Guia 2 de Ejercicios (MAT235)

Pedro Montero

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María

1. Productos infinitos de funciones holomorfas

1. Considere el producto infinito
$$P(z) = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + z^{2^n}).$$
Determinar su radio de convergencia $R \in [0, +\infty]$ y probar que $P(z) = \frac{1}{1-z}$ para todo $z \in D(0, R)$.

2. Probar que
$$\sinh(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2}\right)$$
para todo $z \in \mathbb{C}$.

3. Probar que
$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}.$$

4. Probar la **fórmula de Wallis**
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)} \cdots$$

5. Probar que para todo $w \in \mathbb{C}$ se tiene que
$$\left|(1 + w)e^{-w} - 1\right| \leq |w|^2 e^{|w|},$$
y deducir que
$$f(z) := \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$
es una función entera.

2. Series de Laurent

1. Considere la función
$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{(1 - z)}.$$
Determine su desarrollo en serie de Laurent centrada en $z_0 = 0$ en los anillos $A_1 = A(0; 1, +\infty)$ y $A_2 = A(0; 0, 1) =: \mathbb{D}^*$, respectivamente.

2. Determinar el desarrollo en serie de Laurent centrada en $z_0 = 0$ de la función
$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2} + \frac{1}{3 - z}$$
en el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1\}$.

3. Determine los cinco primeros términos de la serie de Laurent de
$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2 + 1)}$$
en torno a $z_0 = 0$.

3. Singularidades aisladas

1. Determinar si las funciones
$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z} \text{ y } g(z) = \frac{\sin(z)}{z^2}$$
poseen singularidades removibles en $z_0 = 0$.

2. Sean $p, q \in \mathbb{C}[z]$ polinomios tales que $q \neq 0$. Probar que la función racional
$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \in \mathbb{C}(z)$$
posee a lo más polos como singularidades (i.e., posee singularidades removibles o polos).
Indicación: Usar fracciones parciales.

4. Funciones meromorfas y Factorización de Weierstrass-Hadamard

1. Sean $p, q \in \mathbb{C}[z]$ polinomios tales que $q \neq 0$. Probar que la función racional
$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \in \mathbb{C}(z)$$
es meromorfa en $\mathbb{C}$, i.e., $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$.

2. Probar, usando el Teorema de factorización de Hadamard, que para $a, b \in \mathbb{C}$ se verifica
$$e^{az} - e^{bz} = (a-b)ze^{(a+b)z/2} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(a-b)^2 z^2}{4n^2\pi^2}\right)$$
para todo $z \in \mathbb{C}$.

3. Deducir, a partir de (2), que
$$\cos(\pi z) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right)$$
para todo $z \in \mathbb{C}$.

4. Probar, usando el Teorema de factorización de Hadamard, que la ecuación $e^z = z$ tiene *infinitas* soluciones en $\mathbb{C}$.

5. Residuos

1. Probar que f posee un polo de orden $m \geq 1$ en z_0, entonces
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left\{(z - z_0)^m f(z)\right\}.$$

2. Sea $f(z) = \tan(z)$. Calcular $\operatorname{Res}(\tan(z), a)$ para todo $a \in \mathbb{C}$.

3. Sea $\Gamma(0, 2) = \partial D(0, 2)$ el círculo de radio 2 centrado en $z_0 = 0$ (y orientado en sentido anti-horario). Calcular, usando el Teorema de residuos, la integral
$$\int_{\Gamma(0,2)} \frac{5z-2}{z(z-1)} \, \mathrm{d}z.$$

4. Probar que
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1/5)} \frac{1}{\sin(z^{-1})} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}.$$

5. Calcular, utilizando el Teorema de residuos, la integral impropia real
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^6}\,\mathrm{d}x.$$

6. Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular, utilizando el Teorema de residuos, la integral impropia real
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x\sin(x)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x.$$

7. Sea $a \in \mathbb{R}^{>1}$. Probar que
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+\cos(x))^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}.$$

8. Sea $a \in \mathbb{R}^{>0}$. Probar que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\ln(a).$$

6. Análisis de Fourier

1. Sea $f \in M(\mathbb{R})$ función de decrecimiento moderado. Probar que
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-h)-f(x)|\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0 \text{ cuando } h \longrightarrow 0.$$

2. Sea $f \in M(\mathbb{R})$ función de decrecimiento moderado. Probar que:
   (a) Si $g(x) = f(x+h)$ con $h \in \mathbb{R}$, entonces $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)e^{2\pi i h\omega}$.
   (b) Si $g(x) = f(x)e^{-2\pi i x h}$ con $h \in \mathbb{R}$, entonces $\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega+h)$.
   (c) Si $g(x) = f(\delta x)$ con $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$, entonces $\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\delta}\widehat{f}(\frac{\omega}{\delta})$.

3. Probar que $f(z) = 1/\cosh(\pi z)$ pertenece a $\mathscr{F}_a$ para todo $0 < a < \frac{1}{2}$.

4. Probar que si $f \in \mathscr{F}_a$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que $f^{(n)} \in \mathscr{F}_b$ para todo $0 < b < a$.
Indicación: Para esto, pueden ser útiles las fórmulas y desigualdades de Cauchy.

5. Sea
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$
donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular $\widehat{f}(\omega)$.

6. Sea
$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma\left(1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)},$$
donde $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular $\widehat{f}(\omega)$.

7. Sea
$$f(x) = \frac{1}{2b}e^{-|x-\mu|/b},$$
donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}^{>0}$. Calcular $\widehat{f}(\omega)$.

8. Para todo $t \in \mathbb{R}^{>0}$ se define la **función theta** mediante
$$\theta(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$
Probar, usando adecuadamente la fórmula de Poisson, que
$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(1/t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^{>0}.$$

9. Probar que para todo $a \in \mathbb{R}^{>0}$ se tiene que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a}{a^2 + n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi a|n|} = \coth(\pi a).$$

10. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua de soporte compacto[1]. Probar que si $\widehat{f}$ también es una función de soporte compacto, entonces f es identicamente nula en $\mathbb{R}$.

11. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Probar que la **función bump** definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \text{ o si } x \geq b \\ e^{-1/(x-a)} e^{-1/(x-b)} & \text{si } a < x < b \end{cases}$$

pertenece al espacio de Schwartz $S(\mathbb{R})$.

12. Sea $g \in S(\mathbb{R})$. Probar que para todo $\ell \geq 0$ y todo $y \in \mathbb{R}$ fijo se tiene que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^\ell |g(x-y)| \leq A_\ell (1 + |y|)^\ell$$

para cierta constante $A_\ell \in \mathbb{R}^{>0}$.

13. Considere la región $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ y considere la **Ecuación de Laplace**

$$\begin{cases} \triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde $f \in S(\mathbb{R})$.

(a) Deducir que $\widehat{u}(\omega, y) = \widehat{f}(\omega) e^{-2\pi|\omega|y}$.

(b) Probar que $u(x, y) := (f * P_y)(x)$ soluciona la EDP anterior, donde

$$P_y(x) := \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}$$

es el **kernel de Poisson**.

[1] i.e., existe $M \in \mathbb{R}^{>0}$ tal que $f(x) = 0$ si $|x| > M$.