cap K$ es un conjunto finito.

④ El conjunto A es finito o numerable, y si $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es infinito entonces $\|a_n\| + 1/d(a_n, \partial\Omega) \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$, ie, los puntos a_n se alejan al infinito o bien tienden al borde de Ω.

Dem: ① $\Rightarrow$ ②, con $A \cap \mathcal{U}_x$ vacío o $\{x\}$ si $\mathcal{U}_x$ suficientemente pequeña ✓
② $\Rightarrow$ ③ gracias a la caracterización de compacidad mediante subcubrimientos finitos ✓ Veamos que ③ $\Rightarrow$ ④: Consideremos para todo $m > 0$

$$K_m := \{x \in \Omega \text{ tal que } \|x\| \leq m \text{ y } d(x, \partial\Omega) \geq 1/m\}$$



$\Rightarrow K_m$ son compactos en Ω tq $\Omega = \bigcup_{m>0} K_m$ y $K_m \subseteq \operatorname{int}(K_{m+1})$

$\Rightarrow A \cap K_m$ es finito por hipótesis, con $A \cap K_m = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n_m}\}$

Luego, $A \cap (K_m \setminus K_{m-1}) = \{a_{n_{m-1}+1}, \ldots, a_{n_m}\}$ y por ende si $n > n_m$ entonces $a_n \notin K_m \overset{\text{df}}{\Rightarrow} \|a_n\| + d(a_n, \partial\Omega)^{-1} \geq m$ ✓ ④ $\Rightarrow$ ①: $\boxed{\text{Ejercicio}}$ ■

Obs importante: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío. Entonces, si Ω es conexo ($i.e.$, $\nexists\, \Omega_1, \Omega_2 \neq \emptyset$ abiertos tq $\Omega_i \subseteq \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$) y $X \subseteq \Omega$ es abierto y cerrado $\Rightarrow X = \emptyset$ o bien $X = \Omega$.

Dem. del Teorema:

Sea $X := \{ z_0 \in \Omega$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0\} \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{n \geq 0} V(f^{(n)})$. Dado que cada $V(f^{(n)})$ es cerrado en Ω, tenemos que X también lo es. Además, $X \neq \Omega$ pues f no es idénticamente nula.

Por otra parte, X es abierto en Ω: si $z_0 \in \Omega$, entonces la expresión
$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$
es válida en $D(z_0, r)$, con $r = d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ y luego $f|_{D(z_0,r)} \equiv 0$.

Como $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es conexo y $X \neq \Omega$ abierto y cerrado $\Rightarrow X = \emptyset$.

Para concluir, sea $z_0 \in V(f) \subseteq \Omega$, $i.e.$, $f(z_0) = 0$. Como $X = \emptyset$, existe $m \geq 1$ tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, que podemos asumir minimal.

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n := (z - z_0)^m g(z)$ en $D(z_0, r)$.

Por construcción, $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+m}(z - z_0)^n$ es holomorfa en $D(z_0, r)$ y $g(z) = f(z)/(z - z_0)^m$ en $\Omega \setminus \{z_0\}$ $\Rightarrow g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ✓

Finalmente, como $g(z_0) = a_m \overset{\text{def}}{=} f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$, la continuidad de g implica que g no se anula en una vecindad abierta $V \subseteq \Omega$ de z_0 $\Rightarrow f^{-1}(0) \cap V = \{z_0\}$, $i.e.$, $z_0 \in V(f)$ es un punto aislado ✓ ∎

La demostración del resultado anterior nos da información más precisa:

Prop: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función holomorfa no-idénticamente nula. Entonces, para todo $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$:

1. $\exists!$ entero $m \geq 1$ minimal tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, $i.e.$,
$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$
2. f se factoriza como
$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$
con $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ que no se anula en una vecindad abierta de z_0.

Decimos que f posee un cero de orden m en z_0. ∎

Ejercicio: Determinar el orden de todos los ceros de las funciones:

a) $\sin(z)$ y $\cos(z)$.

b) $\mathrm{Ln}(z)$

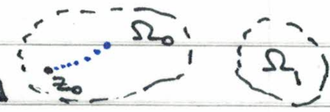
§17. Extensión analítica

En esta sección analizaremos la extensión de funciones holomorfas.

Teorema (Principio de extensión analítica): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío, y sean $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sea $A \subseteq \Omega$ un subconjunto tal que $\exists\, z_0 \in A$ punto de acumulación de A. Entonces:

Si $f = g$ en A $\Rightarrow$ $f = g$ en la componente conexa de Ω que contiene z_0.

Dem: Sea Ω_0 la componente conexa de Ω conteniendo a z_0.
Si consideramos $h := f - g$, entonces $h \in \mathcal{O}(\Omega_0)$ y
z_0 es un cero no-aislado de h $\Rightarrow$ $h \equiv 0$ en Ω_0 ■



Reformulación útil: Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo no-vacío y $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$.
Si existe $\{z_n\}_{n \geq 0} \subseteq \Omega$ sucesión de elementos diferentes tal que $z_n \xrightarrow{n \to +\infty} w \in \Omega$ y tal que $f(z_n) = g(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f = g$ en Ω.

Aplicación: Sean $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ funciones enteras tales que $f = g$ en $\mathbb{R}$, entonces $f = g$ en $\mathbb{C}$.

Ejemplo: Las identidades trigonométricas que se verifican en todo $\mathbb{R}$ se "extienden analíticamente" a todo $\mathbb{C}$. Por ejemplo,

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \text{y} \quad \cos^2(z) = \frac{1 + \cos(2z)}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

⚠ **No** es cierto que $|\cos(z)|^2 + |\sin(z)|^2 = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$ (a pesar de ser cierto en $\mathbb{R}$), pues $f(z) = |\cos(z)|^2 + |\sin(z)|^2$ no es holomorfa!

Corolario (Unicidad de la extensión analítica): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío, y sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorfa. Supongamos que f admite una extensión $F \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ a un abierto conexo $\tilde{\Omega}$ tal que $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$.
$\Rightarrow$ F es única.

Dem: Sean F_1 y F_2 dos extensiones analíticas de f a $\tilde{\Omega}$.
$\Rightarrow$ $F_1 - F_2$ se anula en Ω, que no es un subconjunto localmente finito de $\tilde{\Omega}$. Luego, $F_1 - F_2 \equiv 0$ en el abierto conexo $\tilde{\Omega}$ ✓ ■

Ejercicio Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo no-vacío, y sean $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Supongamos que existen sucesiones $\{z_n\}_{n \geq 0}, \{w_n\}_{n \geq 0} \subseteq \Omega$ de elementos diferentes y convergentes en Ω tal que $(f-g)(z_n) = 0$ y $(f+2g)(w_n) = 0$. Probar que $f \equiv g \equiv 0$ en Ω.

§18. Teorema de la aplicación abierta

El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento local de las funciones holomorfas (tanto en puntos "regulares" como en puntos "críticos"), y deducir el Teorema de la aplicación abierta y el Teorema de Inversión global.

Def: Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ dos abiertos no-vacíos, y sea $f: \Omega_1 \to \Omega_2$. Decimos que f es un biholomorfismo si $f \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, f es biyectiva, y $f^{-1} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ (ie, f es una biyección holomorfa con inversa holomorfa).

Teorema de Inversión local: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Sea $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, $\exists$ vecindad abierta V de z_0 tal que $W := f(V)$ es un abierto de $\mathbb{C}$ y tal que $f: V \to W$ es un biholomorfismo.

Dem: Dado que $f'(z_0) \neq 0$, la $\mathbb{R}$-diferenciabilidad de f en z_0 y la fórmula $df_{z_0}(h) = f'(z_0)h$ implican que df_{z_0} es un $\mathbb{R}$-isomorfismo. Luego, el Teorema de la función inversa (en $\mathbb{R}^n$) implica que $\exists$ vecindad abierta V de z_0 tal que $W := f(V)$ es una vecindad abierta de $f(z_0)$ y $f: V \to W$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^\infty$. Más aún, para todo $z \in V$, $d(f^{-1})_{f(z)} = (df_z)^{-1}$ ✓

Finalmente, dado que f es holomorfa tenemos que df_z es $\mathbb{C}$-lineal $\Rightarrow d(f^{-1})_{f(z)}$ es $\mathbb{C}$-lineal $\Rightarrow f^{-1}$ es holomorfa. ∎

Obs importante: La demostración anterior prueba más aún que:

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall z \in V, \quad \text{ie,} \quad (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad \forall w \in W.$$

{Cultura general} Existen versiones más precisas del resultado anterior:

Teorema de Bloch-Landau: Sea f holomorfa en $D(z_0, r)$ con $f'(z_0) \neq 0$. Entonces, $\exists\, \mathcal{U} \subseteq D(z_0, r)$ abierto tal que $f(\mathcal{U}) = D(w_0, R)$ con $R \geq \frac{1}{12} r\, |f'(z_0)|$ y con $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} D(z_0, R)$ biholomorfismo.

Este resultado fue enunciado por André Bloch en 1924 (desde un hospital siquiátrico al sur de París, donde estaba internado luego de haber matado a su hermano y sus tíos en una comida familiar en 1917...) y probado en 1929 por Edmund Landau.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Decimos que $z_0 \in \Omega$ es un punto crítico (resp. punto regular) si $f'(z_0) = 0$ (resp. $f'(z_0) \neq 0$).

Ejercicio Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ función no-constante. Probar que el conjunto de puntos críticos de f (resp. regulares) es un conjunto cerrado formado por puntos aislados en Ω (resp. es un abierto denso de Ω).

El Teorema de Inversión local nos permitió comprender el comportamiento de f en una vecindad de un punto regular. Para puntos críticos tenemos:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ no-constante en una vecindad de z_0. Entonces:
$\exists$ $m := \min\{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ y un biholomorfismo $\varphi : V \to W$ de una vecindad abierta $z_0 \in V$ a una vecindad abierta $0 \in W$ tal que $\varphi(z_0) = 0$ y tal que

$$f(z) - f(z_0) = \varphi(z)^m \quad \forall z \in V.$$

Dem: Dado que f no es constante en una vecindad de z_0, el conjunto $\{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ es no-vacío y luego posee un mínimo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ ✓

El caso $m = 1$ se obtiene del Teorema de Inversión local, definiendo en tal caso $\varphi(z) := f(z) - f(z_0)$ ✓

Supongamos que $m \geq 2$: En este caso, podemos escribir

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z) \iff f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z)$$

con $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $g(z_0) \neq 0$.

Como $g(z_0) \neq 0$, podemos escoger una rama de $\log$ para definir $z \mapsto \sqrt[m]{z}$ en una vecindad de $g(z_0)$, y obtener así $h \in \mathcal{O}(W_0)$ para una vecindad abierta $z_0 \in W_0$ y tal que $g = h^m$ en W.

Definamos $\varphi(z) := (z - z_0) h(z)$, que verifica $\varphi(z_0) \overset{\text{def}}{=} 0$ y

$$\varphi(z)^m = (z - z_0)^m h(z)^m \overset{\text{def}}{=} (z - z_0)^m g(z) \overset{\text{def}}{=} f(z) - f(z_0) \text{ en } W_0.$$

Como $\varphi'(z_0) = h(z_0) \neq 0$ (pues $h(z_0)^m \overset{\text{def}}{=} g(z_0) \neq 0$), el Teorema de Inversión local implica que φ es un biholomorfismo de una vecindad abierta $V \subseteq W_0$ de z_0 en una vecindad abierta de $\varphi(z_0) = 0 \in W$ ∎

Ejercicio Analizar $f(z) = \sin^3(z^2)$ en $z_0 = 0$.

Obs: En el Teorema anterior, siempre podemos suponer que W es un disco: en caso contrario, elegimos un disco $D(0,r_0) \subseteq W$ y reemplazamos W por $W_r := D(0,r)$ con $r \in]0,r_0[$, y V por $V_r := \varphi^{-1}(D(0,r))$.

Corolario: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ no-constante en una vecindad de z_0. Si $m := \min\{n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$, entonces:

1. Para todo $w \in D(f(z_0), r^m) \setminus \{f(z_0)\}$ con $r \in]0,r_0[$, la ecuación $f(z) = w$ posee m soluciones diferentes en V_r.
2. Si $w = f(z_0)$, la ecuación $f(z) = w$ admite $z = z_0$ como única solución (de multiplicidad m).

Dem: Para $w \in D(f(z_0), r^m)$, la ecuación $f(z) = w$ equivale a $\varphi(z)^m = w - f(z_0)$ en $D(0,r^m)$, y luego posee m soluciones:

$$z_k := \varphi^{-1}\left(e^{2\pi i k/m}\,(w - f(z_0))^{1/m}\right) \in V_r \quad \text{con } k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$$

donde $(w-f(z_0))^{1/m} \in D(0,r)$ es cualquiera de las raíces m-ésimas de $w-f(z_0)$. En el caso:

1. $\Rightarrow$ Todas las soluciones $z_0, \ldots, z_{m-1}$ son diferentes pues $w \neq f(z_0)$.
2. $\Rightarrow$ Todas las soluciones son iguales a $\varphi^{-1}(0) = z_0$ pues $w = f(z_0)$ y φ es un biholomorfismo. ■

Una consecuencia importante del análisis local de funciones holomorfas y de la Observación anterior es:

Teorema de la aplicación abierta: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ función holomorfa no-constante. Entonces, f es una función abierta, ie, para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq \Omega$ la imagen $f(\mathcal{U})$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

Dem: Todo punto $z_0 \in \mathcal{U}$ (regular o crítico) posee una vecindad abierta $V_{z_0} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $f(V_{z_0}) = D(f(z_0), r(z_0))$ es un disco abierto de centro $f(z_0)$ y radio $r_0 = r(z_0) > 0$.

$\Rightarrow f(\mathcal{U}) = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{U}} D(f(z_0), r(z_0))$ es un abierto ✓ ■

Obs: Lo anterior es falso para funciones reales (considerar eg. $\sin(x)$).

La principal aplicación del Teorema de la aplicación abierta es:

Teorema de Inversión Global: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ una función holomorfa inyectiva. Entonces:

1. $f(\Omega)$ es un abierto de $\mathbb{C}$.
2. $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.
3. $f : \Omega \xrightarrow{\sim} f(\Omega)$ es un biholomorfismo.

Dem: Como f es una función abierta, $f(\Omega) \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto. Así, $f : \Omega \to f(\Omega)$ es una biyección continua abierta (ie, un homeomorfismo). Si se tuviera que $f'(z_0) = 0$ para cierto $z_0 \in \Omega$, entonces

$$m = \min \{ n \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^{(n)}(z_0) \neq 0 \} \geq 2$$

y luego f no sería localmente inyectiva en una vecindad de z_0 $\lightning$

$\Rightarrow f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$ y luego el Teorema de inversión local implica que f^{-1} es holomorfa ✓ ■

Ejercicio Dar un contraejemplo de lo anterior en el caso de funciones reales.

§19. Principio del máximo y Lema de Schwarz

El principio del máximo es otra manifestación espectacular de la "rigidez" de las funciones holomorfas.

Teorema (Principio del máximo): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces:

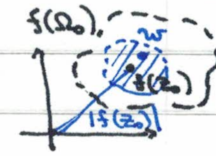
1. Si existe $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)| = \sup_{\Omega} |f|$, entonces f es constante en la componente conexa de Ω que contiene a z_0.
2. Para todo compacto $K \subseteq \Omega$ se tiene que:

$$\max_K |f| = \max_{\partial K} |f| .$$

y además: $\max_K \operatorname{Re}(f) = \max_{\partial K} \operatorname{Re}(f)$ y $\max_K \operatorname{Im}(f) = \max_{\partial K} \operatorname{Im}(f)$.

Dem: Para ①, supongamos f no-constante en la comp. conexa Ω_0 de Ω que contiene a z_0 y que $|f(z_0)| = \sup_{\Omega} |f| \overset{dy}{=} \sup_{\Omega_0} |f|$.

Como f es abierta en Ω_0, la imagen $f(\Omega_0)$ es una vecindad abierta de z_0 y luego $\exists\, r_0 \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $D(f(z_0, r_0)) \subseteq f(\Omega_0)$



$\Rightarrow \exists\, w = f(z) \in D(f(z_0), r_0)$ tal que $z \in \Omega_0$ y además:

$w \neq f(z_0)$ y además $|f(z_0)| < |w| \overset{dy}{=} |f(z)|$

una contradicción. ↳ sino: $f(\Omega_0) \subseteq \overline{D}(0, |f(z_0)|)$ ↯

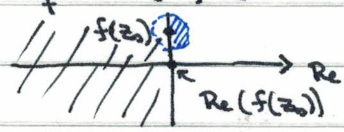
Veamos ② para $u := \mathrm{Re}(f)$ (la parte imaginaria es análoga):

Si tuviéramos que

$$\max_{\partial K} u < \max_{K} u \Rightarrow \exists\, z_0 \in \mathrm{int}(K) \overset{dy}{=} K \setminus \partial K \text{ tq } u(z_0) = \max_K u$$

Consideremos la componente conexa Ω_0 de z_0 en el abierto $\mathrm{int}(K)$ y veamos que f es constante en Ω_0 ($\Rightarrow u$ también):

En caso contrario, $f(\Omega_0)$ sería una vecindad abierta de $f(z_0)$ contenida en $\{ w \in \mathbb{C} \text{ tq } \mathrm{Re}(w) \leq \mathrm{Re}(f(z_0)) \overset{dy}{=} u(z_0) \}$



lo cual es imposible ↯

Así, f es constante en Ω_0 y luego $u|_{\partial\Omega_0} = u(z_0)$ por continuidad de $f = u + iv$. Finalmente, dado que

$$\emptyset \neq \partial\Omega_0 \subseteq \partial(\mathrm{int}\, K) \overset{dy}{=} \overline{\mathrm{int}\, K} \setminus \mathrm{int}\, K \subseteq \overline{K} \setminus \mathrm{int}\, K \overset{dy}{=} \partial K$$

tendríamos que $\max_K u = u(z_0)$ se alcanza también en ∂K ↯ ■

Ejercicio Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y sea $f \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ (i.e., $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$). Probar que si $|f|$ alcanza su mínimo en $\Omega \Rightarrow f$ constante.

Una aplicación del Principio del máximo es el "Lema de Schwarz", que nos da información cuantitativa sobre el módulo de una función holomorfa de la cual conocemos cotas globales y existencia de ciertos ceros:

Lema de Schwarz: Sea $f \in \mathcal{O}(D(z_0, R))$ para $R \in]0, +\infty[$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $\sup_{D(z_0,R)} |f| = M < +\infty$ y $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, entonces:

① $|f(z)| \leq M \left(\frac{|z - z_0|}{R} \right)^m$ para todo $z \in D(z_0, R)$.

② Si existe $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ tal que ① es una igualdad, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = M$ y tal que $f(z) = \lambda \left(\frac{z - z_0}{R} \right)^m$ para todo $z \in D(z_0, R)$.

Dem: Definamos $g(z) = f(z)/(z-z_0)^m$. Dado que f posee un cero de orden $n \geq m$ en z_0, existe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D}(z_0,R))$, $h(z_0) \neq 0$, y tal que $f(z) = (z-z_0)^n h(z)$ con $n \geq m$ $\Rightarrow$ g es holomorfa en $D(z_0,r)$ $\forall r<R$.
Al aplicar el principio del máximo a g en $\overline{D}(z_0,r)$ tenemos que:

$$\max_{\overline{D}(z_0,r)} |g| = \max_{\Gamma(z_0,r)} |g| \leq \frac{M}{r^m}$$

Haciendo $r \to R$, tenemos que $\sup_{D(z_0,R)} |g| \leq \frac{M}{R^m}$ y luego obtenemos ① ✓
Si hay igualdad en ①, entonces g alcanza su supremo en un punto de $D(z_0,r)$ y luego $g(z) \equiv \mu := \frac{\lambda}{R^m}$ es constante $\rightsquigarrow$ ② ✓ ∎

Ejercicio Sea $\mathbb{D} = \{|z|<1\}$ y $f: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa tal que $f(0)=0$. Probar que $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y que $|f'(0)| \leq 1$.

<u>Ejemplo importante</u> (Automorfismos del disco unitario $\mathbb{D}$):
Para todo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, definimos

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}(\Omega) &:= \{f: \Omega \to \Omega \text{ biholomorfismo}\} \\ &= \{f: \Omega \to \Omega \text{ holomorfa y biyectiva}\} \end{aligned}$$ (Teo. de Inversión Global)

Veamos que si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ entonces:

$$f(z) = \lambda \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) \quad \text{con } |\lambda| = 1 \text{ y } a \in \mathbb{D}.$$

(**Ejercicio** Verificar que $a = f^{-1}(0)$ y $\lambda = (1-|a|^2)^{-1} f'(0)$.)

Comencemos por convencernos que dichas f son automorfismos de $\mathbb{D}$:
Si $\lambda = 1$ y definimos $\varphi_a(z) := (z-a)/(1-\bar{a}z)$ para $z \in \mathbb{D}$, entonces $|1-\bar{a}z| \geq 1-|a||z| > 0$ pues $a, z \in \mathbb{D}$ y además:

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} \quad \leftarrow \text{Ejercicio}$$

$\Rightarrow \varphi_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Además, para $w \in \mathbb{D}$ tenemos que

$$w = \varphi_a(z) \iff w(1-\bar{a}z) = z-a \iff w+a = z(1+\bar{a}w) \overset{\text{def}}{\iff} z = \varphi_{-a}(w)$$

Así, $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$ y luego $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Ejercicio Probar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ actúa transitivamente en $\mathbb{D}$, i.e., para todos $a, b \in \mathbb{D}$, existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ tal que $f(a) = b$.
[Indicación: Considerar $f = \varphi_{-b} \circ \varphi_a$]

En el caso general en que $|\lambda| = 1$, ie, $\lambda = e^{i\theta}$ para $\theta \in \mathbb{R}$.
Por ejemplo, $h_\lambda(z) := \lambda z = e^{i\theta} z$ es la rotación en angulo θ
y luego $h_\lambda \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Así,

$$f(z) = h_\lambda \circ \varphi_a(z) = \lambda \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$$

Recíprocamente: si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ y escribimos $a := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$, entonces

$$g := f \circ \varphi_a^{-1} = f \circ \varphi_{-a} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \quad \text{y} \quad g(0) = f(a) = 0$$

Lema de Schwarz $\Rightarrow |g(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$.
Reemplazando g por $g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, obtenemos $|g^{-1}(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$
y luego $|z| = |g^{-1}(g(z))| \leq |g(z)| \Rightarrow |g(z)| = |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$
y luego el caso de igualdad en el Lema de Schwarz implica:
$g(z) = h_\lambda(z) = \lambda z$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$
$\Rightarrow f = g \circ \varphi_a = h_\lambda \circ \varphi_a$ y luego f es de la forma deseada!

<u>Corolario</u>: Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa arbitraria. Entonces, se verifica la desigualdad

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2} \quad \text{para todo } z \in \mathbb{D},$$

y la igualdad se alcanza si y sólo si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

<u>Dem</u>: Si, tal como en el Ejemplo anterior, consideramos

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \Rightarrow \varphi_a'(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$$

y luego $\varphi_a'(0) = 1 - |a|^2$ y $\varphi_a'(a) = 1/(1-|a|^2)$.
Si fijamos $z_0 \in \mathbb{D}$ y consideramos $g := \varphi_{f(z_0)} \circ f \circ \varphi_{-z_0}$, que cumple $g(0) = 0$ por construcción y además $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$
Lema de Schwarz $\Rightarrow |g(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$ y $|g'(0)| \leq 1$. Dado que:

$$g'(0) = \varphi'_{f(z_0)}(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \cdot \varphi'_{-z_0}(0) = \frac{1}{1-|f(z_0)|^2} \cdot f'(z_0) \cdot (1 - |z_0|^2)$$

y luego $|g'(0)| \leq 1$ equivale a la desigualdad deseada ✓
Si la igualdad $|g'(0)| = 1 \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} |g(z)/z| = 1$ se verifica, entonces $g(z)/z \equiv \lambda$ es constante, con $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$
$\Rightarrow g(z) = \lambda z$ es un automorfismo de $\mathbb{D} \Rightarrow f$ también ✓ ■

Ejercicio Sea $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (semi-plano de Poincaré).
Probar que $f : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto i\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$ está bien definida y es un biholomorfismo.

§20. Espacios de Fréchet y convergencia de funciones holomorfas

Sea $\Bbbk = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\Omega \subseteq \Bbbk$ no-vacío. Recordemos que una sucesión $\{f_n : \Omega \to \Bbbk\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones a valores en $\Bbbk$ converge uniformemente a $f : \Omega \to \Bbbk$ si:

Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y todo $x \in \Omega$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

No es difícil probar (usando la desigualdad triangular) que límite uniforme de funciones continuas es continua.

Sin embargo, la sucesión de funciones analíticas reales

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$$

converge uniformemente a $f \equiv 0$, pero $f_n'(x) = \cos(nx)$ no converge.

En esta sección, veremos que las funciones holomorfas se comportan mucho mejor al considerar convergencia uniforme sobre compactos de $\mathbb{C}$, lo cual nos servirá también como excusa para introducir algunas nociones que son utilizadas en Análisis Funcional.

Def: Sea $\Bbbk = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y V un $\Bbbk$-espacio vectorial. Decimos que una función $p : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ es una semi-norma si:

① $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ para todo $\lambda \in \Bbbk$ y todo $x \in V$.

② $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in V$.

Ejemplo principal: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $V := \mathcal{C}^0(\Omega)$ espacio vectorial de funciones continuas $f : \Omega \to \mathbb{C}$ a valores complejos.

Para todo compacto no-vacío $K \subseteq \Omega$, definimos la seminorma

$$p_K : \mathcal{C}^0(\Omega) \to \mathbb{R}^{\geq 0}, \quad f \mapsto p_K(f) := \sup_K |f|$$

Así, obtenemos una familia de semi-normas $\{p_K\}_{K\subseteq\Omega}$ indexada por todos los compactos $K \subseteq \Omega$. En particular, $f \equiv 0 \iff p_K(f) = 0 \ \forall K \subseteq \Omega$.

Recuerdo: Si X es un conjunto (no-vacío), una topología en X es una colección $\tau = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X tales que:

① $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

② Si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau$ entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \tau$

③ Si $\{\mathcal{U}_j\}_{j\in J} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j \in \tau$.

Los elementos de τ son llamados abiertos de X, y sus complementos cerrados.
Una función $f: X \to Y$ entre dos espacios topológicos es continua si $\forall\, V \subseteq Y$ abierto, la preimagen $f^{-1}(V) \subseteq X$ es abierto.

⚠ Esto generaliza en gran medida la discusión en §2 y §3.

Ejemplos:

① En $X = \mathbb{R}$, los abiertos son la unión (arbitraria) de intervalos abiertos.

② En $X = \mathbb{C}$, los abiertos son la unión (arbitraria) de discos abiertos.

③ En $X \times Y$ la topología producto se obtiene al declarar como abiertos los conjuntos de la forma $\mathcal{U} \times V$, con $\mathcal{U} \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos, y sus uniones arbitrarias.

Def: Sea $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y V un k-e.v. Decimos que V es un espacio vectorial topológico si:

① V es un espacio topológico.

② La suma $+: V \times V \to V$, $(x,y) \mapsto x+y$ es continua.

③ La mult. por escalares $\times : k \times V \to V$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ es continua.

Obs: Dado que la suma es continua, si $x \in V$ y $\mathcal{U} \subseteq V$ es un abierto tal que $x \in \mathcal{U}$, entonces existe $\mathcal{U}_0$ abierto tal que $0 \in \mathcal{U}_0$ y $\mathcal{U} = x + \mathcal{U}_0 \overset{\text{def}}{=} \{x+y,\ y \in \mathcal{U}_0\}$ ⇝ ¡Basta entender las vecindades del $0 \in V$!

Ejemplo principal: Sea $V := \mathcal{C}^0(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ continua}\}$, junto con la familia de semi-normas $\{p_K\}_{K \subseteq \Omega}$ (con $p_K(f) = \sup_K |f|$). Dotamos V de una estructura de espacio vectorial topológico declarando que las vecindades de $0 \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ son los conjuntos:

$$\mathcal{U}_{K,\varepsilon} := \{f \in \mathcal{C}^0(\Omega) \text{ tal que } p_K(f) < \varepsilon\} \quad \text{con } \varepsilon > 0 \text{ y } \underset{\text{compacto} \neq \emptyset}{K} \subseteq \Omega$$

(y sus uniones arbitrarias). Así, decimos que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}^0(\Omega)$ es abierto si $\forall f \in \mathcal{U}$, existe un $\mathcal{U}_{K,\varepsilon}$ tal que $f + \mathcal{U}_{K,\varepsilon} \subseteq \mathcal{U}$.

Terminología: La topología anterior definida en $\mathcal{C}^0(\Omega)$ se conoce como la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de Ω. Así, una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}^0(\Omega)$ converge a $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ si y sólo si $f_n \to f$ uniformemente sobre todo compacto $K \subseteq \Omega$ ($\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_K(f_n - f) = 0$ para todo $K \subseteq \Omega$ compacto).

Obs importantes:

① La discusión anterior para $\mathcal{C}^0(\Omega)$ se generaliza literalmente al caso de funciones holomorfas $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \mathcal{C}^0(\Omega)$. Así, $(\mathcal{O}(\Omega), \{p_K\}_{K\subseteq\Omega})$ es un sub-espacio vectorial topológico de $\mathcal{C}^0(\Omega)$.

② Los espacios vectoriales topológicos $\mathcal{C}^0(\Omega)$ y $\mathcal{O}(\Omega)$ son localmente convexos (ie, su topología puede definirse a partir de una familia, a priori arbitraria, de semi-normas).

③ Mejor aún, $\mathcal{C}^0(\Omega)$ y $\mathcal{O}(\Omega)$ son espacios vectoriales topológicos cuya topología está definida a partir de una familia numerable de semi-normas: Basta escribir $\Omega = \bigcup_{n\geq 0} K_n$ con $K_n \subseteq \mathrm{int}(K_{n+1})$ compactos, y considerar $\{p_{K_n}\}_{n\geq 0}$ familia numerable de semi-normas.

④ Como consecuencia de ③, $\mathcal{C}^0(\Omega)$ y $\mathcal{O}(\Omega)$ son metrizables, ie, su topología se define a partir de una métrica $d(x,y)$. Explícitamente:

$$d(x,y) := \sum_{n\geq 0} \frac{\min\{1, p_{K_n}(x-y)\}}{2^n} \qquad \forall x,y \in V = \mathcal{C}^0(\Omega) \text{ ó } \mathcal{O}(\Omega)$$

Def: Sea V un espacio vectorial topológico. Entonces:

① Una sucesión de Cauchy en V es una sucesión $\{x_n\}_{n\geq n_0} \subseteq V$ tal que para toda vecindad $\mathcal{U}$ de $0\in V$, existe $N\in\mathbb{N}^{\geq n_0}$ tal que $x_n - x_m \in \mathcal{U}$ para todos $n, m \geq N$.

② Decimos que V es completo si es metrizable y toda sucesión de Cauchy en V converge.

③ Un espacio de Fréchet es un espacio vectorial topológico localmente convexo, metrizable y completo.

Ejemplo:

① Todo sub-espacio vectorial topológico cerrado de un espacio de Fréchet es un espacio de Fréchet.

② Dado que $\mathbb{C}$ es completo, toda sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\geq n_0}$ en $(\mathcal{C}^0(\Omega), \{p_{K_n}\}_{n\geq 0})$ converge a una función $f\in\mathcal{C}^0(\Omega)$, ie, $(\mathcal{C}^0(\Omega), \{p_{K_n}\}_{n\geq 0})$ es un espacio de Fréchet.

Veamos ahora el caso de funciones holomorfas. En particular, el resultado siguiente justifica que la topología de la convergencia uniforme sobre compactos es la "buena" topología en nuestro contexto:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y sea $\{f_n\}_{n\geq n_0}$ una sucesión en $\mathcal{O}(\Omega)$. Supongamos que f_n converge a $f:\Omega\to\mathbb{C}$ uniformemente en todo compacto $K\subseteq\Omega$. Entonces:

1. $f\in\mathcal{O}(\Omega)$.
2. Para todo $m\geq 0$, la sucesión de derivadas $\{f_n^{(m)}\}_{n\geq n_0}$ converge a $f^{(m)}$ uniformemente en todo compacto $K\subseteq\Omega$.

Dem: Como f es límite uniforme de funciones continuas, $f\in\mathcal{C}^0(\Omega)$. Sea $K\subseteq\Omega$ compacto con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos, entonces:

$$\forall z\in \operatorname{int}(K),\quad f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f_n(w)}{w-z}\,dw \qquad (\text{Cauchy})$$

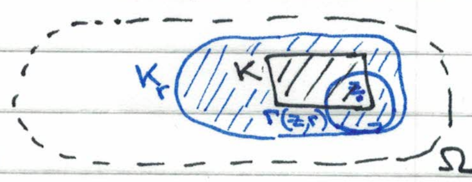
Dado que f_n converge uniformemente a f en el compacto ∂K, y dado que $|w-z|\geq\delta:=d(z,\mathbb{C}\setminus K)>0$, tomando límite obtenemos:

$$\forall z\in \operatorname{int}(K),\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$\Rightarrow f\in\mathcal{O}(\Omega)$ ✓ (cf. §13). Para ver ②, fijemos $r>0$ tal que $r<\delta_K$ suficientemente pequeño. Entonces, para todo $z\in\operatorname{int}(K)$ tenemos:

$$f_n^{(m)}(z)=\frac{m!}{2\pi i}\int_{\Gamma(z,r)}\frac{f_n(w)}{(w-z)^{m+1}}\,dw \quad \text{y} \quad f^{(m)}(z)=\frac{m!}{2\pi i}\int_{\Gamma(z,r)}\frac{f(w)}{(w-z)^{m+1}}\,dw$$

$$\Rightarrow |f_n^{(m)}(z)-f^{(m)}(z)|\leq\frac{m!}{r^m}\sup_{\Gamma(z,r)}|f_n-f| \qquad (*)$$



Sea $K_r:=\{z\in\Omega \text{ tq } d(z,K)\leq r\}$ compacto contenido en Ω (pues $r<\delta_K\overset{\text{def}}{=}d(K,\mathbb{C}\setminus\Omega)$ ✓)

$$\Rightarrow \sup_K|f_n^{(m)}-f^{(m)}|\overset{(*)}{\leq}\frac{m!}{r^m}\sup_{K_r}|f_n-f|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,\ \text{i.e., ② ✓} \quad \blacksquare$$

Corolario: Sea $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ abierto no-vacío. Entonces, el espacio vectorial $\mathcal{O}(\Omega)$ es un sub-espacio cerrado del espacio de Fréchet $(\mathcal{C}^0(\Omega),\{p_K\}_{K\subseteq\Omega})$. En particular, $(\mathcal{O}(\Omega),\{p_K\}_{K\subseteq\Omega})$ es un espacio de Fréchet.

Dem: Simplemente una reformulación del resultado anterior ✓ $\blacksquare$

Ejercicio útil Sea $\sum f_n$ una serie de funciones holomorfas, con $f_n\in\mathcal{O}(\Omega)$. Si $\sum f_n$ converge uniformemente en todo compacto de Ω a $F=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$, probar que:

1. $F\in\mathcal{O}(\Omega)$.
2. Para todo $m\in\mathbb{N}$, se tiene que $F^{(m)}=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n^{(m)}$.

§21. Derivación bajo el signo integral y Función Γ de Euler

En esta sección estudiaremos funciones holomorfas definidas a partir de integrales, siendo el caso más emblemático la función Γ de Euler.

Teorema: Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$, y $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío. Sea
$$F : \Omega \times [a,b] \to \mathbb{C}, \quad (z,t) \mapsto F(z,t)$$
tal que:

① $F(z,t_0)$ es holomorfa para todo $t_0 \in [a,b]$ fijo.

② F es continua en $\Omega \times [a,b]$.

Entonces, la función
$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) := \int_a^b F(z,t)\,dt$$
es holomorfa en Ω, y para todo $m \geq 0$ se tiene que
$$f^{(m)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^m}{\partial z^m} F(z,t)\,dt \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Dem: Un cambio de variable lineal nos permite asumir $a=0$ y $b=1$.
Veamos que f es límite uniforme de sumas de Riemann:
Para cada $m \geq 1$, consideremos la suma de Riemann
$$f_m(z) := \sum_{i=1}^{n} F(z,t_i)\,\Delta t_i := \sum_{j=1}^{n} F\left(z,\frac{j}{m}\right)\cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F\left(z,\frac{j}{n}\right)$$

$\overset{①}{\Rightarrow} f_m \in \mathcal{O}(\Omega)$ ✓ Veamos que $\{f_m\}_{m\geq 1}$ converge uniformemente a f en todo compacto $K \subseteq \Omega$: Para esto, recordemos que una función continua en un compacto es uniformemente continua (Teorema de Heine-Cantor):
Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sup_K |F(z,t_1) - F(z,t_2)| < \varepsilon$ siempre que $|t_1 - t_2| < \delta$.
Así, si $m > 1/\delta$ y $z \in K$, tenemos que:
$$|f_m(z) - f(z)| \overset{\text{dy}}{=} \left| \sum_{j=1}^{m} \int_{(j-1)/m}^{j/m} F(z,j/m) - F(z,t)\,dt \right|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{m} \int_{(j-1)/m}^{j/m} |F(z,j/m) - F(z,t)|\,dt$$
$$< \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon \quad ✓$$
Así, $f_m \xrightarrow{\text{unif}} f$ en todo compacto $K \subseteq \Omega$, de donde deducimos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y la fórmula para $f^{(m)}$ (cf. Ejercicio útil en §20, p. 52) ■

Obs: Usando herramientas de "Teoría de la medida e Integración" se pueden dar pruebas alternativas y versiones mejoradas del resultado anterior.

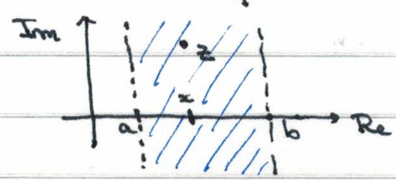
Veamos una aplicación importante de lo anterior a la función Γ de Euler:

Def: La función Γ de Euler está definida mediante la fórmula
$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$
donde $t^{z-1} \overset{\text{def}}{=} \exp((z-1)\ln(t))$.

Prop: La función Γ es holomorfa en el abierto $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } Re(z) > 0\}$.

Dem: Notar que si $z = x \in \mathbb{R}$ es real, entonces $\Gamma(x)$ converge $\forall x > 0$.
En efecto, $\left|\int_0^{\varepsilon} t^{x-1} e^{-t}\, dt\right| \leq C \int_0^{\varepsilon} t^{x-1}\, dt = C\frac{\varepsilon^x}{x} < +\infty$ cerca de $t=0$
Además, $\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt\right| \leq C' \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{t/2} \cdot e^{-t}\, dt = 2C' e^{-\varepsilon/2} < +\infty$ ✓

Sea $z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) := x > 0$, y consideremos $a := x/2$ y $b := 2x$.
Consideremos $\Omega_{a,b} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } a < Re(z) < b\}$



y veamos que Γ es holomorfa en $\Omega_{a,b}$. Para ello, consideremos
$\varepsilon_n := 1/n \in]0,1[$ $(n \geq 2)$ y definamos
$$f_n(z) := \int_{\varepsilon_n}^{1/\varepsilon_n} e^{-t} t^{z-1}\, dt \overset{\text{def}}{=} \int_{1/n}^{n} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Dado que $F(z,t) := t^{z-1} e^{-t}$ es continua en $\Omega_{a,b} \times [1/n, n]$
y $F(z,t_0) \in \mathcal{O}(\Omega_{a,b})$ para todo $t_0 \in [1/n, n]$ fijo, el Teorema anterior asegura que $f_n \in \mathcal{O}(\Omega_{a,b})$ para todo n ✓
Veamos que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} \Gamma$ en $\overline{\Omega_{a,b}}$ cuando $n \to +\infty$. Para esto:
$$|\Gamma(z) - f_n(z)| \leq \left|\int_0^{\varepsilon_n} t^{z-1} e^{-t}\, dt\right| + \left|\int_{\varepsilon_n^{-1}}^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt\right|$$
$$\leq \int_0^{\varepsilon_n} |t^{z-1}| e^{-t}\, dt + \int_{\varepsilon_n^{-1}}^{+\infty} |t^{z-1}| e^{-t}\, dt$$

$|a^b| = a^{Re(b)}$ para $a \in \mathbb{R}^{>0}$, $b \in \mathbb{C}$

$$= \int_0^{\varepsilon_n} t^{x-1} e^{-t}\, dt + \int_{\varepsilon_n^{-1}}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$
$$\leq \underbrace{C\frac{\varepsilon_n^x}{x}}_{\leq_{a\leq x} C\frac{\varepsilon_n^x}{a} \leq_{\varepsilon<1} C\frac{\varepsilon_n^a}{a} \longrightarrow 0 \text{ si } n\to+\infty} + \underbrace{2C' e^{-1/2\varepsilon_n}}_{\longrightarrow 0 \text{ si } n \to +\infty}$$

Luego Γ es holomorfa en $\Omega_{a,b}$, al ser límite uniforme de funciones holomorfas $\Rightarrow \Gamma$ holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } Re(z) > 0\}$ ∎

Lema: Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 0$ se tiene que
$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$
En particular, $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dem: Integrando por partes, tenemos que
$$\Gamma(z+1) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+,\, R \to +\infty} \int_\varepsilon^R t^z e^{-t}\, dt$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+,\, R \to +\infty} \left(\left[t^z(-e^{-t}) \right]_{t=\varepsilon}^{t=R} + \int_\varepsilon^R z t^{z-1} e^{-t}\, dt \right)$$
$$= z\,\Gamma(z) \checkmark$$
Además, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = 1 = 0!$ y luego se deduce que $\Gamma(n+1) = n!$ por inducción ✓ ■

Prop: La función Γ de Euler admite una extensión analítica a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^{\leq 0}$, que seguiremos denotando Γ.

Dem: Si $z \in \mathbb{C}$ verifica $\mathrm{Re}(z) > -(n+1)$ para $n \in \mathbb{N}$, definimos
$$\tilde{\Gamma}(z) := \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)(z+n)} \quad \text{para } z \notin \mathbb{Z}^{\leq 0}$$
Dicha función es holomorfa, y verifica $\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$ si $\mathrm{Re}(z) > 0$ gracias al lema anterior ✓ ■

Obs: La fórmula anterior, y el hecho que $\Gamma(1) = 1$, implica que $\lim_{z \to -n} |\Gamma(z)| = +\infty$. En part, no podemos extender Γ a $\mathbb{Z}^{\leq 0}$.

Ejercicio Calcular para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{z \to -n} (z+n)\Gamma(z)$.

Para concluir, estudiemos una variante importante de la función Γ: la función Beta (nombrada y estudiada por Euler y Legendre, en honor a Jacques Binet).

Def: Sean $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$. La función Beta es la función en 2 variables
$$B(x,y) := \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$
En particular, $B(x,y) = B(y,x)$.

Ejercicio Probar, usando que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, que para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$

① $B(x,y) = B(x+1,y) + B(x,y+1)$.

② $B(x,y+1) = \frac{y}{x} B(x+1,y) = \frac{y}{x+y} B(x,y)$.

Prop: Para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$, tenemos que
$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, dt$$

Dem: Tenemos que $\Gamma(x)\Gamma(y) = \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty} s^{y-1} e^{-s}\, ds\right)$
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)}\, dt\, ds$$

Para calcular $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(t+s)}\, dt$ consideramos $t = su$ ($\Rightarrow dt = s\, du$)

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(t+s)}\, dt = s^x \int_0^{+\infty} e^{-(u+1)s} u^{x-1}\, du$ $\quad (*)$

Notando que $\forall \lambda > 0$ tenemos que
$$\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-\lambda t}\, dt \underset{u=\lambda t}{=} \frac{\Gamma(z)}{\lambda^z} \quad (**)$$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(t+s)}\, dt\right) s^{y-1}\, ds \overset{(*)}{=} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(u+1)s} s^{x+y-1}\, ds\right) u^{x-1}\, du$

$\underset{\substack{z=x+y\\ \lambda=u+1}}{\overset{(**)}{=}} \int_0^{+\infty} \frac{\Gamma(x+y)}{(u+1)^{x+y}} u^{x-1}\, du$

Finalmente, $B(x,y) \overset{\text{dy}}{=} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du$ ✓ ■

Ejercicio útil Probar que para todos $x, y \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene:

① $B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}(\theta) \sin^{2y-1}(\theta)\, d\theta$ [Indicación: $t = \tan^2\theta$]

② $B(x,y) = \int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}\, dw$ [Indicación: $w = \sin^2\theta$].

Ejemplo: Sea $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \overset{t=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2}\, dt \overset{\text{dy}}{=} \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Por otro lado, $B(1/2, 1/2) = \Gamma(1/2)^2/\Gamma(1) = \Gamma(1/2)^2$.

Finalmente, $B(1/2,1/2) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2\cdot 1/2 - 1}(\theta) \sin^{2\cdot 1/2 - 1}(\theta)\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$

$\Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y así $I = \sqrt{\pi}/2$.

Ejercicio Calcular las siguientes integrales:

① $\int_0^{2\pi} \sin^4(\theta)\, d\theta$

② $\int_1^3 (x-1)^{10}(x-3)^3\, dx$

Obs: Las funciones Γ y B son muy usadas en Probabilidad y Estadística!

§22. Productos infinitos de funciones holomorfas

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y $\{f_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathcal{O}(\Omega)$ sucesión de funciones holomorfas en Ω. Denotamos por $u_m := \prod_{n=0}^{m} f_n = f_0 \cdots f_m$ a la sucesión de productos parciales.

Decimos que el producto infinito $\prod f_n$ converge (resp. converge uniformemente) si la sucesión $\{u_m\}_{m\geq 0}$ converge (resp. converge uniformemente), y denotamos el límite por

$$P(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} f_n(z).$$

Obs: Si existe $C \in \mathbb{R}^{>0}$ con $C<1$ tal que $|f_n(z)| < C$ $\forall z \in \Omega$ y $\forall n \geq n_0$, entonces $\prod f_n \xrightarrow{\text{unif.}} 0$ (pues $C^n \longrightarrow 0$). De manera similar, si $C > 1$ entonces $\prod f_n$ no converge si $|f_n(z)| > C$ $\forall z \in \Omega$.

Convención: Consideraremos productos infinitos donde $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} 1$ uniformemente en todo compacto $K \subseteq \Omega$.

⚠ En particular, la rama principal del logaritmo $\ln(f_n)$ está bien definida en K para $n \geq n_0(K)$. Así, omitiendo finitos términos si fuese necesario, tenemos que:

$$\prod f_n \text{ converge en } \Omega \iff \sum \ln(f_n) \text{ converge en } \Omega.$$

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo no-vacío, y $\prod f_n$ producto de funciones holomorfas en Ω con $f_n \not\equiv 0$ en Ω. Sea $f_n := 1 + g_n$. Si:

① $\sum |g_n|$ converge uniformemente en todo $K \subseteq \Omega$ compacto; o bien

② $\sum g_n$ y $\sum |g_n|^2$ convergen unif. en todo $K \subseteq \Omega$ compacto.

Entonces,

$$\prod f_n \longrightarrow P := \prod_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ uniformemente en todo } K \subseteq \Omega \text{ compacto},$$

donde $P \in \mathcal{O}(\Omega)$, $P \not\equiv 0$, y además

"derivada logarítmica" $\rightarrow$ $$\frac{P'}{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n'}{f_n} \quad \text{en } \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1}(0) \right),$$

donde esta última serie converge uniformemente en todo $K \subseteq \Omega$ compacto (omitiendo los finitos términos que se anulan en K si fuese necesario).

Dem: Sea $K \subseteq \Omega$ compacto. Tanto en ① como en ②, $\exists n_0$ tq para todo $n \geq n_0$ se tiene $\sup_K |g_n| \leq 1/2 \Rightarrow f_n = 1 + g_n$ no se anula en K $\forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}(f_n) = \operatorname{Ln}(1+g_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{g_n^k}{k}$$

Caso ①: sea $C \in \mathbb{R}^{>0}$ tq para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \leq 1/2$ se tenga que $|\operatorname{Ln}(1+w)| \leq C|w|$. Luego, para $p, q \geq n_0$ se tiene:

$$\left|\sum_{n=p}^{q} \operatorname{Ln}(f_n)\right| = \left|\sum_{n=p}^{q} \operatorname{Ln}(1+g_n)\right| \leq C \sum_{n=p}^{q} |g_n| < \varepsilon \quad \forall p, q \geq {}^{\exists}N$$

$\Rightarrow v_n := \sum_{k=n_0}^{n} \operatorname{Ln}(f_k)$ converge uniformemente en K a $v = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \operatorname{Ln}(f_k) \in \mathcal{O}(K)$

Luego, $u_n = \prod_{k=n_0}^{n} f_k \overset{\text{dy}}{=} \exp(v_n)$ converge uniformemente a la función holomorfa $\exp(v)$, ie, $\prod f_n$ converge uniformemente a la función holomorfa $P := \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k\right) \cdot \exp(v)$ en todo compacto de Ω ✓

Caso ②: sea $C' \in \mathbb{R}^{>0}$ tq para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \leq 1/2$ se tenga que $|\operatorname{Ln}(1+w) - w| \leq C'|w|^2$. Luego, para $p, q \geq n_0$ se tiene:

$$\left|\sum_{n=p}^{q} \operatorname{Ln}(f_n) - \sum_{n=p}^{q} g_n\right| = \left|\sum_{n=p}^{q} (\operatorname{Ln}(1+g_n) - g_n)\right| \leq C' \sum_{n=p}^{q} |g_n|^2 < \varepsilon \quad \forall p, q \geq {}^{\exists}N$$

$\Rightarrow v_n = \sum_{k=n_0}^{n} \operatorname{Ln}(f_n)$ converge uniformemente en K a $v = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \operatorname{Ln}(f_k) \in \mathcal{O}(K)$, y tal como antes deducimos que $\prod f_n \xrightarrow[K]{\text{unif}} P = \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k\right) \cdot \exp(v)$ en todo compacto $K \subseteq \Omega$ ✓

En ambos casos, si $P = \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} f_k\right) \cdot \exp(v)$, la derivada logarítmica de P se define mediante P'/P, donde:

$$\frac{P'}{P} \underset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{f_k'}{f_k} + v' \quad \text{con} \quad v' \overset{\text{dy}}{=} \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\operatorname{Ln}(f_k))' = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{f_k'}{f_k}$$

$$\Rightarrow \frac{P'}{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_k'}{f_k} \quad ✓ \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de la demostración anterior tenemos que:

Corolario: Con las hipótesis anteriores, el conjunto de ceros del producto infinito $P(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ está dado por $\bigcup_{n \geq 0} f_n^{-1}(0)$. En particular, $P \equiv 0$ en Ω si y sólo si alguno de sus factores f_n es nulo en Ω.

Ejercicio Considere el producto infinito $P(z) := \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + z^{2^n})$.

① Determinar su radio de convergencia $R \in [0, +\infty]$.

② Probar que $P(z) = \dfrac{1}{1-z}$ para todo $z \in D(0,R)$.

Ejemplo importante (Euler, 1735): Veamos que para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$\sin(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Sea $P(z) := z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) = z \prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$, con $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}$ y con $g_n(z) := -\frac{z^2}{n^2\pi^2}$. Dado que $\sum |g_n|$ converge uniformemente en todo $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, tenemos que $P \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es una función entera.

Además, los ceros de P están dados por

$$V(P) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } P(z) = 0\} = \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

y son todos de multiplicidad 1.

$\Rightarrow g(z) := P(z)/\sin(z) \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C})$ función entera sin ceros.

Más aún, el Teorema anterior implica que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{n^2\pi^2 - z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right)$$

i.e., $P'/P = \lim_{N \to +\infty} S_N$ con $S_N(z) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z - n\pi}$ (función impar !)

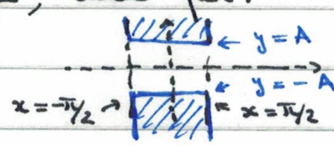
En particular, P'/P es una función π-periódica y luego:

(*) $\dfrac{g'(z)}{g(z)} = \dfrac{P'(z)}{P(z)} - \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)} = \dfrac{P'(z)}{P(z)} - \operatorname{cotg}(z)$ es entera y π-periódica.
← (función impar !)

Veamos que g es constante:

Consideremos el cerrado $\Omega_A \subseteq \mathbb{C}$, con $A \in \mathbb{R}^{>0}$ fija, dado por:

$$\Omega_A := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ tq } |x| \leq \pi/2,\ |y| \geq A\}$$



Ejercicio Probar que para todo $z = x + iy \in \Omega_A$ se tiene:

① $|\operatorname{cotg}(z)|^2 \leq \coth^2(y) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\cosh^2(y)}{\sinh^2(y)}$ y luego $|\operatorname{cotg}(z)| \leq C_1 := \coth(A)$.

② $|1/z| \leq 1/A$ y $|2z/(n^2\pi^2 - z^2)| \leq \dfrac{8|z|}{n^2\pi^2}$

Así, $\exists\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ tq $\left|\dfrac{g'(z)}{g(z)}\right| \leq C_1 + C_2|z| \quad \forall z \in \Omega_A$ ✓ Dado que $g'(z)/g(z)$ es entera, y $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ tq } |x| \leq \pi/2, |y| \leq A\}$ compacto, podemos asumir (modificando C_1, C_2 si fuera necesario) que:

(**) $|g'(z)/g(z)| \leq C_1 + C_2|z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$ con $|\mathrm{Re}(z)| \leq \pi/2$.

Dado que $g'(z)/g(z)$ es π-periódica (por (*)): $|g'(z)/g(z)| \leq C_1 + C_2|z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

luego, la desigualdad de Cauchy (ver §14, p. 36) implica que $g'(z)/g(z)$ es un polinomio de grado ≤ 1, π-periódico ($\Rightarrow$ constante), impar !

i.e., $g'(z) \equiv 0$ en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $g(z)$ es una función constante.

Dado que $\lim_{z \to 0} g(z) = \lim_{z \to 0} \left(\prod_{n=1}^{+\infty} f_n(z)\right) / (\sin(z)/z) = 1$, $g(z) \equiv 1$ en $\mathbb{C}$.

Así, deducimos que

$$\sin(z) = z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

Más aún, la derivada logarítmica de lo anterior implica:

$$\operatorname{ctg}(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{n^2\pi^2-z^2} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{z+n\pi}\right) \quad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$$

Derivando esto último, obtenemos que:

$$\frac{1}{\sin^2(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2} \quad \text{para todo } z\in\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}.$$

<u>Consecuencia</u> (Solución al Problema de Basilea): Sea

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$$

La última identidad de Euler, evaluada en $z=\pi/2$, implica que

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-n\pi)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \text{ Luego:}$$

$$S \overset{\text{def}}{=} \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^2} \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}S+\frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow S = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} \quad \blacksquare$$

{Cultura general} En general, se puede probar que para todo $n\in\mathbb{N}^{\geq 1}$:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2\cdot(2n)!}$$

donde $\zeta(z) := \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^z}$ es la <u>función zeta de Riemann</u> y donde los $B_{2n}\in\mathbb{Q}$ son los <u>números de Bernoulli</u>. Los valores $\zeta(2n+1)$ son mucho más misteriosos!.

Ejercicio

1. Probar que $\sinh(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2}\right)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

2. Deducir que $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$

Ejercicio Probar la <u>fórmula de Wallis</u>

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}\cdots$$

<u>Obs</u>: Esto permite calcular $\operatorname{vol}_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{B}^m) = \begin{cases}\pi^n/n! & \text{si } m=2n\\ \dfrac{2^{n+1}\pi^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} & \text{si } m=2n+1\end{cases}$, donde $\mathbb{B}^m = \{x\in\mathbb{R}^m \text{ tq } \|x\|_{\text{eucl}}\leq 1\}$.

En general, es un problema difícil entender el comportamiento de una función holomorfa cerca del borde de su dominio. Sin embargo, si nos restringimos a ciertos puntos del borde que sean aislados, es posible extender muchos resultados de la Parte I del curso.

§23. Series de Laurent

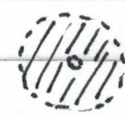
Def: Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y sean $R_1, R_2 \in [0, +\infty]$ tales que $R_1 < R_2$. Definimos el anillo abierto de centro z_0, de radio interior R_1, y de radio exterior R_2 mediante:

$$A(z_0; R_1, R_2) := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } R_1 < |z - z_0| < R_2 \}.$$

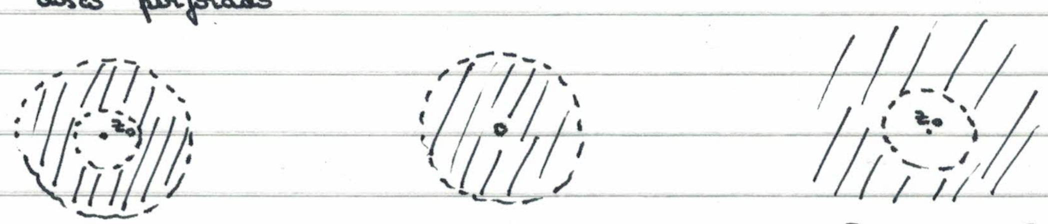
Del mismo modo, el anillo cerrado se define mediante

$$\overline{A}(z_0; R_1, R_2) := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2 \}.$$

⚠ **Notación:** $\mathbb{D}^* := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } 0 < |z| < 1 \} \overset{\text{def}}{=} A(0; 0, 1)$ es el "disco perforado"



Ejemplos:



$0 < R_1 < R_2 < +\infty$ $\qquad$ $R_1 = 0,\ R_2 < +\infty$ $\qquad$ $R_1 < +\infty,\ R_2 = +\infty$

Def: Una serie de Laurent (centrada en $z_0 = 0$) es una serie de la forma

$$S(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ y donde $z \in \mathbb{C}^* \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Obs: Podemos escribir una serie de Laurent como suma de dos series de potencias al escribir $m = -n$ y $w = 1/z$ si $n < 0$:

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{m \geq 1} a_{-m} w^m$$

Por definición, diremos que la serie de Laurent $S(z)$ converge si las dos series de potencias anteriores convergen.

Explícitamente, si $R \in [0,+\infty]$ es el radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $R' \in [0,+\infty]$ es el radio de convergencia de $\sum_{m\geq 1} a_{-m} w^m$, entonces:

$S(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $1/R' < |z| < R$

i.e., $S(z)$ converge en el anillo abierto $A(0; 1/R', R)$ (el cual es vacío si $1/R' \geq R$, i.e., $R' \leq 1/R$).

Más aún, la teoría de series de potencias (ver §5) implica que $S(z)$ converge uniformemente en todo anillo <u>compacto</u> $\overline{A}(0; r_1, r_2) \subseteq A(0; 1/R', R)$.

Además, dado que

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathcal{O}(D(0,R)) \quad \text{y} \quad G(w) = \sum_{m\geq 1} a_{-m} w^m \in \mathcal{O}(D(0,R'))$$

tenemos que $S(z)$ es holomorfa en $A(0; 1/R', R)$ y se calcula que

$$S'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n z^{n-1}$$

con convergencia uniforme en todo anillo compacto $\overline{A}(0; r_1, r_2) \subseteq A(0; 1/R', R)$.

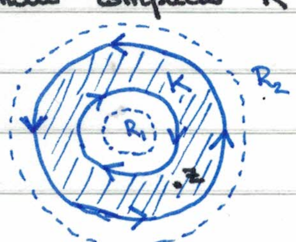
<u>Teorema</u>: Sea f una función holomorfa en el anillo abierto $A(z_0; R_1, R_2) \subseteq \mathbb{C}$ con $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$. Entonces, f admite un desarrollo en serie de Laurent (centrada en z_0) de la forma

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

con convergencia normal en todo compacto $K \subseteq A(z_0; R_1, R_2)$. Más aún, para todo $r \in]R_1, R_2[$ y todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-nit}\, dt$$

<u>Dem</u>: Reemplazando z por $z - z_0$, podemos asumir $z_0 = 0$. Consideremos un anillo compacto $K = \overline{A}(0; r_1, r_2) \subseteq A(0; R_1, R_2)$ con $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$



Aquí, $\partial K = \Gamma^-(0,r_1) \cup \Gamma(0,r_2)$ donde

$\Gamma^-(0,r_1)$: orientación horaria (i.e., negativa)

$\Gamma(0,r_2)$: orientación anti-horaria (i.e., positiva)

Luego, la fórmula de Cauchy implica que para todo $z \in A(0; r_1, r_2)$ se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Si $w \in \Gamma(0,r_2)$, entonces $|z| < r_2 = |w|$ (i.e., $|z/w| < 1$) y luego

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\cdot\frac{1}{(1-z/w)} = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{w^{n+1}}$$

De manera similar, si $w \in \Gamma(0,r_1)$ entonces $|z| > r_1 = |w|$ (i.e., $|w/z| < 1$) y así:

$$\frac{1}{w-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-w/z)} = -\frac{1}{z}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^m = -\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{w^m}{z^{m+1}}$$

Así, tenemos que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_2)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw\right)z^n + \sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_1)} f(w)\,w^m\,dw\right)z^{-m-1}.$$

Si escribimos $n := -m-1 \leq -1$ (ie, $m := -n-1$), entonces $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ con:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_2)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw \text{ si } n\geq 0, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(0,r_1)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw \text{ si } n\leq -1$$

Veamos que la integral $\int_{\Gamma(0,r)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\,dw$ no depende de $r \in \,]R_1,R_2[$:

La fórmula de Cauchy aplicada a la función holomorfa $g(w) := f(w)/w^{n+1}$ y al compacto $K = \bar{A}(0;r_1,r_2) \subseteq A(0;R_1,R_2)$ implica que:

$$0 = \int_{\partial K} g(w)\,dw \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma(0,r_2)} g(w)\,dw - \int_{\Gamma(0,r_1)} g(w)\,dw$$

para todos $r_1 < r_2$ en el intervalo $]R_1,R_2[$ ✓ ■

Ejemplo: La función $f(z) = \exp(1/z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}^*$. Además, su serie de Laurent (centrada en $z_0 = 0$) está dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^n}$$

En particular, la "parte negativa" es infinita.

§24. Singularidades aisladas y Teorema de Casorati-Weierstrass

Def: Sea Ω una vecindad abierta de un punto $z_0\in\Omega$, y sea $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z_0\})$. Decimos que z_0 es:

1. Una singularidad removible (o reparable) de f si f posee una extensión holomorfa $\tilde{f}\in\mathcal{O}(\Omega)$ (ie, $f(z) = \tilde{f}(z)\ \forall z\in\Omega\setminus\{z_0\}$).
2. Una singularidad no-removible de f (o simplemente una singularidad) si f no puede ser extendida a $\tilde{f}\in\mathcal{O}(\Omega)$.

Prop: Una función $f\in\mathcal{O}(\Omega\setminus\{z_0\})$ posee una singularidad removible en z_0 si y sólo si los coeficientes a_n de su serie de Laurent centrada en z_0

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

verifican que $a_n = 0$ para todo $n < 0$.

Dem: Podemos suponer que $\Omega = D(z_0, \varepsilon)$ es un disco pequeño
$\Rightarrow \Omega \setminus \{z_0\} = \{ z \in \mathbb{C}$ tq $0 < |z - z_0| < \varepsilon \}$ disco perforado.
Luego, f posee un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

con radio de convergencia $R \geq \varepsilon$ para la parte positiva $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ y con radio de convergencia $R' = +\infty$ para la parte negativa $\sum_{m \geq 1} a_{-m} w^m$.
Si f puede extenderse en una función holomorfa $\tilde{f}$ en el disco $D(z_0, \varepsilon)$, obtenemos un desarrollo en serie de potencias

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n \quad \text{en } D(z_0, \varepsilon).$$

La unicidad de los coeficientes de la serie de Laurent implica entonces que $a_n = b_n \ \forall n \geq 0$ y que $a_n = 0 \ \forall n < 0$. ■

Ejercicio Determinar si las funciones $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$ y $g(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^2}$ poseen singularidades removibles en $z_0 = 0$.

Corolario: Una función $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ posee una singularidad removible en z_0 si y sólo si f es acotada en una vecindad de z_0.

Dem: Si f se extiende holomorficamente en z_0, entonces dicha extensión es continua y por ende acotada en una vecindad de z_0 ✓
Recíprocamente, si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$ entonces escogiendo $r < \delta$ y usando el hecho que el coeficiente a_n de la serie de Laurent de f está dado por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-nit} \, dt,$$

deducimos que $|a_n| \leq M r^{-n}$, y luego $a_n = 0 \ \forall n < 0$ al considerar el límite $r \to 0$ ■

Observación/Definición importante: Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ con serie de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$. Si z_0 es una singularidad no-removible entonces la parte negativa $\sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n$ no es idénticamente nula.
Hay dos posibilidades a considerar:

① **Polos:** Si la parte negativa es una suma finita, y denotamos por $m := \max\{ |n| \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $a_n \neq 0$ con $n < 0 \}$ entonces:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \text{ con } a_{-m} \neq 0 .$$

Decimos entonces que f posee un polo de orden m en z_0, y que

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

es la "parte polar" de f. En particular, tenemos que:

i) $a_{-m} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z)$

ii) $\exists \, C \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $|f(z)| \leq \dfrac{C}{|z-z_0|^m}$ en una vecindad de z_0.

iii) $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ donde $g(z) := a_{-m} + a_{1-m}(z-z_0) + \dots + a_n (z-z_0)^{n+m} + \dots = \sum_{n \geq 0} a_{n-m} (z-z_0)^n$

función holomorfa en Ω verificando $g(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} a_{-m} \neq 0$.

② **Singularidad esencial**: Si la parte negativa $\sum_{n<0} a_n (z-z_0)^n$ es una serie infinita, decimos entonces que f posee una singularidad esencial en z_0. En tal caso, la función

$$g_m(z) := (z-z_0)^m f(z)$$

no es acotada en una vecindad de z_0 para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

En resumen: Si Ω es una vecindad abierta de $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ entonces:

① z_0 es una singularidad removible de f ; o bien

② z_0 es un polo de orden $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ de f; o bien

③ z_0 es una singularidad esencial de f.

Ejemplos:

① La función $f(z) = \exp(1/z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ posee una singularidad esencial en $z_0 = 0$.

② La función $f(z) = (z^2 - 2z + 3)/(z-2)$ verifica que

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z-2} = \frac{z(z-2)+3}{z-2} = z + \frac{3}{z-2} = 2 + (z-2) + \frac{3}{(z-2)}$$

y luego f posee un polo de orden 1 en $z_0 = 2$.

③ La función $f(z) = (1-\cos(z))/z^2 = \frac{1}{z^2}\left(1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)\right)$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \dots$$

posee una singularidad removible en $z_0 = 0$.

Terminología: Típicamente, se dice que un polo de orden $m=1$ (resp. $m=2$, resp. $m=3$, etc) es un polo simple (resp. polo doble, resp. polo triple, etc).

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean $p, q \in \mathbb{C}[z]$ polinomios, donde $q \neq 0$, y sea $f(z) = p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z)$ función racional. Probar (eg. usando fracciones parciales) que f posee "a lo más polos" como singularidades, ie, posee singularidades removibles o polos.

El resultado siguiente nos da una dicotomía que nos permite distinguir entre polos y singularidades esenciales.

Teorema (Casorati 1868, Weierstrass 1876): Sea $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que z_0 es una singularidad no-removible.
1. Si z_0 es un polo, entonces $|f(z)| \to +\infty$ cuando $z \to z_0$.
2. Si z_0 es una singularidad esencial, entonces todo punto de $\mathbb{C}$ es un punto de adherencia de $f(z)$ cuando $z \to z_0$, ie, $\overline{f(W \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}$ para toda vecindad abierta W de z_0.

Dem: El punto 1 se obtiene del hecho que $f(z) = g(z)/(z-z_0)^m$ con $m \geq 1$ y $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ con $g(z_0) \neq 0$ ✓

Para 2, supongamos por contradicción que existe un abierto convexo $W \subseteq \Omega$ tal que $z_0 \in W$ y $\overline{f(W \setminus \{z_0\})} \neq \mathbb{C}$. Luego, si $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(W \setminus \{z_0\})}$ entonces tendríamos que $|f(z) - a| \geq \varepsilon$ para todo $z \in W \setminus \{z_0\}$.

$\Rightarrow g(z) := 1/(f(z)-a)$ cumple que $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$ para todo $z \in W \setminus \{z_0\}$ y, al ser acotada, tendríamos que g se extiende en una función holomorfa no-nula $\tilde{g} \in \mathcal{O}(W)$.

Como $f(z) = a + 1/g(z)$, se tiene que si g posee un cero de orden m en z_0 entonces f posee un polo de orden m en z_0, ie, la singularidad de f en z_0 no sería esencial $\lightning$ ■

(Cultura general) El Gran Teorema de Picard señala que $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ posee una singularidad esencial en z_0, entonces para toda vecindad perforada $W \setminus \{z_0\}$, la función f alcanza infinitas veces (!) todo valor en $\mathbb{C}$, salvo quizás un punto (cf. $e^{1/z} \neq z_0 = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$)

§25. Funciones meromorfas y Teorema de factorización de Weierstrass

Así como las funciones racionales son cocientes de polinomios, las funciones meromorfas serán (localmente) cocientes de funciones holomorfas. Además, para incluir singularidades aisladas en el análisis consideraremos el "plano complejo extendido" $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en varias ocasiones.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Decimos que f es <u>meromorfa</u> en Ω si:

"Para todo punto $z_0 \in \Omega$, existe una vecindad abierta conexa V de z_0 y funciones holomorfas $g, h \in \mathcal{O}(V)$, con $h \not\equiv 0$ no-idénticamente nula, de tal suerte que $f|_V = \frac{g}{h}$"

Denotamos por $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de funciones meromorfas en Ω.

Se tiene la siguiente caracterización de las funciones meromorfas:

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es meromorfa si y sólo si f es holomorfa en el complemento de una sucesión de singularidades no-removibles $\{a_m\}$ que es <u>localmente finita</u> en Ω y donde cada singularidad $a_m \in \Omega$ es un <u>polo</u>. ie, puntos aislados

Dem: Si $f \overset{\text{loc}}{=} g/h$ con $g, h \in \mathcal{O}(V)$, entonces el hecho que $h \not\equiv 0$ en V implica que $\exists\, D(z_0, \varepsilon) \subseteq V$ tal que

$$h(z) = (z - z_0)^m u(z) \quad \text{en } D(z_0, \varepsilon) \quad \text{con } u \in \mathcal{O}^*(D(z_0, \varepsilon))$$

$\Rightarrow f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) u(z)^{-1}$ y donde $g/u \in \mathcal{O}(D(z_0, \varepsilon))$

y luego z_0 es un polo de orden $\leq m$ ✓

Recíprocamente, si f sólo posee singularidades aisladas dadas por polos entonces sabemos (por el desarrollo en serie de Laurent) que $f(z) \overset{\text{loc}}{=} g(z)/(z-z_0)^m$ con g holomorfa en una vecindad del polo z_0, ie, f es meromorfa ✓ ■

<u>Ejemplos</u>:

① $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$, ie, toda función holomorfa es meromorfa.

② **Ejercicio**. Sean $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ polinomios con $Q \neq 0$, entonces $f(z) = P(z)/Q(z)$ es meromorfa en $\mathbb{C}$, ie, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

③ La función $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$ es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus A$, donde $A = \{0\} \cup \{\pm\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^{\geq 1}\}$. Además, dado que $g(z) = \sin(\pi/z)$ tiene ceros simples en cada $z_0 = 1/n$ (pues $g'(z) = \frac{-\pi}{z^2}\cos(\pi/z)$) tenemos que f posee polos simples en cada $z_0 = 1/n$.
Así, f es meromorfa en $\mathbb{C}^*$ pero no es meromorfa en $\mathbb{C}$ dado que la sucesión de polos $\{\pm 1/n\}_{n\geq 1}$ no es localmente finita en torno a $0 \in \mathbb{C}$.

La noción de "divisor" (introducida por Dedekind y Weber) es muy útil para recopilar los órdenes de ceros y polos de una función meromorfa.

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío. Un divisor en Ω es una función

$$D : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad p \longmapsto D(p) := m_p$$

tal que su soporte, definido por

$$\mathrm{Supp}(D) := \{z \in \Omega \text{ tal que } D(z) \neq 0\},$$

consiste en una sucesión $\{z_n\} \subseteq \Omega$ de puntos aislados en Ω, donde $D(z_n) := m_n \neq 0$ es la multiplicidad del punto z_n en el divisor D.
Lo anterior suele resumirse escribiendo simplemente

$$D = \sum_n m_n [z_n].$$

Si $m_n \geq 0 \ \forall n$ escribimos $D \geq 0$ y decimos que D es un divisor efectivo.
Obs: El conjunto $\mathrm{Div}(\Omega)$ de divisores en Ω posee una estructura de grupo abeliano: La función nula es el neutro $0 \in \mathrm{Div}(\Omega)$, si $D \in \mathrm{Div}(\Omega)$ entonces $-D \in \mathrm{Div}(\Omega)$, si $D, D' \in \mathrm{Div}(\Omega)$ entonces $D + D' \in \mathrm{Div}(\Omega)$.

Teorema y Definición: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ una función meromorfa que no es idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω (y en particular, los conjuntos de ceros $V(f) \subseteq \Omega$ y de polos $P(f) \subseteq \Omega$ forman sucesiones de puntos aislados en Ω). Definimos el divisor asociado a f mediante

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{z \in \Omega} m_z [z]$$

donde $z \in V(f) \cup P(f)$, y donde $m_z > 0$ (resp. $m_z < 0$) es el orden del cero (resp. $-$(orden del polo)) si $z \in V(f)$ (resp. si $z \in P(f)$).
En part, $\mathrm{div}(f) \geq 0 \iff f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Dem: Los ceros y polos de una función meromorfa $\not\equiv 0$ son aislados ✓ ■

Ejemplos:

① si $f(z) = e^z$, $\operatorname{div}(f) = 0$ (ni ceros ni polos)

② si $f(z) = (z-2)(z^2+1)^3$, $\operatorname{div}(f) = 1\cdot[2] + 3\cdot[i] + 3\cdot[-i]$

③ si $f(z) = z/(z-1)^2$, $\operatorname{div}(f) = 1\cdot[0] - 2\cdot[1] \overset{\text{def}}{=} [0] - 2[1]$

④ si $f(z) = 1/\sin(\pi/z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$, entonces $\operatorname{div}(f) = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} -\left[\frac{1}{m}\right]$.

El "Teorema de factorización de Weierstrass" permite hallar funciones holomorfas con (un divisor efectivo de) ceros pre-escritos.

Notación: Para $p \in \mathbb{N}$, definimos el factor principal de Weierstrass de orden p como la función $W_0(z) := 1 - z$ si $p = 0$, y como

$$W_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right) \quad \text{si } p \geq 1.$$

↳ (o bién $E_p(z)$ "factor elemental" de Weierstrass)

En particular, $z_0 = 1$ es un cero simple de W_p y en $z_0 = 0$ la función $\ln(W_p(z))$ admite el desarrollo en serie de potencias

$$\ln(W_p(z)) = \ln(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p} = -\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{con } |z| < 1$$

$$\Rightarrow |\ln(W_p(z))| \leq \frac{1}{p+1} \sum_{n=p+1}^{+\infty} |z|^n = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{|z|^{p+1}}{1-|z|} \quad \text{para } |z| < 1$$

Así, $|\ln W_p(z)| \leq 2^{-p}$ si $|z| \leq 1/2$.

Teorema de Factorización de Weierstrass: Para todo divisor efectivo en un abierto no-vacío $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, de la forma

$$D = \sum_{z\in\Omega} m_z [z] = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_n [z_n] \geq 0,$$

existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\operatorname{div}(f) = D$, i.e, una función f cuyos ceros son exactamente los puntos $\{z_n\}$ y cada uno con multiplicidad $m_n \geq 0$.

Dem: Podemos suponer que $z_n \neq 0$ $\forall n \geq 0$, pues si $z_0 = 0$ basta multiplicar por z^{m_0} la función construida a partir de los $\{z_n\}_{n\geq 1}$.

Supongamos primero que $\Omega = \mathbb{C}$: En tal caso, el hecho que los $\{z_n\}$ sean puntos aislados se traduce en que $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$. Definamos:

$$f(z) := \prod_{n\in\mathbb{N}} W_{n+m_n}(z/z_n)^{m_n}$$

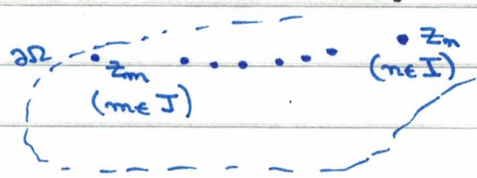
Así, la convergencia del producto infinito se reduce a estudiar la convergencia

uniforme de la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} m_n \left|\operatorname{Ln} W_{n+m_n}(z/z_n)\right|$ sobre compactos de $\mathbb{C}$.
Para ello, notamos que si $z\in\overline{D}(0,R)$ entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $|z_n|\geq 2R$ $\forall n\geq n_0$ y por ende $|z/z_n|\leq 1/2$ $\forall n\geq n_0$

$\Rightarrow \left|\operatorname{Ln} W_{n+m_n}(z/z_n)\right| \leq 2^{-(n+m_n)}$ $\forall z\in\overline{D}(0,R)$ y $\forall n\geq n_0$

de donde deducimos la convergencia uniforme de $\sum m_n \left|\operatorname{Ln} W_{n+m_n}(z/z_n)\right|$ en $\overline{D}(0,R)$ y así la convergencia de $f(z)=\prod_n W_{n+m_n}(z/z_n)^{m_n}$ en todo compacto de $\Omega=\mathbb{C}$ ✓ Por construcción, $\operatorname{div}(f)=D$ ✓

Supongamos ahora que $\Omega\neq\mathbb{C}$: En tal caso, el hecho que los $\{z_n\}$ sean puntos aislados se traduce en que $\max\{|z_n|, \operatorname{dist}(z_n,\partial\Omega)^{-1}\}\xrightarrow{n\to+\infty}+\infty$.
Por conveniencia, realizamos una partición $\mathbb{N}=I\cup J$ de los índices de tal suerte que:



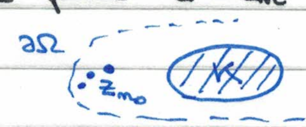
$n\in I \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} |z_n|\geq \operatorname{dist}(z_n,\partial\Omega)^{-1}$

$n\in J \overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} |z_n| < \operatorname{dist}(z_n,\partial\Omega)^{-1}$

Así, $\lim\limits_{\substack{n\in I\\ n\to+\infty}} |z_n|=+\infty$. Luego, el razonamiento en el caso anterior muestra que $g(z):=\prod_{n\in I} W_{n+m_n}(z/z_n)^{m_n}$ converge en $\mathbb{C}$ y sus ceros están dados por los $\{z_n\}_{n\in I}$ con multiplicidad m_n ✓
Por otra parte, tenemos que $\lim\limits_{\substack{n\in J\\ n\to+\infty}} \operatorname{dist}(z_n,\partial\Omega)=0$. Para cada $n\in J$, sea $w_n\in\partial\Omega$ tal que $|z_n-w_n|=\operatorname{dist}(z_n,w_n)$, y definimos

$$h(z):=\prod_{n\in J} W_{n+m_n}\left((z_n-w_n)/(z-w_n)\right)^{m_n},$$

donde $W_{n+m_n}((z_n-w_n)/(z-w_n))$ se anula en el único punto $z=z_n$ que verifica $(z_n-w_n)/(z-w_n)=1$ ✓



Sea $K\subseteq\Omega$ compacto y sea $\delta:=\operatorname{dist}(K,\partial\Omega)$

$\Rightarrow \exists n_0$ tal que $|z_n-w_n|\overset{\text{df}}{=}\operatorname{dist}(z_n,\partial\Omega)\leq\delta/2$ $\forall n\geq n_0$, y luego

$$\left|\frac{z_n-w_n}{z-w_n}\right|\leq\frac{\delta/2}{\delta}=\frac{1}{2}\quad\forall z\in K \Rightarrow \left|\operatorname{Ln} W_{n+m_n}\left(\frac{z_n-w_n}{z-w_n}\right)\right|\leq\frac{1}{2^{n+m_n}} \text{ en } K$$

$\Rightarrow h$ converge uniformemente en todo compacto $K\subseteq\Omega$ ✓ Así, la función $f:=gh\in\mathcal{O}(\Omega)$ verifica $\operatorname{div}(f)=D$ ✓ ∎

Obs: La elección de índices "$n+m_n$" asegura la convergencia en general. Sin embargo, si $\{z_n\}_{n\geq 0}\subseteq\mathbb{C}$ son puntos aislados tales que para $p\in\mathbb{N}$ se cumple que:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{m_n}{|z_n|^{p+1}}<+\infty$$

$\Rightarrow f(z)=\prod_n W_p(z/z_n)^{m_n}$ converge uniformemente en todo $K\subseteq\mathbb{C}$ compacto.
En part, si $\sum\frac{m_n}{|z_n|}<+\infty$ entonces $f(z)=\prod\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{m_n}$ funciona!

Corolario: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ función meromorfa. Entonces, existe una escritura global
$$f = g/h \quad \text{en } \Omega$$
donde $g, h \in \mathcal{O}(\Omega)$, y donde h posee como ceros los polos de f y como multiplicidades los órdenes de cada polo correspondiente.

Dem: Escribamos el divisor $\operatorname{div}(f)$ como
$$\operatorname{div}(f) = \sum_{z_m \in V(f)} m_m [z_m] - \sum_{w_m \in P(f)} d_m [w_m]$$
$$=: \operatorname{div}(f)_+ - \operatorname{div}(f)_-$$
donde $V(f) = \{z_n\}$ es el conjunto de ceros (con $m_m > 0$) y $P(f) = \{w_m\}$ es el conjunto de polos (con $-d_m < 0$, ie, $d_m > 0$). El Teorema de factorización de Weierstrass nos permite hallar $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\operatorname{div}(h) = \operatorname{div}(f)_-$. Luego, $g := fh \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $\operatorname{div}(g) = \operatorname{div}(f)_+$ ■

Obs: Notar que si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un abierto conexo no-vacío entonces $\mathcal{O}(\Omega)$ es un dominio entero (ie, si $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ son tales que $fg \equiv 0$ en Ω, entonces $f \equiv 0$ ó $g \equiv 0$ en Ω). Así, el Corolario anterior nos dice que
$$\mathcal{M}(\Omega) \cong k(\Omega),$$
donde $k(\Omega) := \operatorname{Fr}(\mathcal{O}(\Omega))$ es el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}(\Omega)$.

Cultura general: Sea $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$. Decimos que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tiene orden de crecimiento $\leq \rho$ si $|f(z)| \leq A e^{B|z|^\rho}$ para ciertas constantes $A, B \in \mathbb{R}^{>0}$ y $\forall z \in \mathbb{C}$. El orden de crecimiento de f es el ínfimo $\rho_0 \geq 0$ de dichos ρ.

Teorema de Factorización de Hadamard: Supongamos que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tiene orden de crecimiento ρ_0, y sea $k := \lfloor \rho_0 \rfloor$ su parte entera. Si $z_0 = 0$ y $\{z_m\}_{m \geq 1} = \{z_1, z_2, \dots\}$ son los ceros de f, entonces
$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{m=1}^{+\infty} W_k(z/z_m)$$
donde $P \in \mathbb{C}[z]$ polinomio de grado $\leq k$ y donde $m = \operatorname{mult}_0(f) \geq 0$.

Ejercicio: Usar el Teorema de Factorización de Hadamard que:

① $e^{az} - e^{bz} = (a-b) z e^{(a+b)z/2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2\pi^2}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

② $\cos(\pi z) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

③ La ecuación $e^z = z$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{C}$.

§26. Teorema de Residuos

Recordemos que si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es una vecindad abierta de z_0 y $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$, entonces f admite un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots$$

donde $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0,\varepsilon)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y donde $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\overline{D}(z_0,\varepsilon) \subseteq \Omega$. En particular:

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0,\varepsilon)} f(z)\, dz}$$

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ vecindad abierta de $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$, y consideremos $\omega := f(z)\,dz$ la 1-forma diferencial asociada. Definimos el residuo de ω en z_0 mediante

$$\mathrm{Res}(\omega, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0,\varepsilon)} \omega = \text{Coeficiente } a_{-1} \text{ de la serie de Laurent de } f \text{ centrada en } z_0$$

donde $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\overline{D}(z_0,\varepsilon) \subseteq \Omega$.

Notación: En muchos textos se habla del "residuo de f en z_0":

$$\mathrm{Res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(z_0,\varepsilon)} f(z)\, dz$$

y también lo usaremos frecuentemente! Sin embargo, desde un punto de vista teórico es mejor hablar del residuo de una 1-forma diferencial, pues:

1º Se comporta mejor al hacer cambios de variable ("biholomorfismos").

2º Esta definición se extiende mejor a funciones de varias variables complejas! El Residuo de Poincaré asocia una $(n-1)$-forma diferencial $\mathrm{Res}(\omega)$ a una n-forma diferencial $\omega = f(z_1,\ldots,z_n)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$.

Ejemplos y Observaciones: Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$

1. Si f posee una singularidad removible en z_0, entonces
$$\mathrm{Res}(f, z_0) = 0 \quad \text{(cf. Teorema de Cauchy-Goursat)}$$
2. Si $f(z) = e^{1/z} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$, entonces $\mathrm{Res}(e^{1/z}, 0) = 1$.
3. Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ es meromorfa y $f = u/v$ con $u, v \in \mathcal{O}(\Omega)$ entonces $\mathrm{Res}(f, z_0)$ se calcula mirando (finitos términos!) los desarrollos de series de potencias en z_0 de u y v, y con ello se pueden deducir los primeros términos de la serie de Laurent de f centrada en z_0. Por ejemplo:

Supongamos que $f = u/v$ con $u, v \in \mathcal{O}(\Omega)$ y f posee un <u>polo simple</u>
en z_0, i.e, $u(z_0) \neq 0$ y v posee un cero simple en z_0 (i.e, $v(z_0) = 0$, $v'(z_0) \neq 0$):

$$\left.\begin{array}{l} v(z) = v'(z_0)(z - z_0)\,h(z) \ \text{ con } h \in \mathcal{O}(\Omega) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{tq } h(z_0) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(z) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}(z - z_0)^{-1} + O(1)$$

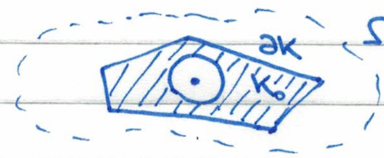
$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{u(z)}{v(z)}, z_0\right) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)} \quad \text{si } v(z_0) = 0 \text{ y } v'(z_0) \neq 0.$$

Ejercicio útil Probar que si f <u>posee</u> un polo de orden $m \geq 1$ en z_0
entonces $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{ (z - z_0)^m f(z) \right\} \Big|_{z = z_0}$

(4) **Ejercicio** Sea $f(z) = \tan(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Calcular $\operatorname{Res}(\tan(z), a)$ $\forall a \in \mathbb{C}$.

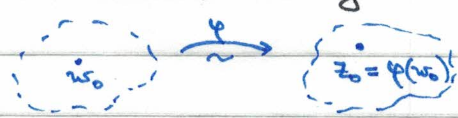
(5) No es necesario restringirse a círculos $\Gamma(z_0, \varepsilon)$ para calcular residuos:
Sea $\mathcal{U}$ vecindad abierta de z_0 tal que $K := \overline{\mathcal{U}} \subseteq \Omega$ es compacto con borde ∂K
de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos. Entonces:

$$\operatorname{Res}(\omega, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \omega$$



En efecto, el Teorema de Cauchy aplicado al compacto $K_0 := \overline{\mathcal{U}} \setminus D(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega \setminus \{z_0\}$
implica que $0 = \int_{\partial K_0} \omega = \int_{\partial K} \omega - \int_{\Gamma(z_0, \varepsilon)} \omega$ $\forall \varepsilon > 0$ muy. pequeño.

<u>Prop</u> (Cambio de variable): Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ vecindad abierta de z_0, $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$
y $\omega = f(z)\,dz$ la 1-forma diferencial asociada. Supongamos que $z = \varphi(w)$
es un cambio de variable biholomorfo entre una vecindad de $w_0 := \varphi^{-1}(z_0)$ y
una vecindad de z_0, entonces:



$$\operatorname{Res}(\varphi^* \omega, w_0) = \operatorname{Res}(\omega, z_0)$$

donde $\varphi^* \omega := f(\varphi(w))\,\varphi'(w)\,dw$ es el <u>pullback de ω por φ</u>.

<u>Dem</u>: Para una vecindad abierta acotada (suficientemente pequeña) W de w_0 tal
que ∂W es de clase $\mathcal{C}^1$, el abierto imagen $\mathcal{U} := \varphi(W)$ es una vecindad
de $z_0 = \varphi(w_0)$ tal que $\partial \mathcal{U}$ es de clase $\mathcal{C}^1$. Así,

$$\operatorname{Res}(\varphi^* \omega, w_0) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial W} f(\varphi(w))\,\varphi'(w)\,dw \underset{z = \varphi(w)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{U}} f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Res}(\omega, z_0)$$

donde la orientación de los bordes es preservada dado que $\det(d_w \varphi) > 0$,
gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann reales. ∎

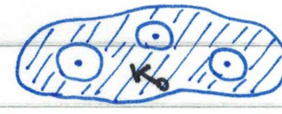
<u>Ejemplo</u>: Sabemos que $\operatorname{Res}(e^{1/z}, 0) = 1$. Luego, si consideramos el cambio de
variable (loc. biyectivo) $z = \sin(w)$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}(e^{1/\sin(w)} \cos(w), 0) = 1$.
Del mismo modo, $\operatorname{Res}(e^{1/\sin(w)} \cos(w), n\pi) = 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$,
y como $\cos(n\pi) = (-1)^n$ se tiene que $\operatorname{Res}(e^{1/\sin(w)}, n\pi) = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Teorema de Residuos: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $\{a_m\}_{m\geq 0} \subseteq \Omega$ una sucesión de puntos aislados. Supongamos que f es una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a_m\}_{m\geq 0}$, entonces:

Para todo compacto $K \subseteq \Omega$ con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos tal que $\partial K \cap \{a_m\}_{m\geq 0} = \emptyset$ se tiene que $\int_{\partial K} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a_m \in K} \operatorname{Res}(f, a_m)$.

Dem: Las hipótesis del Teorema implican que $K \cap \{a_m\}_{m\geq 0}$ es un conjunto finito de puntos, que no pertenecen al borde ∂K.

Así, existen radios $r_m > 0$ tales que $\overline{D}(a_m, r_m) \subseteq \operatorname{int}(K)$



$\Rightarrow K_0 := K \setminus \bigcup_{a_m \in K} \overline{D}(a_m, r_m)$ es un compacto con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y f es holomorfa en una vecindad de ∂K_0

Luego, el Teorema de Cauchy implica que:

$$0 = \int_{\partial K_0} f(z)\,dz = \int_{\partial K} f(z)\,dz - \sum_{a_m \in K} \int_{\Gamma(a_m, r_m)} f(z)\,dz$$

de donde se obtiene la fórmula deseada ■

Ejemplos:

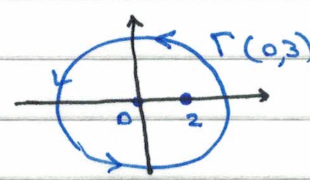
① Sea $f(z) = e^{1/z^2}$. Entonces, f admite el desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^6} + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$\Rightarrow \operatorname{Res}(e^{1/z^2}, 0) = 0$.

Luego, el Teorema de Residuos implica (por ejemplo) que $\int_{\partial D(0,r)} e^{1/z^2}\,dz = 0$ para todo $r > 0$.

② Sea $f(z) = 1/(z(z-2)^4)$ y sea $\Gamma(0,3)$ el círculo de radio 3 con centro $z_0 = 0$ (orientado en sentido anti-horario):



Luego, el Teorema de Residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(0,3)} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,2) \right)$$

En $z_0 = 2$: Escribimos

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)^4}\cdot\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-2)^4}\cdot\frac{1}{2+(z-2)} = \frac{1}{2(z-2)^4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{(z-2)}{2}\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-4}$$ y luego (en $n=3$) tenemos $\operatorname{Res}(f,2) = \frac{-1}{16}$

En $z_0 = 0$: Al ser un polo simple, $\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$

ie, $\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = 1/(-2)^4 = 1/16$

$\Rightarrow \int_{\Gamma(0,3)} f(z)\,dz = 2\pi i \left(1/16 - 1/16\right) = 0$. Similar: $\int_{\Gamma(2,1)} f(z)\,dz = \frac{-\pi i}{8}$

Ejercicio Calcular $\displaystyle\int_{\Gamma(0,2)} \frac{5z-2}{z(z-1)}\,dz$.

§27. Cálculo de integrales reales mediante residuos

En esta sección explicaremos cómo el Teorema de Residuos puede ser usado para calcular integrales reales que involucran funciones holomorfas, que muchas veces no poseen primitivas elementales. Incluso en el caso de que las funciones posean primitivas conocidas, suele pasar que el cálculo de residuos permita obtener resultados mucho más rápidamente!

Ejemplo 1: Fracciones racionales en $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

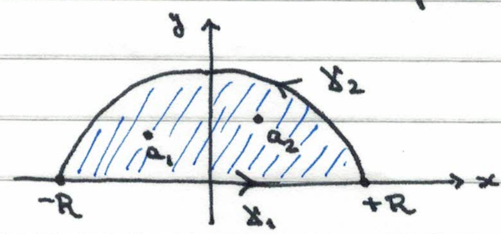
Supongamos que queremos calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es el cociente de dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ tales que i) $f(z) = P(z)/Q(z)$ no posee polos en el eje real.

ii) $d := gr(Q) - gr(P) \geq 2$ ($\Rightarrow$ convergencia absoluta)

Para calcular $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ consideramos el compacto $K := \overline{D}(0,R) \cap \{Im(z) \geq 0\}$



Sea $c \in \mathbb{R}$ el cociente entre el coef. principal de P y Q, de tal suerte que $|f(z)| \sim |c| |z|^{-d}$ cuando $|z| \longrightarrow +\infty$. En particular,

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \leq \ell(\gamma_2)\, C' R^{-d} = \pi R\, C' R^{-d} = C'' / R^{d-1} \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

Por otro lado, el Teorema de Residuos implica que

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz \overset{def}{=} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a_m \in K} Res(f, a_m)$$

donde $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz \overset{def}{=} \int_{-R}^{R} f(t)\,dt$. Luego, si $R \to +\infty$ obtenemos

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{Im(a_m) > 0} Res\left(\frac{P}{Q}, a_m\right)}$$

Por ejemplo, para calcular $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$ debemos determinar los polos de $f(z) = P(z)/Q(z)$, con $P(z) = z^2$, $Q(z) = z^6 + 1$:

$$z^6 + 1 = 0 \iff z^6 = -1 = e^{i\pi} \iff z = a_n := e^{i\pi/6} \cdot e^{2\pi i\, n/6}$$

$$= \exp\left(\frac{i\pi}{6}(2n+1)\right) \quad \text{con } n = 0, 1, \ldots, 5$$

Solamente $a_0 = e^{i\pi/6}$, $a_1 = i$, $a_2 = e^{i5\pi/6}$ tienen $Im(a_n) > 0$

Más aún, dado que $f = P/Q$ posee polos simples (!) se tiene que

$\mathrm{Res}(f, a_m) = P(a_m)/Q'(a_m)$ (ver §26, Ejemplo 3 en p.73)

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f, a_m) = a_m^2/6a_m^5 = \frac{1}{6a_m^3}$ y así (dado que $a_0^3 = a_2^3 = i$, $a_1^3 = -i$)

$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i}\right) = \frac{\pi}{3}$, i.e., $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{\pi}{6}$ ✓

Cabe destacar que en caso general, podríamos haber considerado el compacto $K := \overline{D}(0,R) \cap \{\mathrm{Im}(z) \leq 0\}$. En tal caso, dado que la orientación del eje real es la opuesta, se deduce que

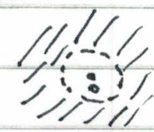
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(a_m)<0} \mathrm{Res}(f, a_m)$$

Así, dado que $f = P/Q$ no posee polos en el eje real tenemos que

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \mathrm{Res}(f, a) = 0$$

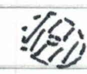
Esto último se extiende a funciones meromorfas más generales mediante:

Def: Una vecindad del infinito es un anillo abierto de la forma



$$A(0,R,+\infty) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,R) \quad \text{para } R>0$$

Sea $f \in \mathcal{O}(A(0,R,+\infty))$ holomorfa en una vecindad del infinito, y sea $w = \varphi(z) := 1/z$ biholomorfismo entre $A(0;R,+\infty)$ y $A(0;0,1/R)$



Para $\omega = f(z)\,dz$, se tiene que $\varphi^*\omega \overset{\text{def}}{=} -f(1/w)\,w^{-2}\,dw$ y definimos

$$\mathrm{Res}(\omega,\infty) := \mathrm{Res}(f,\infty) := \mathrm{Res}(-f(1/w)\,w^{-2}, 0)$$

i.e., $\mathrm{Res}(f,\infty) = -$ (coef. de a_{-1} en la serie de Laurent de f centrada en 0).

Además, decimos que $z = \infty$ es un polo de orden m de f si $w = 0$ es un polo de orden m de $f(1/w)$ (i.e, la serie de Laurent de f centrada en 0 posee finitos coeficientes $a_n \neq 0$ con $n \geq 0$); y en caso contrario decimos que f posee una singularidad esencial en $z = \infty$.

Prop: Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ función meromorfa, entonces $\sum_{a \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}} \mathrm{Res}(f,a) = 0$ si f posee finitos polos (de tal suerte que la suma es finita)

Dem: Consideremos $R \gg 0$ tal que $D(0,R)$ contiene a todos los polos de f, salvo $z = \infty$. Entonces,

$$\int_{\Gamma(0,R)} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in \mathbb{C}} \mathrm{Res}(f,a)$$

Por otra parte, notando que $w = 1/z$ cambia la orientación de círculos centrados en $z_0 = 0$, tenemos que:

↪ $\gamma(t) = Re^{it} \rightsquigarrow \tilde{\gamma}(t) = 1/R \cdot e^{-it}$

$$\int_{\Gamma(0,R)} f(z)\,dz = \int_{\Gamma(0,R)} \omega \underset{\varphi(z)=1/z}{=} -\int_{\Gamma(0,1/R)} \varphi^*\omega \overset{\text{def}}{=} -2\pi i\, \mathrm{Res}(\varphi^*\omega, 0) \overset{\text{def}}{=} -2\pi i\, \mathrm{Res}(f,\infty)$$

i.e., $\sum_{a \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}} \mathrm{Res}(f,a) = 0$ ∎

Ejemplo 2 : Fracciones racionales trigonométricas en $[0, 2\pi]$

Supongamos que queremos calcular

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\, dt$$

donde $F(x,y) \in \mathbb{R}(x,y)$ es una función racional en 2 variables que no se indetermina en el círculo $x^2+y^2=1$ de $\mathbb{R}^2$.

Si escribimos $z(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que $z'(t) = ie^{it}$ y luego si definimos

$$f(z) := F\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) \cdot \frac{1}{iz} \in \mathbb{C}(z)$$

obtenemos una función racional tal que si $z = e^{it} \in \partial\mathbb{D}$ entonces

$f(e^{it}) = F(\cos t, \sin t) \cdot \dfrac{1}{ie^{it}}$, ie, $\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\, dt \overset{\text{def}}{=} \int_{\partial\mathbb{D}} f(z)\, dz$

En particular, el Teorema de Residuos nos dice que

$$\boxed{\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{a \in \mathbb{D}} \operatorname{Res}(g(z), a)}$$

donde $g(z) := \frac{1}{z} F\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) \in \mathbb{C}(z)$ función racional.

Por ejemplo, para calcular $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(t)}\, dt$ consideramos

$F(x,y) = \dfrac{1}{2+x}$ y $g(z) = \dfrac{1}{z} \cdot \left(\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\right) = \dfrac{2}{z^2+4z+1}$

Como $z^2+4z+1 = (z-\lambda_1)(z-\lambda_2)$ con $\lambda_1 = -2-\sqrt{3} \notin \mathbb{D}$, $\lambda_2 = -2+\sqrt{3} \in \mathbb{D}$

tenemos que $I = 2\pi \operatorname{Res}(g, \lambda_2) = 2\pi \cdot \dfrac{2}{\lambda_2-\lambda_1} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Ejemplo 3 : Integrales de Fourier

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Veremos pronto que el Análisis de Fourier requiere calcular transformadas de Fourier de la forma siguiente (salvo cambios de signos):

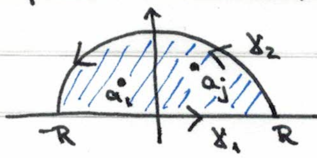
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{2\pi i \omega x}\, dx \quad , \quad \omega \in \mathbb{R} \text{ fijo}$$

y donde podemos que $\omega > 0$, haciendo $u = -x$ si fuera necesario. Dicho signo es importante, pues si $z = x+iy$ entonces $|e^{2\pi i\omega z}| = e^{-2\pi\omega y}$ y por ende usaremos el Teorema de Residuos en el semi-plano $\{\operatorname{Im}(z) = y \geq 0\}$.

Prop: Sup. que $\omega > 0$ y f se extiende en una función holomorfa $f(z)$ definida en una vecindad abierta de $\overline{\mathbb{H}} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, salvo quizas finitos puntos singulares $a_j \notin \mathbb{R}$. Si $\displaystyle\lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ z \in \overline{\mathbb{H}}}} f(z) = 0$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{2\pi i\omega x}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(a_j) > 0} \operatorname{Res}\left(f(z)\, e^{2\pi i\omega z}, a_j\right).$$

Dem: Consideramos el compacto $K := \overline{D}(0,R) \cap \{\operatorname{Im}(z) \geq 0\}$



$$\omega := f(z)\, e^{2\pi i \omega z} dz$$

El Teorema de Residuos implica que $\int_{\partial K} \omega \overset{\text{dy}}{=} \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi i \sum_{a \in K} \operatorname{Res}(f,a)$ y donde $\int_{\gamma_1} \omega \overset{\text{dy}}{=} \int_{-R}^{+R} f(x)\, e^{2\pi i \omega x}\, dx \xrightarrow{R \to +\infty} I$, la integral deseada.

Finalmente, notamos por un lado que $I_2 := \int_{\gamma_2} \omega$ cumple:

$$|I_2| \leq M_R \int_0^{\pi} R\, e^{-2\pi \omega R \sin t}\, dt = 2M_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-2\pi \omega R \sin t}\, dt,$$

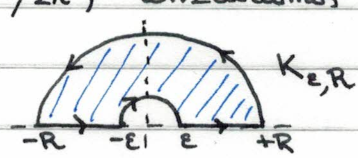
donde $M_R := \sup\limits_{\Gamma(0,R) \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\}} |f(z)|$ y donde $|e^{2\pi i \omega z}| = e^{-2\pi \omega y} = e^{-2\pi \omega R \sin t}$ si $z = z(t) = R\cos(t) + iR\sin(t)$.

Por otro lado, $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y luego

$$|I_2| \leq 2M_R \cdot R \int_0^{\pi/2} e^{-4\omega R t}\, dt = \left(\frac{1 - e^{-2\pi R \omega}}{2\omega}\right) M_R \xrightarrow{R \to +\infty} 0 \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Por ejemplo, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i \omega x}}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2\pi i \omega z}}{1+z^2}, i\right) = 2\pi i \frac{e^{-2\pi \omega}}{2i} = \pi e^{-2\pi \omega}$

Obs importante: El método anterior puede usarse (con pequeñas modificaciones) si f posee finitos polos simples reales. Por ejemplo, si $f(z) = 1/z$ y $e^{2\pi i \omega z} = e^{iz}$ (ie, $\omega = 1/2\pi$) consideramos el compacto



dado que f no posee polos en $\operatorname{int}(K_{\varepsilon,R})$ y que $f(z) \xrightarrow{|z| \to +\infty} 0$, la integral sobre el semi-círculo exterior tiende a 0 cuando $R \to +\infty$. Así, el Teorema de Cauchy-Goursat implica que:

$$\lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{\{|z| = \varepsilon,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \right) = 0 \quad (\star)$$

Para la última integral, notamos que $e^{iz}/z = 1/z + i + O(z)$ y luego si $z = z(t) = \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0,\pi]$ entonces:

$$\int_{\{|z| = \varepsilon,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{\pi}^{0} (\varepsilon^{-1} e^{-it} + i + O(\varepsilon))\, \varepsilon i e^{it}\, dt = -i\pi + 2i\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

de donde deducimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx \overset{\text{dy}}{=} 2 \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix}\, dx \overset{(\star)}{=} -\frac{1}{i} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\{|z| = \varepsilon,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}} \frac{e^{iz}}{z}\, dz$$

$$= -1/i\, (-i\pi) = \pi \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

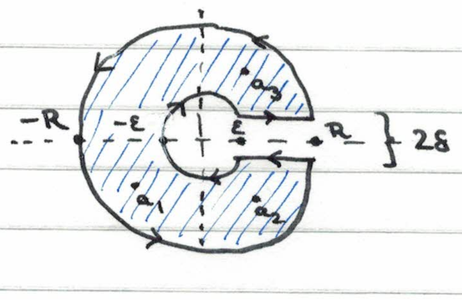
Ejemplo 4: Integrales con factor x^a ($a \notin \mathbb{Z}$) en $[0,+\infty[$

Supongamos que queremos calcular
$$\int_0^{+\infty} f(x)\, x^a \, dx$$
donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es el cociente de dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ y $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ son tales que:

i) $P(0) \neq 0$ y Q no posee ceros reales positivos (i.e, en $[0,+\infty[$)

ii) $a > -1$ y $\deg(Q) > \deg(P) + a + 1$.

Para calcular $\int_0^{+\infty} f(x)\, x^a\, dx$ consideramos $0 < \delta \ll \varepsilon < 1 < R$ y el compacto



Consideramos $f(z)\, z^a$ donde $z^a := \exp(a \log_\pi(z))$ está definida usando la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$, y se calcula que cuando $\delta \to 0^+$ la suma de las integrales sobre los segmentos horizontales converge a
$$(1 - e^{2\pi i a}) \int_\varepsilon^R f(x)\, x^a \, dx$$
y que (ii) implica que las integrales sobre los círculos interior y exterior tienden a 0 cuando $\varepsilon \to 0^+$ y $R \to +\infty$. En resumen:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\, x^a\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{a_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}} \operatorname{Res}(f(z)\, z^a ; a_j)}$$

Por ejemplo, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \operatorname{Res}\left(\frac{z^a}{z(z+1)}, -1\right) = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \cdot \frac{e^{i\pi a}}{(-1)} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$

Ejemplo 5: Integrales con factor $\ln(x)$ en $[0,+\infty[$

Supongamos que queremos calcular
$$\int_0^{+\infty} f(x) \ln(x)\, dx$$
donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es el cociente de dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

i) Q no posee ceros en $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

ii) $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$

Aquí, la astucia es considerar $g(z) := (\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z)$ donde $\log_\pi(z)$ es la rama del logaritmo definida en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{\geq 0}$ y considerar el compacto $K_{R,\varepsilon,\delta}$ del Ejemplo 4. Con nuestras hipótesis:

1°) Las integrales sobre los círculos interior y exterior tienden a 0 cuando $\varepsilon \to 0^+$ y $R \to +\infty$.

2°) En el eje real, obtenemos curvas $\gamma(t) = t \pm i\delta$ y luego:

$$\underbrace{\int_\varepsilon^R (\ln(x) - i\pi)^2 f(x)\,dx}_{\text{cuando } \delta \to 0^+} + \underbrace{\int_R^\varepsilon (\ln(x) - i\pi + 2\pi i)^2 f(x)\,dx}_{\text{cuando } \delta \to 0^-}$$

$$= -4i\pi \int_\varepsilon^R f(x) \ln(x)\,dx$$

Así, obtenemos: $\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\ln(x)\,dx = \frac{-1}{2} \sum_{a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^{\geq 0}} \operatorname{Res}\left((\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z), a\right)}$

Obs: ① La integral $\int_0^{+\infty} f(x)\ln(x)\,dx$ converge incluso si $z=1$ es un polo simple de $f(z) = P(z)/Q(z)$. Considerando, en el cálculo anterior, pequeños círculos de la forma $\Gamma(1,\varepsilon)$ y usando $\operatorname{Ln}(z)$ (la rama principal del logaritmo) se puede probar que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ln(x)\,dx = \frac{-1}{2} \sum_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^{\geq 0}} \operatorname{Res}\left((\log_\pi(z) - i\pi)^2 f(z), a\right) + \frac{\pi^2}{2} \operatorname{Res}(f(z), 1)$$

Por ejemplo, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \frac{-1}{2} \underbrace{\operatorname{Res}\left(\frac{(\log_\pi(z) - i\pi)^2}{z^2-1}, -1\right)}_{=0 \text{ pues } \log_\pi(-1) = i\pi} + \frac{\pi^2}{2} \underbrace{\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, 1\right)}_{=1/2}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

② La misma astucia permite evaluar (en principio) integrales de la forma

$$\int_0^{+\infty} f(x) R(\ln(x))\,dx$$

donde $R \in \mathbb{R}[x]$ es cualquier polinomio. Para ello, se debe encontrar un polinomio $\tilde{R} \in \mathbb{C}[x]$ tal que $\tilde{R}(z + 2\pi i) - \tilde{R}(z) = R(z)$ y considerar la función $g(z) := \tilde{R}(\log_\pi(z)) f(z)$ en $K_{R,\varepsilon,\delta}$.

Ejercicio Usar el Teorema de Residuos para calcular:

① $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\,dx$ para $a > 0$.

Ejercicio Probar las siguientes fórmulas:

① $\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+\cos(x))^2}\,dx = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}} \quad \forall a > 1$

② $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\ln(a) \quad \forall a > 0$

Históricamente, la transformada de Fourier de una función real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se obtiene al considerar la serie de Fourier de una función T-periódica como una suma de Riemann que, cuando $T \to +\infty$, tiende a la identidad
$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x \omega}\, d\omega \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx$, $\omega \in \mathbb{R}$, es la transformada de Fourier de f. Nuestro objetivo será dar un marco teórico formal donde estas fórmulas tengan sentido (¡y seamos capaces de probarlas!).

§ 28. Transformada de Fourier y la clase $\mathcal{F}$

$\circ\, \mathbb{C}$!

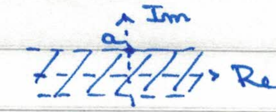
Def: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua. Decimos que f tiene decrecimiento moderado si $\exists\, A \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que
$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+|x|^{1+\varepsilon}}$$
para algún $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$, y donde frecuentemente se fija $\varepsilon = 1$. Denotamos por $M(\mathbb{R})$ al $\mathbb{R}$-ev. de funciones de decrecimiento moderado

Lema: Sea $f \in M(\mathbb{R})$, entonces la transformada de Fourier
$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx$$
converge para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Dem: Sea $I_N := \int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx$ para todo $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Entonces, $|I_M - I_N| \leq \int_{N \leq |x| \leq M} |f(x)|\, dx \leq \frac{2A}{\varepsilon N^{\varepsilon}}$ si $M > N$ y luego $\{I_N\}_{N \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy $\iff$ convergente ✓ ■

Ejercicio Sea $f \in M(\mathbb{R})$ de decrecimiento moderado. Probar que:
① Para todo $h \in \mathbb{R}$ se tiene $\int_{\mathbb{R}} f(x-h)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$
② Para todo $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene $\delta \int_{\mathbb{R}} f(\delta x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$
③ $\int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)|\, dx \to 0$ cuando $h \to 0$.

Ejercicio Sea $f \in M(\mathbb{R})$ de decrecimiento moderado. Probar que si:
① $g(x) := f(x+h)$ con $h \in \mathbb{R}$, entonces $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i h \omega}$.
② $g(x) := f(x)\, e^{-2\pi i x h}$ con $h \in \mathbb{R}$, entonces $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega + h)$.
③ $g(x) := f(\delta x)$ con $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$, entonces $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\delta}\right)$.



Def: Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$ y consideremos la franja horizontal

$$S_a := \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\mathrm{Im}(z)| < a \}$$

Decimos que una función $f \in \mathcal{O}(S_a)$ pertenece a la **clase $\mathfrak{F}_a$** si existe $A \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|f(x+iy)| \leq \frac{A}{1+x^2} \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y } |y| < a,$$

ie, f tiene decrecimiento moderado (uniformemente) en cada recta horizontal $\{\mathrm{Im}(z) = y\}$ con $-a < y < a$. Más aún, decimos que f pertenece a la **clase $\mathfrak{F}$** si pertenece a la clase $\mathfrak{F}_{a_0}$ para algún $a_0 \in \mathbb{R}^{>0}$.

Ejemplos:

1. $f(z) = e^{-z^2} \in \mathfrak{F}_a$ para todo $a > 0$.
2. Sea $c \in \mathbb{R}^{>0}$ y consideremos $f(z) = 1/(z^2+c^2)$, con polos simples en $z = \pm ic$, entonces $f \in \mathfrak{F}_a$ para todo $0 < a < c$.

En efecto $|f(z)| \leq \dfrac{1}{||z|^2 - c^2|} = \dfrac{1}{|x^2+y^2-c^2|} = \dfrac{1}{x^2 + (c^2 - y^2)}$ ✓

Ejercicio

1. Probar que $f(z) = 1/\cosh(\pi z)$ pertenece a $\mathfrak{F}_a$ para todo $0 < a < \frac{1}{2}$.
2. Probar que si $f \in \mathfrak{F}_a$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que $f^{(n)} \in \mathfrak{F}_b$ para todo $0 < b < a$.

[Indicación: Considerar las fórmulas y desigualdades de Cauchy].

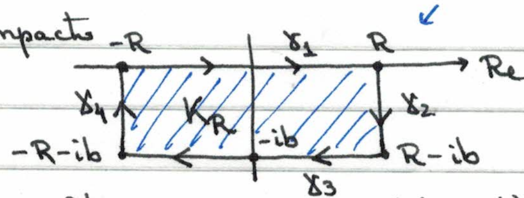
Teorema: Sea $f \in \mathfrak{F}_a$ para cierto $a > 0$. Entonces, $\exists B > 0$ tal que

$$|\hat{f}(\omega)| \leq B e^{-2\pi b|\omega|} \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R} \text{ y todo } 0 \leq b < a.$$

Dem: Dado que $\hat{f}(\omega) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\omega} dx$, el caso $b = 0$ (ie, $\hat{f}$ es acotada) se deduce del lema anterior (toda sucesión de Cauchy es acotada!). Luego, podemos asumir que $0 < b < a$. Supongamos que $\omega > 0$ y sea $g(z) := f(z) e^{-2\pi i z\omega}$:

orientación anti-canónica

Consideremos el compacto



$$I_j := \int_{\gamma_j} g(z)\, dz$$

y notar que $|I_4| \leq \int_0^b |f(-R-it) e^{-2\pi i(-R-it)\omega}| dt \leq \int_0^b \frac{A}{R^2} e^{-2\pi t\omega} dt$

$$\leq \int_0^b \frac{A}{R^2} e^0 dt = \frac{bA}{R^2} \xrightarrow{R \to +\infty} 0.$$

y de manera similar $|I_2| \xrightarrow{R\to+\infty} 0$. Luego, cuando $R \to +\infty$, el Teorema de Cauchy se traduce en

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x-ib)\, e^{-2\pi i (x-ib)\omega}\, dx$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{A}{1+x^2} \cdot e^{-2\pi b\omega}\, dx \leq B e^{-2\pi b\omega} \quad \text{para cierta } B \in \mathbb{R}^{>0} \checkmark$$

El caso $\omega < 0$ se prueba de manera similar cambiando K_R por el rectángulo de vértices $-R, R, -R+ib, R+ib$ ✓ ∎

Obs: El Teorema anterior nos dice que si $f \in \mathcal{F}$, entonces "$\hat{f}$ decrece rápidamente cuando $|\omega| \to +\infty$". Además, mientras más podamos extender f (ie, mientras mayor sea $a > 0$) entonces tenemos un mejor decaimiento de $\hat{f}$ (ie, mayor será b).

§29. Transformada inversa de Fourier y fórmula de Poisson

En esta sección veremos cómo recuperar una función de clase $\mathcal{F}$ a partir de su transformada de Fourier.

Lema: Sea $A \in \mathbb{R}^{>0}$ y $B \in \mathbb{R}$, entonces $\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega = \frac{1}{A+iB}$.

Dem: Como $A > 0$ y $B \in \mathbb{R}$, $|e^{-(A+iB)\omega}| = e^{-A\omega}$ y luego $\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega$ converge. Por definición

$$\int_0^{+\infty} e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-(A+iB)\omega}\, d\omega = \lim_{R\to+\infty} \left[-\frac{e^{-(A+iB)\omega}}{A+iB} \right]_0^R = \frac{1}{A+iB} \blacksquare$$

Teorema de inversión de Fourier: Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x\omega}\, d\omega \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Dem: Escribamos $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega = \int_{-\infty}^0 \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega + \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega$.

Supongamos que $\omega > 0$ (2^{da} integral):

Si $f \in \mathcal{F}_a$, fijamos b tal que $0 < b < a$ y recordemos que (cf. §27):

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(u-ib)\, e^{-2\pi i (u-ib)\omega}\, du$$

Luego:

$$\int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega \overset{\text{dy}}{=} \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib)\, e^{-2\pi i(u-ib)\omega}\, e^{2\pi i x\omega}\, du\, d\omega$$

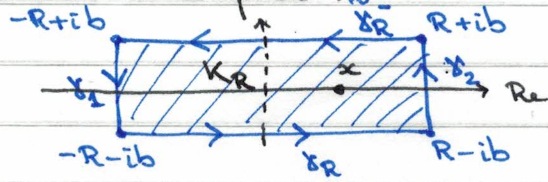
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i (u-ib-x)\omega}\, d\omega\, du$$

$$\overset{\text{Lema}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-ib) \frac{1}{2\pi b + 2\pi i(u-x)}\, du = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u-ib)}{u-ib-x}\, du$$

ie, $\int_0^{+\infty}\hat{f}(\omega)\,e^{2\pi i x\omega}\,d\omega \overset{dy}{=} \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z-x}\,dz$ donde γ_R es la curva $\gamma_R(t)=t-ib$ con $t\in[-R,R]$.

De manera completamente análoga: $\int_{-\infty}^{0}\hat{f}(\omega)\,e^{2\pi i x\omega}\,d\omega = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_R^-}\frac{f(z)}{z-x}\,dz$ donde $\tilde{\gamma}_R$ es la curva $\tilde{\gamma}_R(t)=t+ib$ con $t\in[-R,R]$.

Así, si consideramos el compacto:



y la función $f\in\mathcal{O}(K_R)$, tenemos que la fórmula de Cauchy implica que
$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_R}\frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

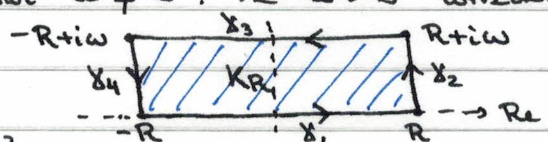
Por otra parte, el hecho que $f\in\mathcal{F}_a$ implica que $\int_{\gamma_i}\frac{f(z)}{z-x}\,dz \longrightarrow 0$ cuando $R\to+\infty$ para $i=1,2$. Finalmente, deducimos que
$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_R}\frac{f(z)}{z-x}\,dz \xrightarrow{R\to+\infty} \int_0^{+\infty}\hat{f}(\omega)\,e^{2\pi i x\omega}\,d\omega+\int_{-\infty}^{0}\hat{f}(\omega)\,e^{2\pi i\omega x}\,d\omega \quad \blacksquare$$

Ejemplos (Funciones Características):

① Distribución normal: Sea $f(x)=e^{-\pi x^2}$ y veamos que
$$\hat{f}(\omega)=e^{-\pi\omega^2}$$

Notar que $\hat{f}(\omega)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}e^{-2\pi i x\omega}\,dx$ verifica $\hat{f}(0)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x^2}\,dx=1$ ✓

Así, podemos asumir $\omega\neq 0$. Si $\omega>0$ consideramos el compacto



$$I_j := \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

y sea $f(z)=e^{-\pi z^2}$. El Teorema de Cauchy implica que $\int_{\partial K_R}f(z)\,dz=0$.

Por otro lado:

- $I_1=\int_{-R}^{R}f(t)\,dt \xrightarrow{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}}e^{-\pi t^2}\,dt=1$ ✓
- $I_3=\int_{R}^{-R}f(t+i\omega)\,dt=-\int_{-R}^{R}e^{-\pi(t+i\omega)^2}\,dt=-e^{\pi\omega^2}\int_{-R}^{R}e^{-\pi t^2}e^{-2\pi i t\omega}\,d\omega$

  y luego $I_3 \xrightarrow{R\to+\infty} -e^{\pi\omega^2}\hat{f}(\omega)$ ✓
- $I_2=\int_0^{\omega}f(R+it)\,i\,dt=\int_0^{\omega}e^{-\pi(R^2+2iRt-t^2)}\cdot i\,dt$

  $\Rightarrow |I_2|\leq C_\omega\,e^{-\pi R^2}\xrightarrow{R\to+\infty}0$ y similarmente $|I_4|\xrightarrow{R\to+\infty}0$.

Finalmente, $0=I_1+I_2+I_3+I_4\xrightarrow{R\to+\infty}1-e^{\pi\omega^2}\hat{f}(\omega)$, ie, $\hat{f}(\omega)=e^{-\pi\omega^2}$.

El caso $\omega<0$ es completamente análogo ✓

Ejercicio Sea $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ donde $\mu\in\mathbb{R}$ y $\sigma\in\mathbb{R}^{>0}$. Calcular $\hat{f}(\omega)$.

② Distribución de Cauchy: Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Vimos en §27 (pág 78) que $\hat{f}(-\omega) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \dfrac{e^{2\pi i \omega x}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-2\pi\omega}$ para $\omega > 0$.
De manera similar (eg. usando el Teorema de residuos) se calcula que $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-2\pi\omega}$ para $\omega > 0$, ie,

$$\hat{f}(\omega) = \pi e^{-2\pi|\omega|} \quad \text{para todo } \omega \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio Sea $f(x) = \dfrac{1}{\pi\gamma\left(1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)}$ donde $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}^{>0}$.

Calcular $\hat{f}(\omega)$.

③ Distribución de Laplace (o doble exponencial): Sea $f(x) = e^{-2\pi|x|}$.

El Ejemplo ②, junto con el Teorema de inversión de Fourier, implica que:

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_{\mathbb{R}} \pi e^{-2\pi|\omega|} e^{2\pi i x\omega}\,d\omega \underset{\omega\mapsto -t}{\overset{x\mapsto\omega}{\iff}} \frac{1}{1+\omega^2} = \int_{\mathbb{R}} \pi e^{-2\pi|t|} e^{-2\pi i t\omega}\,dt$$

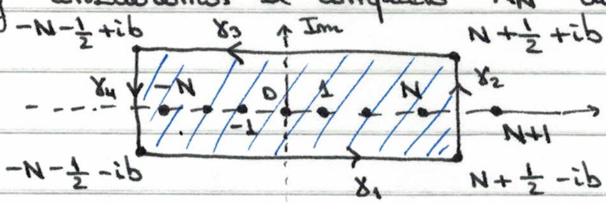
y luego $\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+\omega^2}$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Ejercicio Sea $f(x) = \dfrac{1}{2b} e^{-|x-\mu|/b}$ donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular $\hat{f}(\omega)$.

Teorema (fórmula de Poisson): Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Dem: Sup. que $f \in \mathcal{F}_a$ y sea b tal que $0 < b < a$.
Notemos que la función $g(z) := 1/(e^{2\pi i z} - 1)$ posee polos simples en cada $z = n \in \mathbb{Z}$ y además $\operatorname{Res}(g, n) = 1/(2\pi i)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
$\Rightarrow f(z)/(e^{2\pi i z}-1)$ posee polos simples en cada $z = n \in \mathbb{Z}$ y además $\operatorname{Res}\left(f(z)/(e^{2\pi i z}-1), n\right) = f(n)/2\pi i$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
Sea $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y consideremos el compacto K_N dado por:



$$I_{\gamma_j} := \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz$$

Luego, el Teorema de Residuos implica que

$$\int_{\partial K_N} \frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz = 2\pi i \sum_{a\in K_N} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}, a\right) = \sum_{n=-N}^{N} f(n)$$

Dado que $f \in \mathcal{F}$, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} f(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ converge ✓ y además
$|I_{\gamma_2}|, |I_{\gamma_4}| \longrightarrow 0$ cuando $N \longrightarrow +\infty$ ✓

Luego, basta analizar $\lim_{N\to+\infty} I_{\gamma_1}$ y $\lim_{N\to+\infty} I_{\gamma_3}$:

Notar por un lado que si $z(t) = t - ib$ pertenece a γ_1, entonces se tiene $|e^{2\pi i z(t)}| = e^{2\pi b} > 1$ pues $b > 0$. Así, dado que $\frac{1}{w-1} = \sum_{n\geq 0} w^{-(n+1)}$ si $|w| > 1$, tenemos que

$$\frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} = e^{-2\pi i z} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi i n z} \quad \text{para todo } z \in \gamma_1 .$$

De manera similar, dado que $|e^{2\pi i z}| < 1$ si $z \in \gamma_3$, tenemos que

$$\frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} e^{2\pi i n z} \quad \text{para todo } z \in \gamma_3$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \lim_{N\to+\infty} \left(\int_{\gamma_1} f(z) \left(e^{-2\pi i z} \sum_{n\geq 0} e^{-2\pi i n z} \right) dz + \int_{\gamma_3^-} f(z) \left(\sum_{n\geq 0} e^{2\pi i n z} \right) dz \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} \int_{\gamma_1} f(z) e^{-2\pi i (n+1) z}\, dz + \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} \int_{\gamma_3^-} f(z) e^{2\pi i n z}\, dz$$

Usando que $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x - ib)\, e^{-2\pi i (x - ib)\omega}\, dx$ (ver pág 83), y similar para la traslación $x \mapsto x + ib$, obtenemos:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i (n+1) x}\, dx + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i n x}\, dx$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n+1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(-n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \qquad \blacksquare$$

Ejercicio Para todo $t \in \mathbb{R}^{>0}$, se define la función theta

$$\Theta(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$$

Probar, usando adecuadamente la fórmula de Poisson, que

$$\Theta(t) = t^{-1/2}\, \Theta(1/t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}^{>0} .$$

Ejercicio Probar que para todo $a \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a}{a^2 + n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi a |n|} = \coth(\pi a) .$$

{Cultura general} La función zeta de Riemann $\zeta(z) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}$ es holomorfa para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(z) > 1$ (gracias al M-test de Weierstrass). Más aún, se puede probar que para $\mathrm{Re}(z) > 1$ se tiene que

$$\pi^{-z/2}\, \Gamma(z/2)\, \zeta(z) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{(z/2)-1} \left(\Theta(u) - 1 \right) du .$$

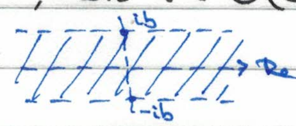
⚠ La ecuación funcional de la función theta $\Theta(t) = t^{-1/2}\, \Theta(1/t)$ permite extender analíticamente la función zeta de Riemann a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

§30. Teorema de Phragmén–Lindelöf y Teorema de Payley–Wiener

En la sección anterior, probamos que si $f \in \mathcal{F}$ entonces
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i x \omega}\, d\omega \quad , \text{ donde } \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx .$$
Sin embargo, es posible probar que el Teorema de inversión de Fourier sigue valiendo si f y $\hat{f}$ son funciones de decrecimiento moderado:
$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad |\hat{f}(\omega)| \leq \frac{A'}{1+\omega^2} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} .$$

Es natural entonces preguntarse por condiciones que nos aseguren que podemos usar técnicas de análisis complejo (y no sólo análisis real):

Teorema: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función de decrecimiento moderado, y supongamos que que existen constantes $a, A \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que
$$|\hat{f}(\omega)| \leq A e^{-2\pi a |\omega|} \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$
Entonces, f es la restricción a $\mathbb{R}$ de una función $f(z)$, con $f \in \mathcal{O}(S_b)$ para todo b tal que $0 < b < a$. Aquí:
$$S_b \overset{\text{def}}{=} \{ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\operatorname{Im}(z)| < b \}$$



Dem: Para $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, se define $f_m(z) = \int_{-m}^{m} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}\, d\omega$.
Dado que $F(z,\omega) = \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}$ es continua y $F(z, \omega_0) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ para todo $\omega_0 \in [-m, m]$ fijo, tenemos que $f_m \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ es entera $\forall m \geq 1$ ✓
Por otro lado, notamos que nuestra hipótesis sobre $\hat{f}$ implica que
$$\left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}\, d\omega \right| \leq A \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi (a-b)|\omega|}\, d\omega < +\infty \quad \text{para todo } b < a$$
De manera similar, tenemos que para todo $z \in S_b$ se cumple que
$$\left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}\, d\omega - f_m(z) \right| \leq A \int_{|\omega| \geq m} e^{-2\pi (a-b)|\omega|}\, d\omega \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

y por ende $f(z) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{2\pi i \omega z}\, d\omega$ es límite uniforme de funciones holomorfas en S_b, de donde se deduce que $f \in \mathcal{O}(S_b)$ ✓ ∎

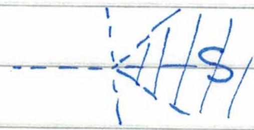
Corolario: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función de decrecimiento moderado, y supongamos que existen $a, A \in \mathbb{R}^{>0}$ tales que $|\hat{f}(\omega)| \leq A e^{-2\pi a |\omega|}$ $\forall \omega \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = 0$ para todo $x \in \,]c, d[$ intervalo abierto, entonces $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}$.

Dem: $f \in \mathcal{O}(S_b)$ tendría ceros no-aislados $\Rightarrow f \equiv 0$ en S_b ∎

Ejercicio Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ función continua de soporte compacto (i.e., $\exists R\in\mathbb{R}^{>0}$ tal que $f(x)=0$ si $|x|>R$). Probar que si $\hat{f}$ también es una función de soporte compacto, entonces $f\equiv 0$ en $\mathbb{R}$.

El Teorema de Paley-Wiener da una descripción precisa del comportamiento de funciones cuya transformada de Fourier es de soporte compacto. Para ello, será necesario el siguiente refinamiento del principio del máximo a abiertos no-acotados.

Teorema de Phragmén-Lindelöf: Sea



$$S:=\{z=re^{i\theta}\in\mathbb{C}^* \text{ tq } -\tfrac{\pi}{4}<\theta<\tfrac{\pi}{4}\},$$

y sea $f\in\mathcal{O}(S)$ continua en $\overline{S}$ tal que:

① $|f(z)|\le 1$ para todo $z\in\partial S$.

② $\exists A,B\in\mathbb{R}^{>0}$ tales que $|f(z)|\le Ae^{B|z|}$ para todo $z\in S$.

Entonces, $|f(z)|\le 1$ para todo $z\in S$.

Idea de demostración: La función $h_\varepsilon(z):=e^{-\varepsilon z^{3/2}}$, con $z^{3/2}:=\exp\left(\frac{3}{2}\ln(z)\right)$, es holomorfa en S y continua en $\overline{S}$. Además, $|h_\varepsilon(z)|\le 1\ \forall z\in\overline{S}$.
La hipótesis ② implica que $f_\varepsilon(z):=f(z)\,h_\varepsilon(z)$ verifica $|f_\varepsilon(z)|\xrightarrow{|z|\to+\infty}0$ y en particular es acotada, i.e., $M:=\sup_{z\in\overline{S}}|f_\varepsilon(z)|<+\infty$.
Podemos asumir que $f\not\equiv 0$ en S, i.e., $M\neq 0$. Luego, si $\{z_n\}_{n\geq 0}\subseteq\overline{S}$ es una sucesión tal que $\lim_{n\to+\infty}|f_\varepsilon(z_n)|=M$, entonces el hecho que $M\neq 0$ implica que $\{z_n\}_{n\geq 0}$ es acotada y luego posee un punto de acumulación z_∞ (Bolzano-Weierstrass), con $z_\infty\in\overline{S}$.
Como S es un abierto conexo, el principio del máximo implica que $z_\infty\in\partial S$ y por ende $M\overset{\text{def}}{=}|f_\varepsilon(z_\infty)|=|f(z_\infty)|\,|h_\varepsilon(z_\infty)|\le 1$ gracias ①.
Finalmente, notando que $h_\varepsilon(z)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}1\ \forall z\in\overline{S}$, tenemos que $|f(z)|\le 1$ para todo $z\in S$ ✓ ■

Obs: ① La función $f(z):=e^{z^2}$ verifica $|f(z)|=1\ \forall z\in\partial S$, pero $e^{x^2}\longrightarrow+\infty$ si $z=x\to+\infty$ es real, i.e., la hipótesis ② es necesaria.
② Rotando S, podemos extender el Teorema de Phragmén-Lindelöf a

$$S_{\theta_0}:=\{z=re^{i\theta}\in\mathbb{C}^* \text{ tq } \theta_0<\theta<\theta_0+\tfrac{\pi}{2}\}$$

donde $\theta_0\in\mathbb{R}$ es arbitrario. En efecto, si $a:=\theta_0-\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\varphi_a: S\xrightarrow{\sim}S_{\theta_0},\quad z\longmapsto e^{ia}z$$

es un biholomorfismo ✓

Teorema de Paley – Wiener: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua con decrecimiento moderado. Entonces:

f se extiende a $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ función entera tal que $\exists\, A \in \mathbb{R}^{>0}$ de tal suerte que $|f(z)| \leq A e^{2\pi M |z|}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $\iff$ La transformada de Fourier $\hat{f}$ está soportada en el compacto $[-M, M]$.

Dem: $(\Leftarrow)$ Sup. que $\hat{f}$ está soportada en $[-M,M]$ (ie, $\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > M$) y luego tanto $\hat{f}$ como f son funciones de decrecimiento moderado

$$\Rightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x}\, d\omega = \int_{-M}^{M} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega x}\, d\omega$$

Luego, $f(z) := \int_{-M}^{M} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i \omega z}\, d\omega$ es una función entera que coincide con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuando $z = x \in \mathbb{R}$. Si $z = x + iy$, entonces $|e^{2\pi i \omega z}| = e^{-2\pi \omega y}$ y luego

$$|f(z)| \leq \int_{-M}^{M} |\hat{f}(\omega)|\, e^{-2\pi \omega y}\, d\omega \leq A e^{2\pi M |z|} \quad \text{para cierta } A \in \mathbb{R}^{>0} \ \checkmark$$

$(\Rightarrow)$ La demostración será separada en varios pasos, donde cada uno irá debilitando las hipótesis del paso anterior:

$\boxed{\text{Paso 1}}$ Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ y supongamos que $\exists\, A' \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|f(x+iy)| \leq A' \frac{e^{2\pi M |y|}}{1+x^2} \qquad (\star)$$

y veamos que $\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > M$. (Notar que $(\star) \Rightarrow |f(z)| \leq A e^{2\pi M |z|}$):

Si $\omega > M$, entonces para $y > 0$ tenemos:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \omega x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x - iy) e^{-2\pi i \omega (x - iy)}\, dx$$

$$\Rightarrow |\hat{f}(\omega)| \overset{(\star)}{\leq} A' \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi y M} \cdot e^{-2\pi y \omega}}{1+x^2}\, dx = C e^{-2\pi y (\omega - M)} \xrightarrow{y \to +\infty} 0$$

ie, $\hat{f}(\omega) = 0$ si $\omega > M$. De manera análoga, $\hat{f}(\omega) = 0$ si $\omega < -M$ $\checkmark$

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ y supongamos que $\exists\, A \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que

$$|f(x+iy)| \leq A e^{2\pi M |y|} \qquad (\star\star)$$

y veamos que $\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > M$ (Notar que $(\star) \Rightarrow (\star\star) \Rightarrow |f(z)| \leq A e^{2\pi M |z|}$):

Si $\omega > M$, definamos para $\varepsilon > 0$ la función

$$f_\varepsilon(z) := \frac{f(z)}{(1 + i\varepsilon z)^2}$$

donde $\dfrac{1}{|1 + i\varepsilon z|^2} = \dfrac{1}{(1 - \varepsilon y)^2 + \varepsilon^2 x^2} \leq 1$ si $y \leq 0$ y $f_\varepsilon(z) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Luego, $\hat{f}_\varepsilon(\omega) \longrightarrow \hat{f}(\omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$ puesto que:

$$|\hat{f}_\varepsilon(\omega)-\hat{f}(\omega)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left(1-\frac{1}{1+\varepsilon^2x^2}\right) dx$$

$$\le \varepsilon^2\tilde{A}\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+\varepsilon^2x^2)}\, dx \overset{\boxed{\text{Ejercicio}}}{=} \varepsilon^2\tilde{A}\cdot\frac{\pi}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Sin embargo, dado que $y \le 0$, tenemos que para todo $\varepsilon>0$ se cumple:

$$|f_\varepsilon(x+iy)| \le A'' \frac{e^{2\pi M|y|}}{1+x^2}$$

$\overset{\text{Paso 1}}{\Longrightarrow}$ $\hat{f}_\varepsilon(\omega)=0$ si $\omega>M$ y luego, haciendo $\varepsilon\to 0$, $\hat{f}(\omega)=0$ si $\omega>M$.

De manera análoga, considerando $y \ge 0$ y usando $1/(1-i\varepsilon z)^2$, se prueba que $\hat{f}(\omega)=0$ si $\omega<-M$ ✓

$\boxed{\text{Paso 3}}$ Las hipótesis del Teorema implican $(\star\star)$:

Reescalando f si fuera necesario, podemos suponer que $|f(x)|\le 1$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (pues f posee decrecimiento moderado en $\mathbb{R}$) y que para todo $z\in\mathbb{C}$ se cumple $|f(z)|\le e^{2\pi M|z|}$. Veamos que esto implica que

$$|f(x+iy)| \le e^{2\pi M|y|} \qquad (\star\star)$$

Para ello, consideremos la región

$$S := \{z = re^{i\theta}\in\mathbb{C}^* \text{ tq } 0<\theta<\tfrac{\pi}{2}\}$$

y definamos $F(z) := f(z)\,e^{2\pi i Mz}$ función entera.

Notar que $F(x)=f(x)\,e^{2\pi iMx}$ y luego $|F(x)|=|f(x)|\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$, y del mismo modo $F(iy)=f(iy)\,e^{-2\pi My}$ y luego $|F(iy)| \le \underbrace{e^{2\pi My}\cdot e^{-2\pi My}}_{=1}$

$\Rightarrow |F(z)|\le 1$ para todo $z\in\partial S$ ✓

Más aún, $|F(z)| = |f(z)|\,|e^{2\pi iMz}| \le c_1 e^{c_2|z|}$ $\forall z\in S$ ✓

Luego, el Teorema de Phragmén – Lindelöf implica que $|F(z)|\le 1$ $\forall z\in\overline{S}$, i.e. $|f(z)|\,e^{-2\pi My}\le 1 \iff |f(z)|\le e^{2\pi My}$ $\forall z\in\overline{S}$.

El mismo argumento, aplicado a los otros 3 cuadrantes, implica que $|f(z)|\le e^{2\pi M|y|}$ $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$, i.e., $(\star\star)$ ✓ ■

Obs: Intercambiando los roles de f y $\hat{f}$ (e.g. mediante el Teorema de Inversión de Fourier), el Teorema de Paley-Weiner señala que una función $f\in M(\mathbb{R})$ tiene soporte compacto si y sólo si $|\hat{f}(z)|\le Ae^{B|z|}$ $\forall z\in\mathbb{C}$. Así:

"El Teorema de Paley-Wiener caracteriza la imagen de $C_0^\infty(\mathbb{R})$, las funciones suaves de soporte compacto, al aplicar la Transformada de Fourier"

§31. Espacio de Schwartz y Aplicaciones a EDP

En esta sección estudiaremos el espacio de Schwartz de "funciones de decrecimiento rápido" que, a pesar de ser un poco más restrictivo que el espacio de funciones de decrecimiento moderado $M(\mathbb{R})$, tiene la ventaja de ser un espacio conveniente para realizar cálculos.

Def: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$!) función de clase $\mathcal{C}^\infty$. Decimos que f tiene decrecimiento rápido si:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \, |f^{(\ell)}(x)| < +\infty \quad \text{para todo } k, \ell \geq 0.$$

Denotamos por $S(\mathbb{R})$ al $\mathbb{R}$-ev de funciones de decrecimiento rápido, llamado el espacio de Schwartz de $\mathbb{R}$.

Ejemplos:

① Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $f' \in S(\mathbb{R})$. En part, $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo diferenciación (ie, $\frac{d}{dx} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ es un endomorfismo).

② Si $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $x \cdot f(x) \in S(\mathbb{R})$. En part, $S(\mathbb{R})$ es cerrado bajo multiplicación por polinomios (ie, $S(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}[x]$-módulo).

③ Para todo $a > 0$, la gaussiana $f(x) = e^{-ax^2}$ pertenece a $S(\mathbb{R})$.

④ Si $f(x) = e^{-|x|}$, entonces $f \in M(\mathbb{R})$ pero $f \notin S(\mathbb{R})$ (pues $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$).

Ejercicio útil Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Probar que la función bump (o función test) definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \text{ ó } x \geq b \\ e^{-1/(x-a)}\, e^{-1/(x-b)} & \text{si } a < x < b \end{cases}$$

pertenece a $S(\mathbb{R})$.

Obs: Si $f \in S(\mathbb{R}) \subseteq M(\mathbb{R})$, entonces

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx$$

está bien definida.

⚠ En ocasiones, escribimos $\mathcal{F}[f] := \hat{f}$ para denotar la transformada de Fourier de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De manera similar, escribimos $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$ siempre que el Teorema de Inversión de Fourier sea válido (eg, si $f, \hat{f} \in M(\mathbb{R})$).

Prop: Sea $f \in S(\mathbb{R})$, entonces:

① $\mathcal{F}[f'(x)](\omega) = 2\pi i \omega \hat{f}(\omega)$.

② $\mathcal{F}[-2\pi i x f(x)](\omega) = \hat{f}'(\omega)$.

Dem: Para ①, integramos por partes

$$\int_{-N}^{N} f'(x)\, e^{-2\pi i x \omega}\, dx = \left[f(x) e^{-2\pi i x \omega} \right]_{-N}^{N} + 2\pi i \omega \int_{-N}^{N} f(x) e^{-2\pi i x \omega}\, dx$$

Dado que $f \in S(\mathbb{R}) \subseteq M(\mathbb{R})$, obtenemos la fórmula deseada cuando $N \to +\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i x \omega}\, dx = 2\pi i \omega \hat{f}(\omega) \quad \checkmark$$

Para ②, probaremos simultáneamente que $\hat{f}$ es diferenciable y calcularemos $\hat{f}'$:

Sea $\varepsilon > 0$ y $h \in \mathbb{R}$, y definamos $g(x) := -2\pi i x f(x)$. Entonces:

$$\frac{\hat{f}(\omega+h) - \hat{f}(\omega)}{h} - \hat{g}(\omega) \underset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega} \left(\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right) dx$$

Como $f(x)$ y $x f(x)$ pertenecen a $S(\mathbb{R})$, $\exists N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que

$$\int_{|x| \geq N} |f(x)|\, dx \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \int_{|x| \geq N} |x| |f(x)|\, dx \leq \varepsilon \quad \checkmark$$

Además, dado que $(e^{-2\pi i x h})'(0) = -2\pi i x$, para $|x| \leq N$ (compacto)

$\exists\, \delta > 0$ tq si $|h| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| \leq \frac{\varepsilon}{N}$$

Luego, para $|h| < \delta$ tenemos que

$$\left| \frac{\hat{f}(\omega+h) - \hat{f}(\omega)}{h} - \hat{g}(\omega) \right| \leq \int_{-N}^{N} |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right| dx + C\varepsilon$$

$$\leq C' \varepsilon$$

$\Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f}'(\omega) = \hat{g}(\omega)$, con $g(x) = -2\pi i x f(x)$ ✓ ■

Como consecuencia de lo anterior obtenemos que la transformada de Fourier define un automorfismo del espacio de Schwartz:

Teorema: Sea $f \in S(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

Dem: Notar que si $g \in S(\mathbb{R})$ entonces $\hat{g}$ es acotada (cf. Lema en §28, pág 81)

ie, $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{g}(\omega)| < +\infty$.

Luego, si consideramos $g(x) := \frac{1}{(2\pi i)^k} \frac{d^k}{dx^k} \left((-2\pi i x)^\ell f(x) \right) \in S(\mathbb{R})$

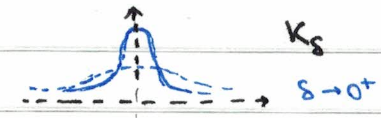
$\overset{\text{Prop}}{\Rightarrow} \hat{g}(\omega) = \omega^k \hat{f}^{(\ell)}(\omega)$ es acotada. Así, $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ ✓ ■

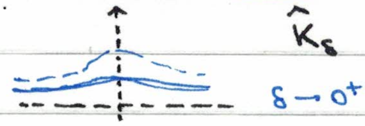
Terminología (Kernel Gaussiano):

Recordemos que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$, y que $f(x) = e^{-\pi x^2}$ es su propia transformada de Fourier, i.e., $\hat{f}(\omega) = e^{-\pi \omega^2}$.

Más generalmente, para todo $\delta > 0$ definimos el kernel Gaussiano

$$\boxed{K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\pi x^2/\delta}, \quad \text{con } \hat{K}_\delta(\omega) = e^{-\pi \delta \omega^2}}$$





Notar que si $\delta \to 0^+$ entonces K_δ se concentra en el origen y $\hat{K}_\delta$ tiende a aplanarse, i.e., K_δ y $\hat{K}_\delta$ no pueden concentrarse simultaneamente en el origen: la demostración matemática del "Principio de Incertidumbre de Heisenberg" se basa en esta idea!

Tal como veremos al analizar ciertas Ecuaciones en Derivadas Parciales, los "kernel" son útiles para modificar funciones mediante convolución:

Def: Sean $f, g \in S(\mathbb{R})$. Definimos su convolución mediante

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt.$$

En particular, $f * g = g * f$ y está bien definida (pues para $x \in \mathbb{R}$ fijo, la función $f(x-t)\, g(t)$ tiene decrecimiento rápido en t).

Prop: Sean $f, g \in S(\mathbb{R})$. Entonces:

① se cumple la fórmula multiplicativa

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, g(y)\, dy$$

② $f * g \in S(\mathbb{R})$.

③ $\mathcal{F}[f * g](\omega) = \hat{f}(\omega)\, \hat{g}(\omega)$

Idea de Demostración (admitiendo algunos resultados de Teoría de la Medida):

① La función $F(x,y) := f(x)\, g(y)\, e^{-2\pi i x y}$ es de decrecimiento moderado al fijar la variable x o y, $F_1(x) := \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dy$ es de decrecimiento moderado y $F_2(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dx$ también. Así, el Teorema de Fubini implica que $\int_{\mathbb{R}} F_1(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} F_2(y)\, dy$, i.e., ① ✓

② Dado que $g \in S(\mathbb{R})$, se tiene que $\forall \ell \geq 0$ se cumple (para $y \in \mathbb{R}$ fijo):

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell\, |g(x-y)| \leq A_\ell\, (1 + |y|)^\ell$$ Ejercicio

Luego, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^l (f*g)(x)| \leq A_l \int_{\mathbb{R}} |f(y)| (1+|y|)^l \, dy < +\infty \quad \forall l \geq 0$.

De manera similar, el hecho que $g \in S(\mathbb{R})$ permite derivar bajo el signo integral y probar que $(f*g)^{(k)}(x) = (f*g^{(k)})(x)$ $\forall k \geq 1$ y luego, como $g^{(k)} \in S(\mathbb{R})$, el cálculo anterior implica que $f*g \in S(\mathbb{R})$ ✓

Finalmente, ③ se deduce como en ① al considerar

$$F(x,y) := f(y)\, g(x-y)\, e^{-2\pi i x \omega} \quad ✓$$

■

Teorema: Sea $\delta > 0$. El kernel Gaussiano

$$K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta}$$

verifica que:

① $K_\delta(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(x)\, dx = 1$.

② Para todo $\eta > 0$, $\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|\, dx \xrightarrow{\delta \to 0} 0$.

③ Para toda $f \in S(\mathbb{R})$, $(f * K_\delta)(x) \xrightarrow{\delta \to 0} f(x)$ uniformemente en x.

Dem: El hecho que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$ implica ① ✓ Para ②, notamos que $\int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|\, dx \overset{x = y\sqrt{\delta}}{=} \int_{|y|>\eta/\sqrt{\delta}} e^{-\pi y^2} dy \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ ✓

Para ③, notamos que si $f \in S(\mathbb{R})$ entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$: Para todo $\varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ tq $|f(x)| < \varepsilon$ si $|x| \geq R$.

Además, f es unif. continua en el compacto $[-2R, 2R]$ y luego $\exists \eta > 0$ tq si $|x|, |y| \leq 2R$ y $|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

podemos asumir $\eta \leq R$

Por otro lado, si $|x| \leq 2R$ y $|y| > 2R$ entonces si $|x-y| < \eta$:

$$|x| \geq |y| - |x-y| \geq 2R - \eta \geq R \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2\varepsilon \quad ✓$$

Similar: $|x| > 2R$ y $|y| > 2R$: $|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$ ✓

Finalmente, se tiene que:

$$(f * K_\delta)(x) - f(x) \overset{①}{=} \int_{\mathbb{R}} K_\delta(t) (f(x-t) - f(x))\, dt$$

y así, dado que $K_\delta \geq 0$, tenemos

$$|(f*K_\delta)(x) - f(x)| \leq \underbrace{\int_{|t|>\eta} K_\delta(t) |f(x-t) - f(x)|\, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{|t|\leq\eta} K_\delta(t) |f(x-t) - f(x)|\, dt}_{I_2}$$

Aquí, $I_1 \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ por ② y dado que f es acotada, y $I_2 \xrightarrow{\delta \to 0} 0$ pues f uniformemente continua y $\int_{\mathbb{R}} K_\delta(t)\, dt = 1$ ✓ ■

Las ideas utilizadas en el resultado anterior permiten resolver EDP al escoger "buenos kernel":

Supongamos que queremos resolver la **Ecuación de Calor** 1-dimensional, i.e., encontrar $u(x,t)$ tal que

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{para todo } x\in\mathbb{R} \text{ y } t>0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{para todo } x\in\mathbb{R} \leftarrow \text{"Temperatura inicial"} \end{cases}$$

Al tomar transformada de Fourier, resp. a la variable x, a la Ecuación (E):

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\omega,t) = (2\pi i\omega)^2\,\hat{u}(\omega,t) = -4\pi^2\omega^2\,\hat{u}(\omega,t)$$

Para ω fijo, obtenemos una EDO en la variable t de solución

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)\,e^{-4\pi^2\omega^2 t}$$

donde:

i) $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega)$ y luego $A(\omega) = \hat{f}(\omega)$.

ii) La función $e^{-4\pi^2\omega^2 t}$ es la transformada de Fourier del **kernel de Calor** $H_t(x) := K_\delta(x)$ con $\delta = 4\pi t$, i.e.,

$$\boxed{H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,e^{-x^2/4t} \quad \text{y} \quad \hat{H}_t(\omega) = e^{-4\pi^2\omega^2 t}}$$

Teorema: Dada $f\in S(\mathbb{R})$, definimos $u(x,t) := (f * H_t)(x)$ $\forall t>0$. Entonces:

① La función u es de clase C^∞ para $x\in\mathbb{R}$ y $t>0$, y además u verifica la Ecuación de Calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

② $u(x,t) \xrightarrow{t\to 0} f(x)$ uniformemente en $x\in\mathbb{R}$.

Dem: Como $u \overset{\text{def}}{=} f * H_t$, tenemos que $\hat{u} = \hat{f}\cdot\hat{H}_t = \hat{f}(\omega)\,e^{-4\pi^2\omega^2 t}$ y luego $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\,e^{-4\pi^2 t\omega^2}\,e^{2\pi i\omega x}\,d\omega$. Así, ① se obtiene derivando dicha integral, mientras que ② es consecuencia directa del Teorema anterior dado que $\delta = 4\pi t \to 0$ cuando $t\to 0$ ✓ ■

Ejercicio* Considere la región $\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\in\mathbb{R},\ y>0\}$ y considere la **Ecuación de Laplace**

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x,0) = f(x) & \text{para todo } x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

① Deducir que $\hat{u}(\omega,y) = \hat{f}(\omega)\,e^{-2\pi|\omega|y}$ si $f\in S(\mathbb{R})$.

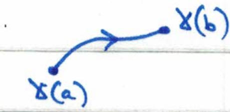
② Probar que $u(x,y) = (f * P_y)(x)$ soluciona la EDP anterior, donde $P_y(x) := \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{y}{x^2+y^2}$ es el **kernel de Poisson**.

Para finalizar el curso, discutiremos de manera introductoria sobre **propiedades topológicas globales** de las funciones holomorfas y sobre la teoría de **funciones sub-armónicas** (que pueden pensarse como el análogo complejo de las funciones convexas).

§32. Homotopía y Grupo fundamental

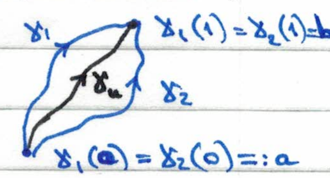
Sea X un espacio topológico arbitrario (ver §20, pág 49), que para efectos prácticos bastará pensar en $X = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío. Recordemos que si $a<b$ son reales, entonces un **camino** en X es una función continua

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow X \quad , t \longmapsto \gamma(t)$$



Más aún, decimos que γ es un **camino cerrado** si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Sin pérdida de generalidad (reparametrizando), podemos asumir que $[a,b]=[0,1]$.

Def: Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow X$ dos caminos tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y $\gamma_1(1) = \gamma_1(1)$. Decimos que γ_1 y γ_2 son **homotópicamente equivalentes**, y escribimos $\gamma_1 \sim \gamma_2$, si existe una función continua



$$h : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X \quad \text{tal que}$$

i) $h(0,t) = \gamma_1(t)$, $h(1,t) = \gamma_2(t)$ $\quad \forall t \in [0,1]$

ii) $h(u,0) = a$ y $h(u,1) = b$ $\quad \forall u \in [0,1]$

donde $a := \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ y $b := \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. En tal caso, decimos que h es una **homotopía** entre γ_1 y γ_2.

Obs: ① En términos prácticos, una homotopía es una "deformación continua" $\gamma_u(t) := h(u,t)$ desde γ_1 a γ_2 manteniendo los extremos fijos.

② Si $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ continua biyectiva, y $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$ es una reparametrización, entonces $h(u,t) := \gamma_1((1-u)t + u\varphi(t))$ es una homotopía ✓
Así, $\gamma_1 \sim \gamma_2 \overset{\text{def}}{=} \gamma_1 \circ \varphi$ siempre que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$.

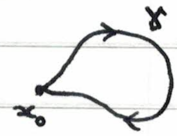
③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Demostrar que la relación de homotopía es una **relación de equivalencia**: (i) $\gamma \sim \gamma$ (reflexiva); (ii) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1$ (simétrica) y (iii) $\gamma_1 \sim \gamma_2$ y $\gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3$ (transitiva).

Indicación para (iii): Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ por h' y $\gamma_2 \sim \gamma_3$ por h'', considerar

$$h(u,t) := \begin{cases} h'(2u,t) & \text{si } u \in [0,1/2] \\ h''(2u-1,t) & \text{si } u \in [1/2,1] \end{cases}$$

Def: Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$ un "punto base". Definimos el **grupo fundamental** de X relativo a $x_0 \in X$ como:

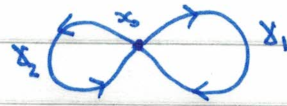
$$\pi_1(X,x_0) := \left\{ \begin{array}{l} \text{caminos } \underline{\text{cerrados}}\ \gamma : [0,1] \to X \\ \text{tales que } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \end{array} \right\} \Big/ \sim_{\text{homotopía}}$$



Obs importante: $\pi_1(X,x_0)$ se puede dotar naturalmente de estructura de **grupo** (que, en general, no es abeliano):

i) **Producto**: si $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X,x_0)$ se define $[\gamma_1]\cdot[\gamma_2] := [\gamma]$

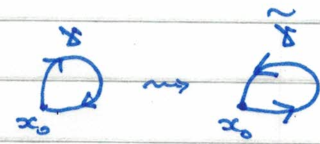
donde $\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases}$



ii) **Neutro**: $e(t) := x_0$ para todo $t \in [0,1]$.

iii) **Inverso**: si $[\gamma] \in \pi_1(X,x_0)$ se define $[\gamma]^{-1} := [\tilde{\gamma}]$

donde $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$



Ejercicio Con la notación anterior, probar que:

i) $([\gamma_1]\cdot[\gamma_2])\cdot[\gamma_3] = [\gamma_1]\cdot([\gamma_2]\cdot[\gamma_3])$ considerando las parametrizaciones

y "moviendo" $[1/4,1/2]$ a $[1/2,3/4]$.

ii) Probar que $[\gamma]\cdot[e] = [e]\cdot[\gamma] = [\gamma]$ en $\pi_1(X,x_0)$.

iii) Probar que $[\gamma]\cdot[\gamma]^{-1} = [\gamma]^{-1}[\gamma] = [e]$ en $\pi_1(X,x_0)$.

§33. Homología singular

Sea X un espacio topológico, que fijaremos durante toda esta sección.

La **homología** es una herramienta topológica que permite extender el concepto de camino (de dimensión real 1) a objetos de dimensión superior!

Def: Sea $p \in \mathbb{N}$. Definimos el **p-símplex** (o símplice) **estándar** como

$$\Delta_p := \{(t_0,\dots,t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \text{ tq } t_j \geq 0 \text{ y } t_0 + t_1 + \dots + t_p = 1\}.$$

Ej.

etc.

Def: El grupo de **p-cadenas** (singulares) en X, denotado $C_p(X,\mathbb{Z})$, es el conjunto de sumas formales finitas de la forma

$$[\sigma] := \sum_{\text{finita}} m_j [\sigma_j], \quad \text{donde } m_j \in \mathbb{Z} \text{ y } \sigma_j : \Delta_p \to X \text{ continua}$$

(ie, el grupo abeliano libre generado por el conjunto $\mathcal{C}^0(\Delta_p, X)$ de funciones continuas $\Delta_p \to X$).

Ejemplos:

0) Una <u>0-cadena</u> es una suma formal finita de <u>puntos</u> $\sum m_j [p_j]$, $m_j \in \mathbb{Z}$.

1) Una <u>1-cadena</u> es una suma formal finita de caminos $\sum m_j [\gamma_j]$, con $m_j \in \mathbb{Z}$ y $\gamma_j : [0,1] \to X$ continua. Aquí, identificamos Δ_1 con $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ mediante $t := t_1$ y $t_0 = 1-t$.

<u>Construcción</u> (borde): Construyamos $\partial_p : C_p(X,\mathbb{Z}) \to C_{p-1}(X,\mathbb{Z})$ de la manera siguiente.

i) Definimos $C_p(X,\mathbb{Z}) = \{0\}$ si $p<0$, y luego $\partial_p := 0$ si $p \leq 0$.

ii) Para $p>0$, definimos las funciones "cara" mediante

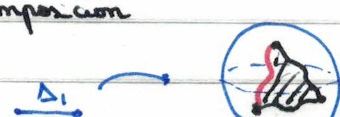
$$\delta_p^\ell : \Delta_{p-1} \to \Delta_p, \quad (t_0, t_1, \dots, t_{p-1}) \mapsto (t_0, \dots, t_{\ell-1}, 0, t_\ell, \dots, t_{p-1})$$

Eg.

Más generalmente, si $\sigma_j : \Delta_p \to X$ continua, la composición

$$\sigma_j \circ \delta_p^\ell : \Delta_{p-1} \to X$$

es la <u>cara de índice $\ell \in \{0, \dots, p\}$</u> de σ_j.



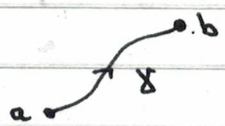
Para $\sigma_j : \Delta_p \to X$ continua, definimos $\partial_p[\sigma_j]$ como la suma alternada de sus caras:

$$\partial_p[\sigma_j] := \sum_{\ell=0}^{p} (-1)^\ell [\sigma_j \circ \delta_p^\ell] \in C_{p-1}(X,\mathbb{Z}).$$

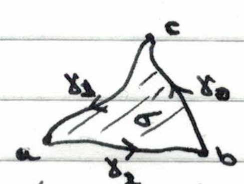
Para $[\sigma] = \sum_j m_j [\sigma_j]$ p-cadena arbitraria, definimos $\partial_p[\sigma] := \sum m_j \partial_p[\sigma_j]$.

⚠ La aplicación borde es $\mathbb{Z}$-lineal (ie, $\partial_p(a[\sigma]+[\tau]) = a\,\partial_p[\sigma] + \partial_p[\tau]$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ y $[\sigma],[\tau] \in C_p(X,\mathbb{Z})$) y cumple $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Eg.



$\partial_1[\gamma] = [b]-[a]$



$\partial_2[\sigma] = [\gamma_0] - [\gamma_1] + [\gamma_2]$

$$\Rightarrow \partial_1(\partial_2[\sigma]) = \partial_1([\gamma_0]-[\gamma_1]+[\gamma_2]) = ([c]-[b]) - ([c]-[a]) + ([b]-[a]) = 0.$$

<u>Def</u>: Definimos el subgrupo

i) De <u>p-ciclos</u> como $Z_p(X,\mathbb{Z}) := \ker \partial_p$ $\quad (\ni [\sigma]$ si $\partial_p[\sigma]=0)$

ii) De <u>p-bordes</u> como $B_p(X,\mathbb{Z}) := \operatorname{Im} \partial_{p+1}$ $\quad (\ni [\sigma]$ si $[\sigma] = \partial_{p+1}[\tau])$

Más aún, dado que $B_p(X,\mathbb{Z}) \subseteq Z_p(X,\mathbb{Z})$ (pues $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$), se define el <u>p-ésimo grupo de homología</u> de X como el cociente

$$\boxed{H_p(X,\mathbb{Z}) := Z_p(X,\mathbb{Z}) / B_p(X,\mathbb{Z})}$$

Obs: ① Un camino $\gamma : [0,1] \to X$ es un ciclo si y sólo si es un camino cerrado (ie, $\gamma(0) = \gamma(1)$), pues $\partial_1[\gamma] = [\gamma(1)] - [\gamma(0)]$.

② El camino constante $\gamma(t) = x_0$ siempre es un borde, pues $[\gamma] = \partial_2[\sigma]$ donde $\sigma : \Delta_2 \to X$, $(t_0,t_1,t_2) \mapsto \sigma(t_0,t_1,t_2) \equiv x_0$.

③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\gamma : [0,1] \to X$ un camino, y sea $\gamma^-(t) := \gamma(1-t)$ el camino recorrido en sentido opuesto. Probar que $[\gamma] + [\gamma^-]$ es un borde, ie, $[\gamma] + [\gamma^-] = 0 \iff [\gamma^-] = -[\gamma]$ en $H_1(X,\mathbb{Z})$.

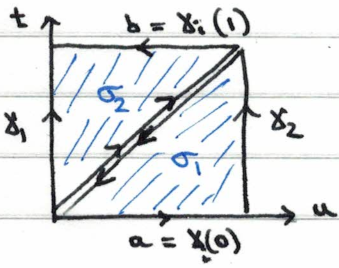
[Indicación: Considerar $\sigma(t_0,t_1,t_2) := \gamma(t_1)$]

Terminología: Sean $[\gamma], [\gamma']$ dos 1-ciclos. Decimos que $[\gamma]$ y $[\gamma']$ son homólogos si $[\gamma] = [\gamma']$ en $H_1(X,\mathbb{Z})$, ie, $\exists$ 2-cadena σ tq $\partial_2[\sigma] = [\gamma] - [\gamma']$. En tal caso, escribiremos $[\gamma] \sim [\gamma']$.

Prop: Si dos caminos γ_1 y γ_2 son homotópicamente equivalentes, entonces el 1-ciclo $[\gamma_2] - [\gamma_1]$ es un borde. En part, si γ_1 y γ_2 son caminos cerrados, entonces $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ en $H_1(X,\mathbb{Z})$, y luego hay un morfismo de grupos

$$\pi_1(X,x_0) \longrightarrow H_1(X,\mathbb{Z}),\ [\gamma] \mapsto [\gamma] \quad \text{bien definido.}$$

Dem:



$$\Rightarrow \partial_2([\sigma_1] + [\sigma_2]) = [\gamma_1^-] + [\gamma_2]$$
$$= [\gamma_2] - [\gamma_1] \quad \checkmark \quad \blacksquare$$

Notación: Si $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j] \in C_1(X,\mathbb{Z})$ es una 1-cadena (donde sólo escribimos los términos tales que $m_j \neq 0$), definimos el soporte de $[\gamma]$ por

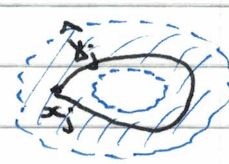
$$\mathrm{Supp}([\gamma]) := \bigcup_{\gamma} \mathrm{Im}(\gamma_j)$$

Hechos útiles (sin demostración):

① Sea $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j] \in Z_1(X,\mathbb{Z})$ un 1-ciclo. Entonces, existe un 1-ciclo $[\hat{\gamma}] = \sum \hat{m}_j [\hat{\gamma}_j]$ tal que cada $\hat{\gamma}_j$ es un camino cerrado y tal que $[\gamma] = [\hat{\gamma}]$ en $H_1(X,\mathbb{Z})$ y $\mathrm{Supp}([\gamma]) = \mathrm{Supp}([\hat{\gamma}])$.

② Mejor aún, si $X = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y si no imponemos la condición $\mathrm{Supp}([\gamma]) = \mathrm{Supp}([\hat{\gamma}])$, entonces:

Podemos asumir que cada $\hat{\gamma}_j$ verifica $\hat{\gamma}_j(0) = \hat{\gamma}_j(1) = x_j$, donde x_j es cualquier punto en la componente conexa del camino cerrado $\hat{\gamma}_j$.



③ El Hecho ① y el Hecho ② implican que si $X = \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, y si escogemos un punto x_j por cada componente conexa de X entonces el morfismo de grupos

$$\bigoplus_j \pi_1(X, x_j) \twoheadrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$$

es sobreyectivo.

En particular, si X es conexo entonces $\pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow H_1(X,\mathbb{Z})$ es sobreyectivo.

④ Por construcción, $H_1(X,\mathbb{Z})$ es un grupo abeliano (ie, conmutativo). Sin embargo, existen espacios topológicos conexos tales que $\pi_1(X,x_0)$ no es abeliano (eg. $X = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$), y por ende el kernel del morfismo de grupos $\pi_1(X,x_0) \twoheadrightarrow H_1(X,\mathbb{Z})$ es no trivial!

⑤ Dado un grupo G, el conmutador de G es el subgrupo más pequeño $N := [G,G]$ tal que el cociente $G/[G,G] =: G^{ab}$ es abeliano.

Teorema de Hurewicz - Poincaré: Supongamos que X es un espacio topológico conexo por caminos (ie, todo par de puntos puede ser conectado por un camino $\gamma : [0,1] \to X$). Entonces,

$$\pi_1(X,x_0)^{ab} \cong H_1(X,\mathbb{Z}).$$

En otras palabras, el grupo de homología $H_1(X,\mathbb{Z})$ es la abelianización del grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$.

Obs: En particular, si $\pi_1(X,x_0) = \{0\}$ entonces $H_1(X,\mathbb{Z}) = \{0\}$.

§34. Dominios estrellados y lema de Poincaré

En toda esta sección, denotamos por $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no-vacío.

Recordemos que si ω es una 1-forma de clase $\mathcal{C}^1$ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces podemos escribir

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n)\, dx_j = \sum_{j=1}^n f_j\, dx_j$$

En tal caso, el diferencial exterior de ω es la 2-forma diferencial

$$d\omega := \sum_{j=1}^n df_j \wedge dx_j \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_j = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j$$

Def: Decimos que la 1-forma ω es:

① Cerrada si $d\omega = 0$, ie, $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ para todos $1 \le i,j \le n$.

② Exacta si $\exists\, F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\omega = dF \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial F}{\partial x_j} dx_j$.

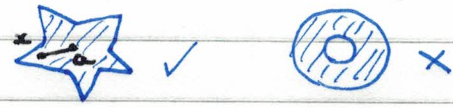
Obs importante: Toda 1-forma exacta es cerrada. En efecto, si $\omega = dF$ entonces $\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j \, dx_j$ con $f_j = \frac{\partial F}{\partial x_j}$. Luego, el Teorema de Schwarz implica que $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \underset{\text{Schwarz}}{=} 0$, ie, $d\omega = 0$.

El recíproco de lo anterior (¡bajo ciertas condiciones!) es un resultado clásico de Poincaré (probado por primera vez por Volterra en 1889):

Def: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no-vacío. Decimos que Ω es un **dominio estrellado** respecto a un punto $a \in \Omega$ si para todo $x \in \Omega$ el segmento

$$[a,x] := \{a + tx, \ t \in [0,1]\}$$

está contenido en Ω.



Lema de Poincaré: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio estrellado respecto a cierto $a \in \Omega$. Entonces, toda 1-forma cerrada en Ω es exacta (ie, si $d\omega = 0$ entonces existe $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\omega = dF$).

Dem: Trasladando Ω si fuera necesario, podemos asumir que $a = 0 \in \mathbb{R}^n$.
Sea $F(x) := \int_{[0,x]} \omega \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} f_j(tx_1, \dots, tx_n)\, x_j \, dt$

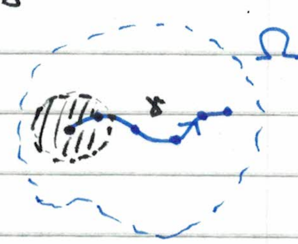
$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} t \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) x_j + f_i(tx_1, \dots, tx_m) \right) dt$$

$$\overset{\boxed{d\omega = 0}}{=} \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} t \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(tx_1, \dots, tx_m) x_j + f_i(tx_1, \dots, tx_m) \right) dt$$

$$\overset{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t f_i(tx_1, \dots, tx_m)\right) dt \overset{\text{TFC}}{=} f_i(x) \quad ✓ \quad \blacksquare$$

El Lema de Poincaré **no** es válido para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario.
Por ejemplo, $\omega = \frac{dz}{z}$ es cerrada en $\Omega = \mathbb{C}^* \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ pero **no** es exacta (pues $\int_{\Gamma(0,1)} \omega = 2\pi i \neq 0 = \int_{\Gamma(0,1)} dF$).

Obs útil: Sea ω una 1-forma cerrada en un abierto no-vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario y sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ un camino continuo (¡no necesariamente de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos!) entonces podemos definir $\int_\gamma \omega$ gracias al Lema de Poincaré:



Sea $K := \gamma([0,1]) \subseteq \Omega$ compacto y sea $\delta := \text{dist}(K, \Omega^c)$.
La continuidad uniforme de γ implica que existe una subdivisión $0 =: \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N =: 1$ de $[0,1]$

tal que cada segmento $\gamma([\tau_j, \tau_{j+1}])$ está contenido en $B(\gamma(\tau_j), \delta)$, el cual es un dominio estrellado (!). Así, el lema de Poincaré implica la existencia de primitivas locales F_j que permiten definir:

$$\int_{\gamma|_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}} \omega = \int_{\gamma|_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}} dF_j := F_j(\gamma(\tau_{j+1})) - F_j(\gamma(\tau_j)).$$

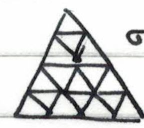
Así, definimos $\int_\gamma \omega := \sum_{j=0}^{N-1} F_j(\gamma(\tau_{j+1})) - F_j(\gamma(\tau_j))$, y esta definición es independiente de la subdivisión y de las primitivas escogidas.

<u>Def</u>: Sea ω una 1-forma cerrada en un abierto no-vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j] \in C_1(\Omega, \mathbb{Z})$ una 1-cadena en Ω. Definimos

$$\int_{[\gamma]} \omega := \sum m_j \int_{\gamma_j} \omega .$$

<u>Lema</u>: Si $[\gamma] = \partial[\sigma]$ es el borde de una 2-cadena $[\sigma] \in C_2(\Omega, \mathbb{Z})$ y ω es una 1-forma cerrada en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $\int_{[\gamma]} \omega = 0$.

<u>Dem</u>: Basta probar el resultado cuando $[\sigma]$ es un triángulo en Ω. En tal caso, podemos realizar una subdivisión en triángulos arbitrariamente pequeños σ_j y, dado que $\int_{\partial[\sigma]} \omega = \sum_j \int_{\partial[\sigma_j]} \omega$, podemos asumir que $\sigma_j \in B(x_j, \varepsilon_j)$ y que $\omega|_{B(x_j, \varepsilon_j)} = dF_j$ (Poincaré).


σ

Si $a_j, b_j, c_j \in \Omega$ son los vértices de σ_j, entonces:

$$\int_{\partial[\sigma_j]} \omega \overset{\text{def}}{=} (F_j(c_j) - F_j(b_j)) - (F_j(c_j) - F(a_j)) + (F_j(b_j) - F(a_j)) = 0 \checkmark \quad \blacksquare$$

<u>Corolario</u>: Sea ω una 1-forma cerrada en un abierto no-vacío $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, y sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos homotópicamente equivalentes en Ω. Entonces:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

En part, si γ es un camino <u>cerrado</u> en Ω entonces $\int_\gamma \omega$ es independiente de la clase de γ en $\pi_1(\Omega, x_0)$ o en $H_1(\Omega, \mathbb{Z})$.

<u>Dem</u>: Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ entonces $[\gamma_1] - [\gamma_2] = \partial[\sigma]$, y podemos aplicar el Lema $\checkmark$ $\blacksquare$

<u>Obs</u>: Si $\Omega \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, entonces la Ecuación de Cauchy-Riemann implica que $\omega := f(z)\,dz$ es una 1-forma cerrada, i.e., $d\omega = 0$. Por otro lado, si $K \subseteq \Omega$ es un compacto con borde ∂K de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos entonces podemos triangular K y notar que $[\partial K] = \partial[\sigma]$ para cierta $[\sigma] \in C_2(\Omega, \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow \int_{\partial K} \omega = \int_{\partial K} f(z)\,dz = 0 \quad \text{(cf. Teorema de Cauchy-Goursat !)}$$

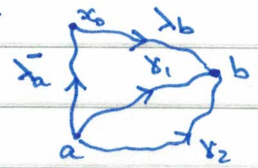
Def/Lema: Sea X un espacio topológico conexo por caminos. Decimos que X es **simplemente conexo** si verifica alguna de las condiciones equivalentes sgtes:

① Todo par de caminos con los mismos extremos son homotópicamente equiv.

② $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$ para todo $x_0 \in X$.

③ Existe $x_0 \in X$ tal que $\pi_1(X, x_0) = \{0\}$.

"③ ⇒ ①"



Ejercicio Probar que dichas condiciones son equivalentes.
[Indicación: ① ⇒ ② ⇒ ③ por definición. Basta ver que ③ ⇒ ①]

Ejemplo: Sean $\gamma, \gamma' : [0,1] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ caminos en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío.

① Si Ω es **convexo**, entonces $\gamma \sim \gamma'$ y luego $\pi_1(\Omega, x_0) = \{0\}$.
En efecto, $h(u,t) := (1-u)\gamma_1(t) + u\gamma_2(t)$ es una homotopía ✓

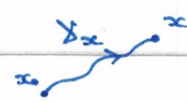
② Si Ω es un **dominio estrellado** resp. a $x_0 \in \Omega$, entonces $\pi_1(\Omega, x_0) = \{0\}$.
En efecto, $h(u,t) := (1-u)x_0 + u\gamma(t)$ es una homotopía $\gamma \sim e(t) \equiv x_0$ ✓

③ Si $\pi_1(\Omega, x_0) = \{0\}$, entonces $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(\Omega, x_0)^{ab} = \{0\}$.

⚠ Si $n \geq 3$, existen abiertos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = \{0\}$ pero $\pi_1(\Omega, x_0) \neq \{0\}$ (cf. Conjetura de Poincaré / Teorema de Perelmán❗)

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no-vacío y sea ω una 1-forma **cerrada** en Ω. Si $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = \{0\}$, entonces ω es exacta (ie, $\exists$ primitiva global $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\omega = dF$).

Dem: Restringiéndonos a una componente conexa, podemos asumir que Ω es conexo (y luego conexo por caminos). Fijemos un punto base $x_0 \in \Omega$:



Para todo $x \in \Omega$, fijemos un camino γ_x uniendo x_0 y x, y sea:
$F(x) := \int_{\gamma_x} \omega$, la cual está bien definida pues dos caminos diferentes γ_x y $\tilde{\gamma}_x$ verifican $[\gamma_x] - [\tilde{\gamma}_x] = \partial[\sigma]$, pues $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = \{0\}$ ✓
Finalmente, eligiendo γ_x como un camino poligonal (ie, unión de segmentos rectos) notamos que el mismo cálculo usado para probar el Lema de Poincaré implica que $dF = \omega$ ✓ ■

Recordemos que si $\Omega \subseteq \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, entonces la Ecuación de Cauchy-Riemann implica que $\omega = f(z)\,dz$ es cerrada.

Corolario: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío tal que $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = \{0\}$. Entonces, toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ posee una primitiva $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ (ie, $F'(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega$).

Teorema: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío tal que $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = \{0\}$, y sea $f \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ función holomorfa que no se anula en Ω. Entonces:

① $\exists\, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $f = e^g$, y dos posibles g_1, g_2 con $e^{g_j} = f$ difieren en $2\pi i k$, con $k \in \mathbb{Z}$, en cada componente conexa de Ω.

② $\forall n \geq 2$ entero, $\exists\, h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $h^n = f$, y dos posibles h_1, h_2 con $h_j^n = f$ cumplen $h_2(z) = \lambda h_1(z)$, con $\lambda^n = 1$, en cada comp. conexa de Ω.

Dem: Para ①, notamos que el corolario anterior implica que $h := f'/f$ posee una primitiva $H \in \mathcal{O}(\Omega)$. Además, se calcula:

$$(f e^{-H})' = (f' - hf) e^{-H} \equiv 0, \text{ ie, } f e^{-H} = c = e^{\lambda} \text{ constante.}$$

$\Rightarrow g := H + \lambda$ verifica $e^g = f$ ✓ Por propiedades de la exponencial compleja dos soluciones g_1 y g_2 difieren por $2\pi i k$ en cada comp. conexa de Ω.

② Sea g tal que $e^g = f$, entonces $h := \exp(g/n)$ verifica $h^n = f$ y dicha h es única módulo multiplicar por una raíz n-ésima de 1 ✓ ■

Observación útil: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío tal que $H_1(\Omega, \mathbb{Z}) = \{0\}$, y sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ (resp. $f \in \mathcal{M}(\Omega)$) no-idénticamente nula en Ω. Entonces,

$\exists\, h \in \mathcal{O}(\Omega)$ (resp. $h \in \mathcal{M}(\Omega)$) tal que $h^n = f$ si y sólo si $\operatorname{div}(f)$ es divisible por n (ie, todas las mult. de ceros y polos son divisibles por n).

No es difícil ver que la condición de divisibilidad es necesaria ✓ Por otra parte, si $\operatorname{div}(f)$ es divisible por n entonces el Teorema de Factorización de Weierstrass implica que $\exists\, g_1 \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $\operatorname{div}(g_1) = \frac{1}{n} \operatorname{div}(f)$.

$\Rightarrow h := f/g_1^n$ es una función holomorfa sin ceros ni polos!

$\Rightarrow \exists\, g_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$ sin ceros ni polos tal que $g_2^n = h$, ie,

$$g_2^n = f/g_1^n \iff f = (g_1 g_2)^n \quad ✓$$

En esta sección consideraremos 1-ciclos $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$, donde podemos asumir que los γ_j son distintos y que sólo escribimos los $m_j \neq 0$. En tal caso, se define el **soporte** de $[\gamma]$ como $\mathrm{Supp}([\gamma]) := \bigcup \mathrm{Im}(\gamma_j)$.

<u>Teorema y Definición</u>: Sea $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$ un 1-ciclo en $\mathbb{C}$, y sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}([\gamma])$. Definimos el **índice** de $[\gamma]$ respecto a z_0 como

$$\mathrm{Ind}([\gamma], z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{[\gamma]} \frac{1}{z - z_0}\, dz$$

Más aún, $\mathrm{Ind}([\gamma], z_0) \in \mathbb{Z}$ y representa el "nº de vueltas" al rededor de z_0 (contadas con multiplicidad m_j y con signos determinados por el sentido de la rotación en torno a z_0).

<u>Dem</u>: Sup. primero que $[\gamma]$ está dado por un único camino cerrado $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, con $\gamma(0) = \gamma(1)$. Sea $\delta := \mathrm{dist}(z_0, \mathrm{Im}(\gamma)) > 0$, y notar que la continuidad uniforme de γ en el compacto $[0,1]$ implica que existe una subdivisión $0 =: t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ tal que

$\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subseteq D(\gamma(t_j), \delta) =: \Delta_j$. Ejercicio

Notar que si $z_1 \in D_j$, entonces para todo $z \in D_j \Rightarrow (z - z_0)/(z_1 - z_0) \notin \mathbb{R}^{\leq 0}$

Luego, $F(z) := \mathrm{Ln}((z - z_0)/(z_1 - z_0)) \in \mathcal{O}(D_j)$ es una primitiva de $f(z) = 1/(z - z_0)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} \frac{1}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Ln}\left(\frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0} \right)$$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{-i}{2\pi} \ln \left| \frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0} \right| + \frac{1}{2\pi} \mathrm{Arg}\left(\frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0} \right)$$

Dado que $\mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2) = \mathrm{Ln}(z_1 z_2) \mod 2\pi i \mathbb{Z}$, obtenemos al sumar:

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \mathrm{Ln}\left(\frac{\gamma(1) - z_0}{\gamma(0) - z_0} \right) \mod \mathbb{Z}$$

Dado que $\gamma(0) = \gamma(1)$, se tiene $\frac{\gamma(1) - z_0}{\gamma(0) - z_0} = 1$ y luego $\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.

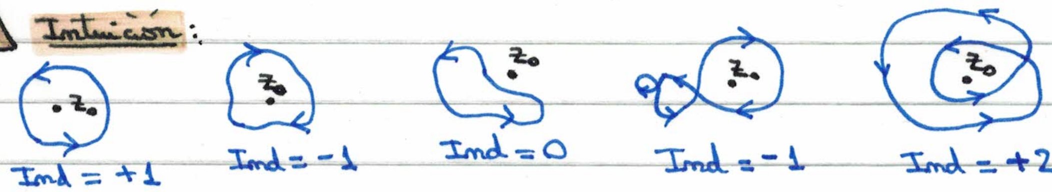
Más aún, el cálculo anterior muestra que:

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{Arg}\left(\frac{\gamma(t_{j+1}) - z_0}{\gamma(t_j) - z_0} \right)$$

En el caso general $[\gamma] = \sum m_j [\gamma_j]$, sabemos que $[\gamma] - [\hat{\gamma}] = \partial[\sigma]$, donde $[\hat{\gamma}] = \sum \hat{m}_j [\hat{\gamma}_j]$ es una suma de caminos cerrados $\hat{\gamma}_j$ y luego

$$\mathrm{Ind}([\gamma], z_0) = \mathrm{Ind}([\hat{\gamma}], z_0) = \sum_j \hat{m}_j \,\mathrm{Ind}([\hat{\gamma}_j], z_0) \in \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

⚠ **Intuición**:



Obs: ① La 1-forma $\omega = \frac{1}{z-z_0}dz$ es cerrada en $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.
Luego, si $[\gamma_1]-[\gamma_2] = \partial[\sigma]$ en $C_1(\Omega,\mathbb{Z})$ entonces

$$\mathrm{Ind}([\gamma_1],z_0) = \mathrm{Ind}([\gamma_2],z_0)$$

En part, si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ homotópicamente equiv. entonces $\mathrm{Ind}(\gamma_1,z_0) = \mathrm{Ind}(\gamma_2,z_0)$.

② El Teorema de los Residuos aplicado a $\omega = \frac{1}{z-z_0}dz$ y K compacto con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos, implica que

$$\mathrm{Ind}(\partial K,z_0)=0 \text{ si } z_0\in\Omega\setminus K \quad \text{y} \quad \mathrm{Ind}(\partial K,z_0)=1 \text{ si } z_0\in \mathrm{Int}(K).$$

Prop: Sea $[\gamma]$ un 1-ciclo en $\mathbb{C}$, y sean $z_0, z_1 \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{Supp}([\gamma])$.
① Si z_0 y z_1 están en la misma componente conexa, entonces
$\mathrm{Ind}([\gamma],z_0) = \mathrm{Ind}([\gamma],z_1)$.
② Si z_0 está en la componente conexa no-acotada de $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Supp}([\gamma])$, entonces $\mathrm{Ind}([\gamma],z_0)=0$.

Dem: La función $w \mapsto \mathrm{Ind}([\gamma],w) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{[\gamma]}\frac{1}{z-w}dz$ es holomorfa (y en part. continua) en $\Omega = \mathbb{C}\setminus\mathrm{Supp}([\gamma])$. Como ella toma valores enteros, es necesariamente constante en cada comp. conexa Ω_j de Ω, i.e, ① ✓

Dado que $\mathrm{Supp}([\gamma])$ es compacto, está contenido en $\overline{D}(0,R_0)$ para cierto $R_0\in\mathbb{R}^{>0}$, y luego $\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,R_0)\subseteq\Omega$.
$\Rightarrow$ Ω posee una única comp. conexa no-acotada (es aquella que contiene $\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,R_0)$, y las otras comp. conexas están contenidas en $\overline{D}(0,R_0)$) ✓

Módulo homotopía, podemos reemplazar los caminos γ_j que componen $[\gamma]$ por caminos poligonales $\hat{\gamma}_j$ contenidos en $\overline{D}(0,R_0)$, que en particular son de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos y de longitud finita. Luego, $\forall w\in\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,R_0)$:

$$\mathrm{Ind}([\gamma],w) \overset{①}{=} \mathrm{Ind}([\hat{\gamma}],w) \quad \text{y} \quad |\mathrm{Ind}([\hat{\gamma}],w)| \underset{\text{dg}}{\leq} \frac{1}{2\pi(|w|-R_0)}\sum |m_j|\,\mathrm{long}(\hat{\gamma}_j)$$

y luego $\mathrm{Ind}([\gamma],w)\longrightarrow 0$ cuando $R_0\to+\infty$, i.e, $\mathrm{Ind}([\gamma],w)=0$ para todo w en la comp. conexa no-acotada de $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Supp}([\gamma])$ ✓ ■

Veamos que lo anterior nos permite generalizar el Teorema de Cauchy-Goursat. Para ello, recordemos que si $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ abierto no-vacío y $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$, entonces $\int_{[\gamma]}f(z)\,dz = 0$ para todo 1-ciclo $[\gamma]=\partial[\sigma]$.
Además, recordemos que un agujero de Ω es una componente conexa acotada de $\mathbb{C}\setminus\Omega$. Con esta Terminología se tiene que:

Teorema de Cauchy-Goursat generalizado: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces, para todo 1-ciclo $[\gamma]$ en Ω tal que $\operatorname{Ind}([\gamma], z_0) = 0$ para al menos un punto z_0 en cada agujero de Ω, se tiene que:

$$\int_{[\gamma]} f(z)\, dz = 0.$$

Dem: Módulo homotopía, podemos suponer que $[\gamma]$ está formado por caminos de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos, y luego $\int_{[\gamma]} f(z)\, dz = \sum m_j \int_{\gamma_j} f(z)\, dz$.

Sea K compacto de borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos tal que $\operatorname{Supp}([\gamma])$ esté contenido en $\operatorname{int}(K) \subseteq \Omega$ (cf. demostración del Teo. de Cauchy-Goursat).

Si $\mathbb{C} \setminus \operatorname{int}(K)$ posee "agujeros" C_j, reemplazamos K por $K \cup \bigcup_j C_j$ y con ello podemos asumir que ninguna componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{int}(K)$ está contenida en Ω ✓

Por otra parte, la fórmula de Cauchy implica que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \text{para todo } z \in \operatorname{int}(K)$$

Luego, gracias al Teorema de Fubini, deducimos que

$$\int_{[\gamma]} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} f(w) \left(\int_{[\gamma]} \frac{1}{w-z}\, dz \right) dw \overset{\text{def}}{=} \int_{\partial K} f(w) \operatorname{Ind}([\gamma], w)\, dw.$$

Veamos que $\operatorname{Ind}([\gamma], w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{int}(K)$ (y en part. para $w \in \partial K$): Sea C la comp. conexa de $\mathbb{C} \setminus \operatorname{int}(K)$ que contiene a w. Si C es no-acotada, el resultado anterior implica que $\operatorname{Ind}([\gamma], w) = 0$ ✓ Si C es acotada, entonces (por hipótesis) $\exists\, z_0 \in C$ tal que $0 = \operatorname{Ind}([\gamma], z_0) \overset{\text{Prop}}{=} \operatorname{Ind}([\gamma], w) = 0$ ✓ ■

Una consecuencia útil de lo anterior, y de los resultados discutidos en la sección anterior, es el siguiente:

Corolario: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no-vacío sin agujeros (i.e., $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no posee componentes conexas acotadas). Entonces:

① Para todo 1-ciclo $[\gamma]$ en Ω y toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ se tiene que

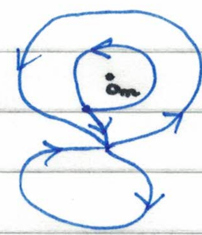
$$\int_{[\gamma]} f(z)\, dz = 0.$$

② Toda función holomorfa f en Ω posee una primitiva F. Más aún, si f no se anula en Ω entonces $\exists\, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $e^g = f$ y $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $h^n = f$, con $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$. ■

<u>Teorema de Residuos generalizado</u>: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto no-vacío, y sea $[\gamma]$ un 1-ciclo en Ω tal que $\mathrm{Ind}([\gamma], z_0) = 0$ para al menos un punto z_0 en cada agujero de Ω. Sea $\{a_n\}_{n\geq 0}$ un conjunto de puntos aislados en Ω que <u>no</u> pertenecen a $\mathrm{Supp}([\gamma])$ y sea f holomorfa en $\Omega \setminus \{a_n\}_{n\geq 0}$.
Entonces:

$$\int_{[\gamma]} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a_m \in \Omega} \mathrm{Ind}([\gamma], a_m)\,\mathrm{Res}(f, a_m).$$

<u>Dem</u>: Como en la prueba anterior, consideramos K un compacto con borde de clase $\mathcal{C}^1$ por pedazos sin agujeros en Ω y tal que $\mathrm{Supp}([\gamma]) \subseteq \mathrm{int}(K)$.
Además, podemos asumir que $\partial K \cap \{a_n\}_{n\geq 0} = \emptyset$.
Dado que $\mathrm{Ind}([\gamma], w) = 0$ si $w \notin K$ (pues ninguna componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus \mathrm{int}(K)$ está contenida en Ω), basta considerar las singularidades en $K \cap \{a_n\}_{n\geq 0}$ (que son finitas por hipótesis).
Sea $\Omega' := \Omega \setminus \{a_n\}_{n\geq 0}$, y notar que que el índice de $[\gamma]$ en cada a_m <u>no</u> es necesariamente nulo!



Sin embargo, si $\mu_m := \mathrm{Ind}([\gamma], a_m)$ y $0 < \varepsilon \ll 1$ es suficientemente pequeño, entonces el 1-ciclo

$$[\gamma'] := [\gamma] - \sum_{a_m \in K} \mu_m [\Gamma(a_m, \varepsilon)]$$

tiene índice 0 en cada agujero de Ω' y $f \in \mathcal{O}(\Omega')$

$\Rightarrow \int_{[\gamma']} f(z)\,dz = 0$, i.e.,

$$\int_{[\gamma]} f(z)\,dz = \sum_{a_m \in K} \mu_m \int_{[\Gamma(a_m,\varepsilon)]} f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} 2\pi i \sum_{a_m \in K} \mu_m \mathrm{Res}(f, a_m) \checkmark \blacksquare$$

{<u>Cultura general</u>} Se puede probar que si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ posee un número <u>finito</u> de agujeros y si $\{w_1, \ldots, w_p\}$ es un conjunto de puntos, uno en cada agujero, entonces:

$$H_1(\Omega, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^p, \quad [\gamma] \longmapsto (\mathrm{Ind}([\gamma], w_j))_{1\leq j\leq p}$$

es un <u>isomorfismo</u>. En general, la topología puede ser más sofisticada cuando hay infinitos agujeros (eg. cuando Ω es el complemento del conjunto de Cantor $K \subseteq [0,1]$) y se necesitan herramientas más sofisticadas de <u>Topología Algebraica</u> para analizarlo!